

THESE

présentée devant l'UNIVERSITE de NANTES
pour obtenir le grade de

DOCTEUR-INGENIEUR

par

Jean BOUGIS

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE MECANIQUE



ÉTUDE DE LA DIFFRACTION-RADIATION DANS LE CAS D'UN FLOTTEUR INDÉFORMABLE
ANIMÉ D'UNE VITESSE MOYENNE CONSTANTE
ET SOLLICITÉ PAR UNE HOULE SINUSOÏDALE DE FAIBLE AMPLITUDE

Soutenue le 8 juillet 1980 devant la Commission d'Examen

MM, P.GUEVEL

Président

K.J. BAI
J.C. DERN
D. EUVRARD
P.SULMONT

Examineur

UNIVERSITE DE NANTES

Président : M. VILAINE (E.N.S.M.)

Liste des enseignants des disciplines scientifiques :

PROFESSEURS	M. BRILLOUET	Mathématiques
	M. DEBORDES (E.N.S.M.)	«
	M. IBISCH	«
	M. PETRESCO	«
	M. RAFFIN	«
	M. GUEVEL (E.N.S.M.)	Mécanique
	M. PIRONNEAU (E.N.S.M.)	«
	M. VILAINE (E.N.S.M.)	Génie Civil
	M. AVIGNON	Physique
	M. BOULLOUO	«
	M. COLLET	«
	M. MINN	«
	M. MEZENECV (E.N.S.M.)	«
	M. MOUTON	«
	Mme OFFRET (E.N.S.M.)	«
	M. GRAFF	Chimie
	M. MARTIN	«
	M. PIERI	«
	M. QUINIOU	«
	M. ROUXEL	«
M. TOURNOUX	«	
M. WOJTKOWIAK	«	
Mme LE DOUARIN	Biologie	
M. LE DOUARIN	«	
M. SAUDRAY	«	
M. SELLIER	«	
M. CAVET	Sciences de la Terre	
M. FORESTIER	«	
PROFESSEURS SANS CHAIRE	M. DO (E.N.S.M.)	Mathématiques
	M. FOUQUES	«
	M. LEBORGNE	«
	M. SULMONT (E.N.S.M.)	Mécanique
	M. BARDON	Physique
	M. CAILLER (I.U.T. Nantes)	«
M. GOUREAUX	«	

PROFESSEURS SANS CHAIRE
(suite)

M. DEVELEY (I.U.T. St-Nazaire)	Physique
M. LASKAR	"
M. LE NAOUR	"
M. LONCKE	"
M. ROSIER	"
M. CHABANEL	Chimie
M. LE LEC (I.U.T. St-Nazaire)	"
Mme MARTIN	"
M. POINTEAU (E.N.S.M.)	"
M. UCHY (I.U.T. Nantes)	Métallurgie
M. LE MAITRE Félix (E.N.S.M.)	"
M. DUPONT	Biologie
M. OTTMANN	Sciences de la Terre

MAITRES DE CONFERENCES

M. BARGE	Mathématiques
M. OLLEY	"
M. DHOMBRES	"
M. GAPAILLARD	"
M. GATESOUBE	"
M. LAMEAU (E.N.S.M.)	"
M. PHAN-THE-LAI	"
M. VOGEL	"
M. DUBIGEON (E.N.S.M.)	Mécanique
M. PIQUET (E.N.S.M.)	"
M. VAUSSY (E.N.S.M.)	"
M. GROVEL (I.U.T. St-Nazaire)	Génie Civil
M. BECLE (I.U.T. St-Nazaire)	Physique
M. ERCEAU (I.U.T. Nantes)	"
M. FERON (I.U.T. St-Nazaire)	"
M. de LARMINAT (I.U.T. Nantes)	"
M. LAURGEAU (I.U.T. Nantes)	"
M. LE BIHAN	"
M. LE CORR (E.N.S.M.)	"
M. LE MAITRE R.	"
M. LEROY (I.U.T. Nantes)	"
M. THOMAS (I.U.T. Nantes)	"
M. TRICHET	Chimie
M. AMOURIO	Biologie
M. LE BRUN	"
Mme NICOLAS-PRAT	"
M. NICOLAS	Sciences de la Terre

"Celui qui commande la mer, commande toutes choses"

THEMISTOCLE

A mes parents

Monsieur P. GUEVEL a bien voulu me confier cette étude, diriger mes recherches et présider le Jury d'examen. Que ce travail soit le reflet de toute ma gratitude pour son dévouement, sa disponibilité à laquelle j'ai été particulièrement sensible et l'honneur qu'il m'a fait de m'intégrer dans son équipe.

Messieurs J.K. BAI, J.C. DERN, D. EUVRARD et P. SULMONT m'ont honoré en acceptant de siéger au Jury d'examen et de me faire part de leurs critiques éclairées ; ils ont ainsi confirmé l'intérêt de ce travail. Qu'ils veuillent bien trouver ici l'expression de ma vive reconnaissance.

Les méthodes exposées dans le présent mémoire ont pu être mises en oeuvre dans le cas d'une profondeur finie, grâce à des outils numériques originaux non publiés dus à Monsieur J.C. DAUBISSE. Qu'il veuille bien trouver ici le témoignage de ma sincère reconnaissance.

J'ai bénéficié de l'acquis du Laboratoire d'Hydrodynamique Navale, et plus particulièrement des travaux de Messieurs G. DELHOMMEAU, C. JACQUOT et R.D. RAJONA. Que tous en soient remerciés.

Cette étude a été réalisée avec la participation du Bassin d'Essais des Carènes de Paris, de la Direction des Recherches Etudes et Techniques, et des Ateliers et Chantiers de Bretagne. Nous les remercions de la confiance qu'ils nous ont accordée.

S O M M A I R E

PRESENTATION DE L'ETUDE	1
PRESENTATION OF THE STUDY	3
Chapitre 1 - HYPOTHESES ET DEFINITIONS	5
1.1 - Hypothèse de continuité (H-1)	5
1.2 - Hypothèse du fluide parfait isovolume (H-2)	5
1.3 - Hypothèse de l'écoulement à potentiel des vitesses (H-3)	6
1.4 - Hypothèse concernant la surface libre (H.4)	6
1.5 - Hypothèse de linéarité (H-5)	6
1.6 - Définition des différents repères utilisés	6
1.7 - Modèle de houle incidente	3
1.3 - Principales notations	9
Chapitre 2 - MISE EN EQUATION DU PROBLEME HYDRODYNAMIQUE	11
2.1 - Représentation analytique du mouvement d'un milieu fluide	11
2.1.1 - Variables d'Euler	
2.1.2 - Dérivée particulaire	
2.2 - Equation de la conservation de la masse	12
2.5 - Equation de Lagrange	12
2.4 - Conditions aux limites	15
2.4.1 - Conditions sur les frontières indéformables	
2.4.1.1 - Condition de glissement sur le fond	
2.4.1.2 - Condition de glissement sur la carène	
2.4.2 - Condition de surface libre	

2.4.3 - Comportement à l'infini du potentiel des vitesses	
2.5 - Faiblesse du modèle du fluide parfait - modèle du fluide presque parfait	16
2.6 - Condition de surface libre pour le fluide presque parfait	17
2.7 - Justification de l'emploi du modèle du fluide presque parfait	17
2.8 - Récapitulation du problème aux limites	19
2.8.1 - Potentiel absolu exprimé dans le repère fixe	
2.8.2 - Potentiel absolu exprimé dans le repère mobile moyen	
2.9 - Décomposition du problème de la diffraction-radiation	20
2.10 - Position du problème de la diffraction	21
2.11 - Position des problèmes de radiation	21
 Chapitre 3 - MISE EN EQUATION DU PROBLEME MECANIQUE	 23
3.1 - Application du principe fondamental de la dynamique	23
3.2 - Torseur des efforts d'inertie	23
3.2.1 - Expression de la résultante	
3.2.2 - Expression du moment en O	
3.2.3 - Forme matricielle du torseur d'inertie	
3.3 - Décomposition des forces de pression	26
3.4 - Torseur des efforts hydrostatiques et des forces de gravité	27
3.3 - Décomposition du torseur des forces hydrodynamiques	30
3.6 - Torseur des forces de Froude - Krilov	31
3.7 - Torseur des forces de diffraction	34
3.8 - Torseur des forces de radiation	34
3.9 - Torseur des forces de propulsion	35
3.10 - Formulation généralisée de l'équation de Newton	6

Chapitre 4 - DISTRIBUTIONS SUPERFICIELLES DE SINGULARITES CINEMATIQUEMENT EQUIVALENTES A UNE CARENE - DISTRIBUTION MIXTE DE GREEN ET DISTRIBUTION DE SOURCES	39
4.1 - Différents types de singularités	39
4.1.1 - Distribution volumique de sources	
4.1.2 - Distribution superficielle de sources	
4.1.3 - Distribution superficielle de doublets normaux	
4.1.4 - Discontinuités attachées aux distributions superficielles	
4.1.4.1 - Distribution superficielle de sources	
4.1.4.2 - Distribution superficielle de doublets normaux	
4.2 - Expression d'un champ scalaire dans un domaine D limité par une frontière S	42
4.2.1 - Intégrale de Stieltjes	
4.2.2 - Troisième formule de Green	
4.3 - Expression d'un champ scalaire harmonique et régulier à l'infini dans un domaine non borné	42
4.4 - Expression générale d'un champ scalaire harmonique et régulier dans un domaine non borné	43
4.5 - Fonction de Green	45
4.5.1 - Cas de la profondeur illimitée	
4.5.2 - Cas d'une profondeur finie	
4.6 - Fonction de Green modifiée	49
4.7 - Intégrale de ligne	50
4.8 - Distribution mixte de Green	54
4.9 - Distribution de sources	56
4.10 - Conclusion	57
Chapitre 5 - CONSTRUCTION DE LA FONCTION DE GREEN DANS LE CAS OU LA PROFONDEUR EST ILLIMITEE	59
5.1 - Expression générale de la fonction de Green	59
5.2 - Détermination de la fonction de Green	61

5.3 - Introduction des termes adimensionnels caractéristiques	64
5.4 - Etude des pôles de l'intégrand de $G'_1(M, M'; t)$	65
5.4.1 - Détermination des pôles	
5.4.2 - Détermination des signes des parties imaginaires des pôles	
5.5 - Etude des pôles de l'intégrand de $(M, M'; t)$	66
5.5.1 - Détermination des pôles	
5.5.2 - Détermination des signes des parties imaginaires des pôles	
5.6 - Intégration de la fonction $G'_1(M, M'; t)$	71
5.7 - Intégration de la fonction $G'_2(M, M'; t)$	73
5.7.1 - Cas des racines réelles ($\cos \theta < \cos \theta_c$)	
5.7.2 - Cas des racines complexes ($\cos \theta < \cos \theta_c$)	
5.7.3 - Cas des racines complexes ($\cos \theta < \cos \theta$)	
5.7.4 - Etude particulière au voisinage de θ_c	
5.7.5 - Forme générale de $G'_2(M, M'; t)$	
 Chapitre 6 - CONSTRUCTION DE LA FONCTION DE GREEN DANS LE CAS D'UNE PROFONDEUR FINIE	 77
6.1 - Expression générale de la fonction de Green	77
6.2 - Détermination de la fonction de Green	78
6.3 - Introduction des termes adimensionnels caractéristiques	31
6.4 - Etude des pôles de l'intégrand de $G'_1(M, M'; t)$	31
6.4.1 - Détermination des pôles	
6.4.2 - Détermination des signes des parties imaginaires des pôles	
6.5 - Etude des pôles de l'intégrand de $G'_1(M, M'; t)$	34
6.5.1 - Détermination des pôles	
6.5.2 - Détermination du pôle double	
6.5.3 - Etude de la nature des pôles en fonction de θ_c	
6.5.4 - Détermination des signes des parties imaginaires des pôles	
6.6 - Intégration de la fonction $G'_0(M, M'; t)$	39
6.7 - Intégration de la fonction $G'_1(M, M'; t)$	91

6.8 - Intégration de la fonction $G_2'(M, M'; t)$	93
6.8.1 - Cas des racines réelles ($\cos \theta < \cos \theta_c$)	
6.8.2 - Cas où il n'existe pas de racine réelle, mais où il y a des racines complexes très près de l'axe réel ($\cos \theta_c < \cos \theta < \cos \theta'$)	
6.8.3 - Cas où il n'existe pas de racine réelle, et où les racines complexes sont loin de l'axe réel ($\cos \theta' < \cos \theta$)	
6.8.4 - Etude particulière au voisinage de θ_c	
6.8.5 - Forme générale de $G_2'(M, M'; t)$	
Chapitre 7 - ETUDE ASYMPTOTIQUE DE LA FONCTION DE GREEN ET ANALYSE DU CHAMP DE VAGUES LOINTAIN DANS LE CAS D'UNE PROFONDEUR ILLIMITÉE	99
7.1 - Potentiel proche et potentiel lointain	99
7.2 - Développement asymptotique de $\Phi_{1\ell}(M; t)$	102
7.2.1 - Etude des zéros de $g_1'(\theta)$	
7.2.2 - Etude des zéros de $g_2'(\theta)$	
7.3 - Développement asymptotique de $\Phi_{2\ell}(M; t)$	108
7.3.1 - Cas où ν est inférieur à 1/4	
7.3.1.1 - Etude des zéros de $g_{31}'(\theta)$	
7.3.1.2 - Etude des zéros de $g_{41}'(\theta)$	
7.3.2 - Cas où ν est compris entre 1/4 et 1/2	
7.3.2.1 - Etude des zéros de $g_{31}'(\theta)$	
7.3.2.2 - Etude des zéros de $g_{41}'(\theta)$	
7.3.2.3 - Contribution des pôles complexes	
7.3.3 - Cas où ν est supérieur à 1/2	
7.3.3.1 - Etude des zéros de $g_{31}'(\theta)$	
7.3.3.2 - Etude des zéros de $g_{41}'(\theta)$	
7.3.3.3 - Contribution des pôles complexes	
7.4 - Description du champ de vagues lointain	119
7.4.1 - Contribution du pôle K_1	
7.4.1.1 - Cas où ν est inférieur à $1/\sqrt{2}$	
7.4.1.2 - Cas où ν est égal à $1/\sqrt{2}$	
7.4.1.3 - Cas où ν est supérieur à $1/\sqrt{2}$	
7.4.2 - Contribution du pôle K_2	
7.4.3 - Contribution du pôle K_3	
7.4.3.1 - Cas où ν est inférieur à 1/4	
7.4.3.2 - Cas où ν appartient à l'intervalle $]1/4; 1/2\sqrt{3}]$	
7.4.3.3 - Cas où ν appartient à l'intervalle $]1/2\sqrt{3}, 1/\sqrt{2}]$	
7.4.3.4 - Cas où ν est supérieur à $1/\sqrt{2}$	

7.4.4 - Contribution du pôle K_4	
7.4.4.1 - Cas où ν est inférieur à $1/4$	
7.4.4.2 - Cas où ν est supérieur à $1/4$	
7.4.5 - Conclusion	
7.5 - Condition de radiation à l'infini	136
7.6 - Etude du cas particulier $\nu = 1/4$	137
7.7 - Etude de l'intégrale à l'infini	137
Chapitre 8 - ETUDE ASYMPTOTIQUE DE LA FONCTION DE GREEN ET ANALYSE DU CHAMP DE VAGUES LOINTAIN DANS LE CAS OU LA PROFONDEUR EST FINIE	143
8.1 - Potentiel proche et potentiel lointain	143
8.2 - Approximation analytique des pôles	146
8.2.1 - Choix du type d'approximation	
8.2.2 - Approximation des pôles	
8.3 - Développement asymptotique de $\phi_{1,2}(M;t)$	151
8.3.1 - Etude des zéros de $g'_1(\theta)$	
8.3.2 - Etude des zéros de $g'_2(\theta)$	
8.4 - Développement asymptotique de $\phi_{2,2}(M;t)$	154
8.4.1 - Etude des zéros réel de $g'_3(\theta)$	
8.4.2 - Etude des zéros réels de g'_4	
8.5 - Description du champ de vagues lointain	161
8.6 - Conclusion	161
Chapitre 9 - DISCRETISATION DU PROBLEME HYDRODYNAMIQUE	163
9.1 - Discrétisation des équations intégrales	163
9.2 - Discrétisation des termes hydrodynamiques	165
9.2.1 - Torseur des forces de Froude-Krilov	
9.2.1.1 - Cas d'une profondeur illimitée	
9.2.1.2 - Cas d'une profondeur finie	
9.2.2 - Torseur des efforts de diffraction et de radiation	
9.2.2.1 - Distribution mixte de Green	
9.2.2.2 - Distribution de sources	

9.3 - Coefficients d'influence	169
9.4 - Expression des coefficients d'influence dans le cas d'une profondeur illimitée	170
9.4.1 - Partie des coefficients dépendant de $G_0'(M, M'; t)$	
9.4.2 - Partie des coefficients dépendant de $G_1'(M, M'; t)$	
9.4.3 - Partie des coefficients dépendant de $G_2'(M, M'; t)$	
9.5 - Expression des coefficients d'influence dans le cas d'une profondeur finie	174
9.5.1 - Partie des coefficients dépendant de $G_0'(M, M'; t)$	
9.5.2 - Partie des coefficients dépendant de $G_1'(M, M'; t)$	
9.5.3 - Partie des coefficients dépendant de $G_2'(M, M'; t)$	
9.6 - Conclusion	178
 Chapitre 10 - METHODES NUMERIQUES	 179
10.1 - Détermination des pôles réels dans le cas d'une profondeur finie	179
10.1.1 - Détermination des pôles simples	
10.1.2 - Détermination du pôle double	
10.2 - Approximation d'une fonction régulière par une série d'exponentielles complexes	182
10.2.1 - Principe de la méthode de Lanczos et Prony	
10.2.2 - Principe de la méthode de Householder	
10.2.3 - Mise en oeuvre du programme de calcul	
10.3 - Intégration numérique par rapport à la variable θ	192
10.3.1 - Intégration de $G_1'(M, M'; t)$	
10.3.2 - Intégration de $G_2'(M, M'; t)$	
10.3.2.1 - Intégration séparée de la singularité	
10.3.2.2 - Ablation de la singularité	
10.4 - Problème de la résolution de l'équation relative à la distribution mixte dans le cas général	201
10.4.1 - Résolution au moyen d'inconnues supplémentaires	
10.4.2 - Résolution par itérations successives	
10.5 - Fréquences irrégulières	203
10.6 - Présentation des programmes de calcul	205
10.7 - Influence de la discrétisation	205

Chapitre 11 - RESULTATS NUMERIQUES	209
11.1 - Choix des tests	209
11.1.1 - Barge du D.N.V.	
11.1.2 - Séries 60 Coefficients de Bloc 0.70	
11.2 - Résultats concernant la barge du D.N.V.	210
11.3 - Résultats concernant la carène C_B 0.70 des Séries 60	213
11.4 - Conclusion	217
CONCLUSION	219
Annexe A 1 - COUPLAGE ENTRE LA VITESSE D'AVANCE ET LES OSCILLATIONS	221
A 1.1 - Correction de la condition de glissement	221
A 1.2 - Correction de l'équation de Newton	222
Annexe A 2 - NOTES AU SUJET DE L'INTEGRALES DE LIGNE	225
A 2.1 - Remarques sur la construction de la fonction de Green	225
A 2.2 - Représentation intégrale d'une fonction et de ses dérivées	225
A 2.2.1 - Dérivée temporelle	
A 2.2.2 - Dérivées spatiales par rapport à x_1	
A 2.2.3 - Autres dérivées spatiales	
A 2.3 - Application à la fonction potentiel des vitesses	228
A 2.3.1 - Distribution de sources	
A 2.3.2 - Distribution mixte	
A 2.4 - Convergence des intégrales	229
Annexe A 3 - PROPRIETES GENERALES DES FONCTIONS EXPONENTIELLES INTEGRALES	231
A 3.1 - Fonction exponentielle intégrales $E_1(\zeta)$	231
A 3.1.1 - Définition	
A 3.1.2 - Développement en série	
A 3.1.2 - Développement asymptotique	
A 3.1.4 - Propriétés fondamentales	

A 3.2 - Fonction exponentielle intégrale modifiée $\xi_1(\zeta)$	232
A 3.2.1 - Définition	
A 3.2.2 - Développement en série	
A 3.2.3 - Propriétés fondamentales	
A 3.3 - Fonction $G_1(\zeta)$, $G_2(\zeta)$, $G_3(\zeta)$	233
A 3.3.1 - Définitions	
A 3.3.2 - Propriétés fondamentales	
A 3.4 - Application des fonctions exponentielles intégrales	234
A 3.4.1 - Expressions de I_1	
A 3.4.2 - Expression de I_2	
A 3.5 - Fonctions d'approximation	235
A 4 - RESULTATS GENERAUX DU PRINCIPE DE LA PHASE STATIONNAIRE	237
A 4.1 - Principe de la phase stationnaire (Cauchy - Lord Kelvin)	237
A 4.2 - Expression générale de l'intégrale $I(\lambda)$	238
A 5 - INTEGRATION DE LA FONCTION $\frac{1}{ MM' }$ ET DE SES DERIVEES SUR UNE FACETTE POLYGONALE PLANE	239
A 5.1 - Intégration de $\frac{1}{ MM' }$	240
A 5.2 - Intégration de $\frac{\partial}{\partial n'} \left[\frac{1}{ MM' } \right]$	240
A 5.3 - Intégration de $\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{ MM' } \right]$, $\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{ MM' } \right]$ et $\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{ MM' } \right]$	240
A 5.4 - Intégration de $\frac{\partial^2}{\partial x \partial n'} \left[\frac{1}{ MM' } \right]$	241
A 5.5 - Formules asymptotiques	241
A 6 - INTEGRATION SUR UNE FACETTE POLYGONALE PLANE, D'UNE FONCTION QUELCONQUE D'UNE VARIABLE DEFINIE COMME UNE FONCTION COMPLEXE LINEAIRE DES COORDONNEES CARTESIENNES	243
A 6.1 - Position du problème	243
A 6.2 - Calculs préliminaires	244
A 6.3 - Calcul de l'intégrale I_S	245
A 6.4 - Calcul de l'intégrale I_D	246
A 6.5 - Extension du domaine de validité des formules	248

BIBLIOGRAPHIE

249

B 1 - Hydrodynamique

249

B 2 - Mathématiques

253

B 3 - Analyse numérique

2S4

PRÉSENTATION DE L'ÉTUDE

Durant les deux dernières décennies, l'industrie navale a connu une évolution très rapide, tant en ce qui concerne les performances des engins que leur diversité. Certains navires sont destinés à des transports de plus en plus rapides, tandis que les pétroliers atteignent des tailles gigantesques. La recherche océanique et l'exploitation des océans sont conditionnés par la construction d'usines flottantes et de plates-formes off shore.

Les études sur modèles physiques permettent de prédire le comportement à la mer des structures, mais leur usage reste limité pour plusieurs raisons.

- D'une part, les essais systématiques en bassin sont longs et onéreux à cause du grand nombre des paramètres à prendre en compte : différents appendices pour une même carène, cas de chargement, nombre de Froude, période, cambrure et incidence de la houle, profondeur du milieu fluide...
- D'autre part, les résultats ainsi obtenus sont parfois entachés d'erreurs dues aux effets de parois et sont sujets aux effets d'échelles, ce qui rend délicates leur interprétation et leur extrapolation au réel.

Dès lors, les utilisations conjointes de modèles physiques et numériques présentent un intérêt indéniable, permettant de procéder à un rétrécissement du champ d'investigation expérimental et à une confrontation des résultats acquis avec des moyens différents.

Le premier modèle numérique de diffraction-radiation a été réalisé à partir de la méthode des tranches due à Korvin-Kroukowsky, il y a de cela une vingtaine d'années. Si cette méthode est bien maîtrisée dans le cas d'un flotteur au point fixe, il n'en est pas de même lorsque le solide est animé d'une vitesse de route ; la multitude des théories qui conduisent à des résul-

tats sensiblement différents, le montre bien. Ce type de modèle possède deux limites qui sont dues l'une à la forme des flotteurs (allongés ou élancés), et l'autre à la vitesse (petits nombres de Froude).

L'élaboration de modèles capables de prendre en compte plus fidèlement les phénomènes tridimensionnels s'est avérée nécessaire pour pallier ces deux inconvénients. Le premier modèle numérique tridimensionnel concernant un flotteur au point fixe a été réalisé par J.C. LEBRETON et A. MARGNAC /HY-25/ en 1968. En 1977, M.S. CHANG /HY-8/ a présenté le premier programme de calcul fondé sur une méthode tridimensionnelle, mettant en oeuvre une distribution de singularités du type source, pour aborder le problème de la diffraction-radiation avec vitesse de route, lorsque la profondeur est illimitée.

Nous proposons dans ce mémoire deux méthodes de singularités (distribution mixte et distribution de sources) pour calculer les mouvements d'un flotteur indéformable animé d'une vitesse de route constante et sollicité par une houle incidente sinusoïdale dans les deux cas d'une profondeur illimitée et d'une profondeur finie.

Les difficultés liées à la modélisation des phénomènes physiques nous ont contraints à conserver certaines hypothèses simplificatrices utilisées dans les travaux antérieurs et dont la plus restrictive est, sans doute, la linéarité.

En ce qui concerne l'abord mathématique du problème, nous avons choisi une méthode heuristique sans nous poser a priori la question de l'existence et de l'unicité d'une solution, ni celle de l'espace fonctionnel dans lequel elle serait définie.

Pour des raisons de clarté, nous avons reporté en annexe les calculs et les résultats qui ont été tirés du cours de P. GUEVEL et qui constitueraient des insertions trop longues dans le texte du mémoire.



PRESENTATION OF THE STUDY

During the last two decades, the naval industry has rapidly developed. Ships are constructed for more and more rapid transport and tankers are very large. Oceanic research and ocean exploitation are linked to the construction of floating factories and off shore platforms.

Studies on physical models allow the prediction of seakeeping of structures, but they remain limited for two main reasons.

(i) Systematic testing in a wave tank requires a good deal of time and is expensive owing to the great number of parameters : different appendices for the same hull, cases of loads, Froude numbers, frequencies, steepness and incidences of the waves, depths of the fluid...

(ii) Wall effects and scale effects sometimes influence the results. Their interpretation and their extrapolation are therefore very difficult.

Thus, the joint use of physical and numerical models enables us to restrict the number of experiments and to compare different results.

Numerical models based on the strip method lead to very good results for a body at zero Froude number. Nevertheless poor results follow from its different versions for a body with forward speed. These models are limited firstly by the shape of the hulls (slender body) and secondly by the Froude number values (low speed).

Therefore, it is very important to make 3D numerical models to compute ship motions with forward speed. The first of this type of model was presented in 1977 by M.S. CHANG. It is based on the singularities method of sources distribution. We propose in this paper two 3D singularities models, the first being based on a sources and doublets distribution (mixed distribution) and the second on a sources distribution, for the two cases of unlimited depth and finite depth.



Chapitre 1

HYPOTHÈSES ET DÉFINITIONS

Nous exposerons dans les paragraphes suivants les cinq hypothèses qui sont nécessaires à la formulation de notre modèle mathématique, ainsi que les raisons qui ont motivé notre choix de représentation de la houle incidente.

1.1 - HYPOTHESE DE CONTINUITÉ (H-1)

L'hydrodynamique classique est fondée sur l'hypothèse de continuité qui consiste à assimiler le fluide à un milieu continu. Seuls les caractères macroscopiques des phénomènes sont étudiés.

Les particules fluides considérées correspondent à un élément de volume infinitésimal par rapport au déplacement volumique du corps solide, mais infiniment grand vis-à-vis des distances intermoléculaires.

Cette hypothèse sera traduite mathématiquement par la continuité spatiale et temporelle de toutes les fonctions attachées à la description de l'état du fluide, ainsi que de leurs dérivées du premier et du deuxième ordre.

1.2 - HYPOTHESE DU FLUIDE PARFAIT ISOVOLUME (H-2)

Nous écrirons les équations de l'hydrodynamique dans le cas particulier du fluide parfait isovolume.

Les écoulements de ce fluide sont régis par les équations d'Euler.

L'utilisation de ce modèle de fluide est justifiée, a priori, puisque les écoulements que nous aurons à considérer sont à très grands nombres de Reynolds. Les forces de viscosité sont donc négligeables devant les forces d'inertie.

1.3 - HYPOTHESE DE L'ÉCOULEMENT A POTENTIEL DES VITESSES (H-3)

L'**écoulement** sera supposé exempt de toute **turbulence**. Le fluide étant **parfait**, barotrope et en mouvement dans un champ de force **volumique** dérivant d'un potentiel scalaire $\mathcal{J}(M)$ (**champ** de pesanteur **terrestre**), il existe à tout instant un potentiel des **accélérations**. S'il existe à un instant donné un potentiel des vitesses, le **théorème** de **Lagrange** assurera sa **pérennité**.

L'utilisation d'un modèle de houle incidente irrotationnelle justifiera l'hypothèse de l'**écoulement** à potentiel des vitesses.

1.4 - HYPOTHESE CONCERNANT LA SURFACE LIBRE (H-4)

La surface libre est **supposée s'étendre jusqu'à l'infini**, les tensions superficielles sont **négligeables** devant les forces **d'inertie** (écoulements à grands nombres de **Weber**), et la pression est constante au-dessus de la surface libre.

1.5 - HYPOTHESE DE LINEARITE (H-5)

Nous supposerons que l'**amplitude** et la cambrure de la houle incidente **d'une part**, et l'**amplitude** de la réponse du solide **d'autre part**, sont suffisamment faibles pour que les termes d'ordre supérieur à l'**unité** soient négligeables (en particulier, les carrés des vitesses et des accélérations absolues des particules fluides) et qu'il soit possible d'afficher la condition de surface libre sur le plan moyen de la surface libre et la condition de glissement sur la position moyenne de la carène.

Cette hypothèse a deux conséquences : la première concerne la détermination du potentiel des vitesses qui sera facilitée, et la seconde concerne l'**équation** de Newton dont les termes seront considérablement simplifiés.

1.6 - DEFINITION DES DIFFERENTS REPERES UTILISES

Nous considérerons trois référentiels **orthonormés** directs (fig. 1.a).

- Le repère absolu ($0 ; x, y, z$) fixe par rapport au fond ; les axes Ox et Oy sont situés dans le plan moyen de la surface libre, l'**axe** Ox est parallèle à la position moyenne de l'**axe** longitudinal du navire et orienté vers l'**avant**

de ce dernier, l'axe Oz est vertical ascendant.

- Le repère relatif $(O_0; x_0, y_0, z_0)$ lié au solide en mouvement ; les positions moyennes des axes O_0x_0 et O_0y_0 sont contenues dans le plan d'équation $z=0$ et respectivement colinéaires aux axes Ox et Oy ; l'axe O_0z_0 passe par le centre de gravité du corps.

- Le repère relatif moyen $(O_1; x_1, y_1, z_1)$ défini par la position moyenne du repère relatif. Il est en translation, rectiligne uniforme à la vitesse U suivant l'axe Ox par rapport au repère absolu.

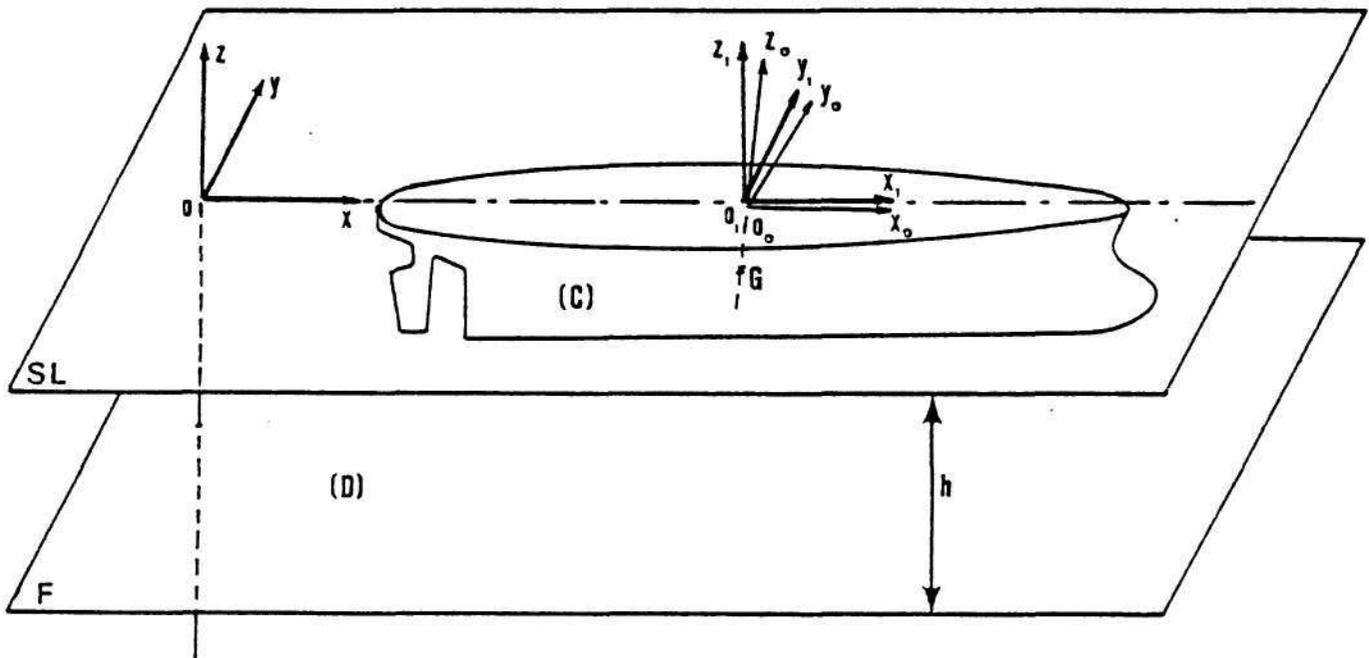


figure 1.a

La transformation qui permet de passer du repère mobile moyen au repère fixe s'écrit :

$$(1.1) \quad \begin{cases} x = x_1 + Ut \\ y = y_1 \\ z = z_1 \end{cases}$$

Nous désignerons par \vec{W} la vitesse du point O_0 dans le repère mobile

moyen, et par $\vec{\Omega}$ le vecteur rotation instantanée du solide⁽¹⁾. Ces deux vecteurs ne dépendent que du temps et caractérisent les oscillations du corps par rapport aux axes relatifs moyens. Ils constituent les inconnues de notre problème,

1.7 - MODELE DE HOULE INCIDENTE

La linéarisation du problème à traiter rend possible la superposition de différents états. Nous pourrions, en particulier, déterminer la réponse du solide soumis à l'action d'une houle quelconque à partir du spectre des réponses du corps soumis à l'excitation d'une houle sinusoïdale plane en décomposant la houle incidente en série de Fourier.

Nous utiliserons donc le modèle de houle d'Airy, modèle qui présente toutes les caractéristiques requises : houle linéaire sinusoïdale plane et irrotationnelle définie par son amplitude a , sa pulsation σ et son incidence β (fig. 1.b).

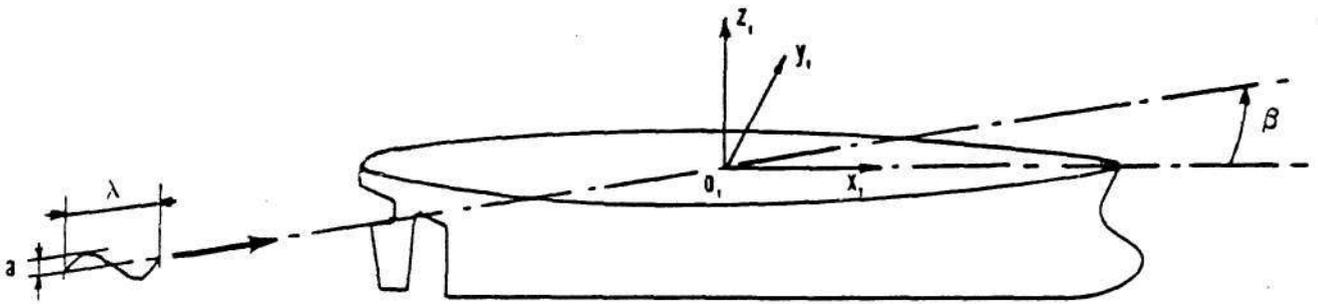


figure 1.b

La fonction potentiel des vitesses de la houle d'Airy s'écrit dans le cas d'une profondeur illimitée :

$$(1.2) \quad \phi_T(M;t) = -\frac{a g}{\sigma} e^{k_0 z} \cos[k_0(x \cos \beta + y \sin \beta) - \sigma t]$$

expression dans laquelle k_0 désigne le nombre d'onde défini par la relation (1.3), et g la constante universelle de gravité terrestre.

(1) En théorie linéaire, il est possible de définir également le vecteur elongation angulaire $\vec{\theta}$ tel que $\vec{\Omega} = \dot{\vec{\theta}}$.

$$(1.3) \quad k_0 = \frac{\sigma^2}{g}$$

Dans le cas d'une profondeur finie h, la fonction potentiel des vitesses de la houle d'Airy devient :

$$(1.4) \quad \phi_1(M;t) = -\frac{2g}{\sigma} \frac{\text{ch } m_0(z+h)}{\text{ch } m_0 h} \cos[m_0(x \cos \beta + y \sin \beta) - \sigma t]$$

où m_0 est la solution de l'équation suivante :

$$(1.5) \quad m_0 \text{th } m_0 h = k_0$$

1.3 - PRINCIPALES NOTATIONS

$(0 ; x, y, z)$	repère absolu
$(0_0 ; x_0, y_0, z_0)$	repère relatif
$(0_1 ; x_1, y_1, z_1)$	repère relatif moyen
$\vec{i}_x, \vec{i}_y, \vec{i}_z$	vecteurs unitaires du repère absolu
$\vec{i}_{x_0}, \vec{i}_{y_0}, \vec{i}_{z_0}$	vecteurs unitaires du repère relatif
$\vec{i}_{x_1}, \vec{i}_{y_1}, \vec{i}_{z_1}$	vecteurs unitaires du repère relatif moyen
t	temps
$\frac{\partial}{\partial t}$	dérivation par rapport au temps dans le repère absolu
$\frac{\partial}{\partial t_1}$	dérivation par rapport au temps dans le repère relatif moyen
$\vec{U} = U \vec{i}_x$	vitesse de route du solide
\vec{W}	vitesse du point 0_0 dans le repère relatif moyen
$\vec{\Omega}$	vecteur rotation instantanée du solide
SL	surface libre linéarisée
SF	surface de flottaison

F	fond
A	amplitude de la houle
σ	pulsation de la houle incidente dans le repère absolu
ω	pulsation apparente de la houle incidente dans le repère mobile moyen
k_o, m_o	nombre d'onde de la houle incidente
h	profondeur du fluide
g	accélération de la pesanteur terrestre
ρ	masse volumique du fluide
p	pression au sein du fluide
ϕ	potentiel des vitesses total
ϕ_I	potentiel des vitesses de la houle incidente
ϕ_P	potentiel des vitesses de perturbation
ϕ_D	potentiel des vitesses de diffraction
ϕ_j	potentiel des vitesses de radiation unitaire dans le mode j
\vec{n}	normale unitaire à la frontière du fluide dirigée vers le domaine fluide
N_i	normale généralisée
η_i	mouvement généralisé
F_i	torseur généralisé
M_{ij}	matrice masse-inertie
MA_{ij}	matrice des masses d'eau ajoutée
TA_{ij}	matrice des termes d'amortissement
C_{ij}	matrice des termes hydrostatiques



Chapitre 2

MISE EN ÉQUATION DU PROBLÈME HYDRODYNAMIQUE

Nous nous proposons ici de formuler le problème aux limites en établissant les équations qui régissent l'écoulement hydrodynamique.

2.1 - REPRESENTATION ANALYTIQUE DU MOUVEMENT D'UN MILIEU FLUIDE

2.1.1 - Variables d'Euler

La méthode la plus fructueuse, en ce qui concerne l'étude des écoulements hydrodynamiques, consiste à faire apparaître les variations des différentes grandeurs attachées à chaque particule au cours de son déplacement.

La description complète de l'état du fluide parfait isovolume ne nécessite que la connaissance de la distribution des vitesses en chaque point M et à tout instant t . L'écoulement étant irrotationnel, il sera totalement déterminé dès que la fonction potentiel des vitesses sera connue.

Les coordonnées cartésiennes du point M dans un repère lié à l'observateur, et le temps t , constituent les quatre variables indépendantes d'Euler.

2.1.2 - Dérivée particulaire

La variation temporelle d'une grandeur scalaire, vectorielle ou tensorielle $G(M;t)$ attachée à une particule fluide qu'on suit dans son déplacement par rapport au repère absolu s'écrit :

$$(2.1) \quad \frac{D}{Dt} G(M;t) = \frac{\partial}{\partial t} G(M;t) + \vec{V}(M;t) \cdot \text{grad} G(M;t)$$

où \vec{V} désigne la vitesse absolue du fluide. Cette dérivée est appelée dérivée particulaire.

2.2 - EQUATION DE CONSERVATION DE LA MASSE

Soit τ un volume élémentaire de fluide limité par la surface fermée S dont la normale extérieure sera notée \vec{n} .

Le flux de masse traversant S doit compenser la variation par unité de temps de la masse volumique du fluide inclus dans τ , et éventuellement l'apport de masse dû à des singularités de débit volumique q situées dans le volume élémentaire.

Le bilan massique se réduit, après transformation de l'intégrale de surface en une intégrale de volume et l'identification des intégrands, à l'équation (2.2).

$$(2.2) \quad \operatorname{div} [\rho(M;t) \cdot \vec{V}(M;t)] + \frac{\partial}{\partial t} \rho(M;t) = \sum \rho(M;t) q(M;t)$$

En absence de singularités au sein du fluide, et compte tenu de l'hypothèse du fluide parfait isovolume, cette équation se réduit à :

$$(2.3) \quad \operatorname{div} \vec{V}(M;t) = 0$$

Puisque l'existence d'un potentiel des vitesses permet d'écrire :

$$(2.4) \quad \vec{V}(M;t) = \operatorname{grad} \phi(M;t)$$

L'équation de la conservation de la masse se traduit par l'équation de Laplace :

$$(2.5) \quad \Delta \phi(M;t) = 0$$

2.3 - EQUATION DE LAGRANGE

Ecrivons qu'il y a à chaque instant égalité entre la variation de la quantité de mouvement d'une particule fluide élémentaire de volume τ , et la somme des forces extérieures qui lui sont appliquées (forces volumiques et forces surfaciques). Nous obtenons, compte tenu de l'hypothèse du fluide parfait isovolume, l'équation d'Euler :

$$(2.6) \quad \frac{d}{dt} \vec{V}(M;t) = \text{grad} \mathcal{F}(M) - \frac{1}{\rho} \text{grad} p(M;t)$$

expression dans laquelle $\mathcal{F}(M)$ désigne le potentiel des forces de pesanteur ($\mathcal{F}(M) = -gz$).

Remplaçons le premier membre de l'équation (2.6) par son expression tirée de la formule d'Helmoltz :

$$(2.7) \quad \frac{d}{dt} \vec{V}(M;t) = \frac{\partial}{\partial t} \vec{V}(M;t) + \frac{1}{2} \text{grad} V^2(M;t) + \text{rot} \vec{V}(M;t) \wedge \vec{V}(M;t)$$

en ne retenant que les termes compatibles avec l'hypothèse de l'écoulement irrotationnel. Il vient :

$$(2.8) \quad \frac{\partial}{\partial t} \vec{V}(M;t) + \frac{1}{2} \text{grad} V^2(M;t) - \text{grad} \mathcal{F}(M) + \frac{1}{\rho} \text{grad} p(M;t) = 0$$

La permutation des dérivations spatiales et temporelle du premier terme et le remplacement de $\mathcal{F}(M)$ par son expression, puis l'intégration par rapport aux variables d'espace conduisent à l'équation de Lagrange :

$$(2.9) \quad \frac{\partial}{\partial t} \phi(M;t) + \frac{1}{2} V^2(M;t) + gz + \frac{1}{\rho} p(M;t) = 0$$

Il convient de noter que nous devrions avoir une fonction du temps dans le second membre, mais que le potentiel des vitesses n'étant défini qu'à une fonction temporelle additive près, celle-ci peut être choisie identiquement nulle.

2.4 - CONDITIONS AUX LIMITES

D'après le résultat du paragraphe 2.2, la fonction potentiel des vitesses satisfait en tout point du domaine fluide et à chaque instant l'équation de Laplace. Il nous reste donc, pour définir complètement le problème à résoudre, à exprimer les conditions aux limites.

2.4.1 - Condition sur les frontières indéformables

La composante normale de la vitesse relative du fluide le long d'une frontière solide indéformable et étanche doit être nulle. Il s'ensuit

que la composante normale de la vitesse absolue du fluide est égale, en chaque point de la frontière et à tout instant, à la composante normale de la vitesse d'entraînement du solide :

$$(2.10) \quad \frac{\partial \phi(M;t)}{\partial n} = \vec{V}_f(M;t) \cdot \vec{n}$$

2.4.1.1 - Condition de glissement sur le fond

Le fond, supposé plan et horizontal, a pour équation $z = -h$ et sa normale est portée par l'axe Oz. La vitesse d'entraînement du fond étant nulle, l'équation (2.10) devient :

$$(2.11) \quad \frac{\partial \phi(M;t)}{\partial z} = 0 \quad \Big|_{z=-h}$$

2.4.1.2 - Condition de glissement sur la carène

Dans le repère absolu, la vitesse de chaque point M s'identifie avec la vitesse d'entraînement $\vec{U} + \vec{W} + \vec{\Omega} \wedge \vec{O_0M}$. Il vient alors :

$$(2.12) \quad \frac{\partial \phi(M;t)}{\partial n} = [\vec{U} + \vec{W} + \vec{\Omega} \wedge \vec{O_0M}] \cdot \vec{n} \quad \Big|_{\text{carène}}$$

2.4.2 - Condition de surface libre

D'après l'hypothèse (H-4), nous pouvons écrire que la dérivée particulaire de la pression est nulle en tout point de la surface libre qui est la surface fluide d'équation $z = f(x,y;t)$.

$$(2.13) \quad \frac{\partial p(M;t)}{\partial t} + \vec{V}(M;t) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} p(M;t) = 0 \quad \Big|_{z=f(x,y;t)}$$

En remplaçant, dans cette formule, $p(M;t)$ par son expression issue de l'équation de Lagrange (2.9), nous obtenons l'équation de surface libre qui s'écrit :

$$(2.14) \quad \frac{\partial^2 \phi(M;t)}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi(M;t)}{\partial z} + \frac{\partial Y(M;t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{V}(M;t) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} V^2(M;t) = 0 \quad \Big|_{z=f(x,y;t)}$$

la fonction $f(x,y;t)$ est alors définie implicitement par l'équation (2.15) :

$$(2.15) \quad f(x, y; t) = \frac{1}{\rho g} p(M; t) - \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \phi(M; t) - \frac{1}{2g} V^2(M; t) \quad \Big|_{z=f(x, y; t)}$$

L'hypothèse (H-5) nous permet de linéariser ces deux équations et de les afficher sur la projection SL de la surface libre sur le plan d'équation $z = 0$. Nous écrirons simplement :

$$(2.16) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(M; t) + g \frac{\partial}{\partial z} \phi(M; t) = 0 \quad \Big|_{SL}$$

$$(2.17) \quad f(x, y; t) = -\frac{1}{\rho g} p(M; t) - \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \phi(M; t) \quad \Big|_{SL}$$

Nous remarquons que toutes ces formules sont écrites dans le repère absolu, et qu'il suffit pour les écrire dans le repère mobile moyen de substituer l'opérateur différentiel $\frac{\partial}{\partial \tau_1} - U \frac{\partial}{\partial x_1}$ à l'opérateur $\frac{\partial}{\partial t}$.

2.4.3 - Comportement à l'infini du potentiel des vitesses

Soit $\phi_p(M; t)$ le potentiel de perturbation obtenu en ôtant le potentiel de la houle incidente au potentiel des vitesses total. Quand le point M s'éloigne indéfiniment du corps perturbateur, $\phi_p(M; t)$ doit être continue et tendre vers zéro ainsi que ses dérivées spatiales du premier et du deuxième ordre. Le seul potentiel des vitesses à l'infini est donc celui de la houle incidente. Nous dirons que la fonction potentiel des vitesses de perturbation est régulière à l'infini, et nous écrirons pour M restant dans le domaine fluide :

$$(2.18) \quad \lim_{|O, M| \rightarrow \infty} [\phi(M; t) - \phi_I(M; t)] = 0$$

Dans le cas particulier où la profondeur est illimitée, nous aurons de même :

$$(2.19) \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} [\phi(M; t) - \phi_I(M; t)] = 0$$

relation qui reste vraie pour $\phi(M; t)$ puisque $\phi_I(M; t)$ la vérifie par définition.

2.5 - FAIBLESSE DU MODELE DU FLUIDE PARFAIT - MODELE DU FLUIDE PRESQUE PARFAIT

La perte d'information inhérente à l'hypothèse du fluide parfait (H-2) introduit des solutions mathématiques parasites liées au caractère non visqueux du modèle. Ces solutions qui n'ont aucun sens physique peuvent être éliminées au moyen d'une condition de radiation à l'infini souvent appelée condition de Sommerfeld.

Cette contrainte supplémentaire s'exprime simplement dans le cas du problème de la résistance de vagues en eau calme, en écrivant que le fluide n'est pas perturbé à l'infini amont, et dans le cas de la diffraction-radiation à nombre de Froude nul, en supprimant les ondes de gravité régressives générées à l'infini.

Dans le cas plus complexe de la diffraction-radiation à nombre de Froude non nul, la condition de radiation à l'infini n'est pas aussi évidente en raison de la diversité des systèmes d'ondes de gravité qui apparaissent. Nous avons donc préféré ne pas introduire de solution étrangère au phénomène étudié, en conservant qualitativement le caractère dissipatif du fluide au moyen d'une constante de temps ϵ que nous ferons tendre vers zéro après avoir déterminé la solution cherchée. Ce procédé classique est un artifice mathématique qui prend en compte le caractère progressif de la mise en mouvement du fluide physique et de la propension de ce dernier à évoluer vers un état d'équilibre statique lorsque toutes les perturbations ont cessé.

A cet effet, nous introduirons dans l'équation d'Euler (2.6) un terme dissipatif proportionnel à la constante de temps ϵ et à la vitesse au sein du fluide. Le modèle de fluide doté du seul caractère qualitatif de la dissipation a reçu le nom de fluide presque parfait. Son originalité consiste à ne plus faire apparaître le modèle du fluide parfait comme indifférent à toute viscosité, mais comme la limite d'un fluide dissipatif.

L'utilisation du fluide presque parfait n'a jamais posé de problème de légitimité dans la mesure où les résultats obtenus par son intermédiaire coïncidaient avec ceux fournis par le modèle du fluide parfait et une condition de radiation à l'infini. Une alternative se présente alors à nous : donner a priori une justification à l'emploi du modèle du fluide presque parfait, ou bien montrer a posteriori que le tri réalisé par l'introduction de la constante de temps est compatible avec un critère physique qui représentera la condition cherchée. Nous avons développé notre investigation dans ces deux voies.

Nous montrerons dans le septième chapitre que la condition de radiation à l'infini s'exprime très simplement dans le cas général, et que les deux conditions pour les problèmes de Neumann-Kelvin et de la diffraction-radiation à nombre de Froude nul en sont des cas particuliers.

Avant d'aborder la justification a priori, nous établirons les équations qui régissent les écoulements hydrodynamiques pour le modèle du fluide presque parfait.

2.6 - CONDITION DE SURFACE LIBRE POUR LE FLUIDE PRESQUE PARFAIT

L'équation de Laplace et les conditions aux limites précédentes restent valables à l'exception de la condition de surface libre qui doit être modifiée.

Un raisonnement analogue à celui que nous avons développé au paragraphe 2.4.2, mais fondé sur l'équation de Lagrange (2.21) issue de l'équation d'Euler modifiée, qui s'écrit :

$$(2.20) \quad \frac{d}{dt} \bar{V}(M;t) = \overline{\text{grad}} \bar{\Phi}(M) - \frac{1}{\rho} \overline{\text{grad}} p(M;t) - 2\varepsilon \bar{V}(M;t)$$

$$(2.21) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(M;t) + \frac{1}{2} V^2(M;t) + g z + \frac{1}{\rho} p(M;t) + 2\varepsilon \phi(M;t) = 0$$

nous permet d'obtenir la nouvelle condition de surface libre linéarisée :

$$(2.22) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(M;t) + 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \phi(M;t) + g \frac{\partial}{\partial z} \phi(M;t) = 0 \Big|_{SL}$$

2.7 - JUSTIFICATIONS DE L'EMPLOI DU MODELE DU FLUIDE PRESQUE PARFAIT

Quelle que soit la justification qu'on veuille donner à l'utilisation du fluide presque parfait, elle ne peut que reposer sur des arguments d'origine physique puisque la condition de radiation à l'infini ne fait que traduire la conformité de la solution obtenue à la réalité physique par élimination des solutions aberrantes.

Deux possibilités s'offrent à nous. La première consiste⁽¹⁾ à montrer l'équivalence des formulations, en ce qui concerne le régime établi, obtenues au moyen du fluide presque parfait d'une part, et du fluide parfait modélisant une mise en mouvement progressive et sans dépassement d'autre part ; elle a été développée par P. GUEVEL /HY-14/, et met en évidence la nature de constante de temps de ϵ . Le seconde est liée à l'analyse des transitoires attachés aux régimes établis pour les modèles du fluide presque parfait ($\epsilon > 0$), du fluide parfait ($\epsilon = 0$) et du fluide "catastrophique" ($\epsilon < 0$) ; elle présente la particularité de mettre en évidence le mécanisme de la faiblesse du fluide parfait.

Cette deuxième méthode montre que, contrairement aux problèmes régis par des équations différentielles linéaires du deuxième ordre à coefficients constants pour lesquelles le régime établi ne dépend ni de l'existence ni du signe de ϵ et donc pas du sens physique du transitoire, les régimes établis correspondant aux phénomènes régis par des équations différentielles linéaires du deuxième ordre aux dérivées partielles sont intimement liés à l'existence et au signe de la constante de temps et donc au sens physique du transitoire. En effet, le traitement des équations aux dérivées partielles se ramène à celui des équations ordinaires au moyen d'une transformation intégrale, et si la présence du terme ϵ ne change rien à la solution dans l'espace transformé, elle est fondamentale lors de la transformation inverse puisqu'elle permet alors de situer la position des pôles par rapport à l'axe réel, ce qui conditionne le résultat d'une intégration par la méthode des résidus. Il résulte de cela que les trois solutions établies ($\epsilon > 0$, $\epsilon = 0$, $\epsilon < 0$) ne sont pas linéairement indépendantes ; celle obtenue au moyen du fluide parfait est la demi somme des solutions correspondant aux modèles des fluides presque parfait et catastrophique . Les transitoires permettent alors de trancher puisque celui du fluide presque parfait est évanescent, celui du fluide parfait persiste éternellement mais demeure fini, tandis que celui du fluide catastrophique croît indéfiniment et ne saurait donc représenter un phénomène physique amorti.

Il est donc clair que dans l'étude des phénomènes qui se manifestent en hydrodynamique linéaire, une attention particulière doit être apportée a priori au sens physique du transitoire ou a posteriori au sens physique des solutions obtenues.

(1) Une variante de cette méthode consiste à établir la fonction de Green du problème par ces deux méthodes et de constater l'équivalence des deux formulations.

2.8 - RECAPITULATION DU PROBLEME AUX LIMITES

La résolution du problème de la diffraction-radiation à nombre de Froude non nul se réduit, moyennant les hypothèses que nous avons consenties, à la recherche d'une fonction potentiel des vitesses, solution d'un problème aux limites qui peut être indifféremment exprimé dans le repère fixe ou dans le repère mobile moyen.

2.8.1 - Potentiel absolu exprimé dans le repère fixe

$$(2.23) \quad \left[\begin{array}{ll} \Delta \phi(M;t) = 0 & \forall M \in D \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(M;t) + 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \phi(M;t) + \sigma \frac{\partial}{\partial z} \phi(M;t) = 0 & \forall M \in SL \\ \lim_{|O,M| \rightarrow \infty} [\phi(M;t) - \phi_I(M;t)] = 0 & \forall M \in D \\ \frac{\partial}{\partial z} \phi(M;t) = 0 & \forall M \in F \\ \frac{\partial}{\partial n} \phi(M;t) = \vec{V}_E(M;t) \cdot \vec{n} & \forall M \in C \end{array} \right.$$

Dans le cas où la profondeur du fluide est illimitée, la quatrième équation est supprimée, la troisième condition étant alors suffisante.

2.8.2 - Potentiel absolu exprimé dans le repère mobile moyen

$$(2.24) \quad \left[\begin{array}{ll} \Delta \phi(M;t) = 0 & \forall M \in D \\ \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \phi(M;t) - 2U \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial t_1} \phi(M;t) + U^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \phi(M;t) \\ + 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} \phi(M;t) - 2U\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_1} \phi(M;t) + \sigma \frac{\partial}{\partial z_1} \phi(M;t) = 0 & \forall M \in SL \\ \lim_{|O,M| \rightarrow \infty} [\phi(M;t) - \phi_I(M;t)] = 0 & \forall M \in D \\ \frac{\partial}{\partial z_1} \phi(M;t) = 0 & \forall M \in F \\ \frac{\partial}{\partial n} \phi(M;t) = \vec{V}_E(M;t) \cdot \vec{n} & \forall M \in C \end{array} \right.$$

Dans le cas d'une profondeur illimitée, la quatrième équation est supprimée, la troisième condition étant alors suffisante.

2.9 - DECOMPOSITION DU PROBLEME DE LA DIFFRACTION-RADIATION

Le potentiel des vitesses de la houle incidente vérifie, par construction, toutes les conditions précédentes hormis la condition de glissement sur la carène. Le potentiel de perturbation doit donc satisfaire les quatre premières conditions ainsi que (2.25).

$$(2.25) \quad \frac{\partial}{\partial n} \phi_T(M;t) = \vec{U} \cdot \vec{n} - \frac{\partial}{\partial n} \phi_I(M;t) + [\vec{W} + \vec{\Omega} \wedge \vec{O}, M] \cdot \vec{n}$$

L'hypothèse de linéarité nous permet alors de décomposer le potentiel de perturbation en une somme de plusieurs termes par application du principe de superposition des divers états⁽¹⁾.

Le terme $\vec{U} \cdot \vec{n}$ caractérise le problème de Neumann-Kelvin /HY-10/ dont le potentiel des vitesses $\phi_W(M;t)$ engendre des efforts constants qui modifient l'assiette et l'enfoncement moyen par rapport à l'état d'équilibre statique, mais n'induisent pas de mouvement autour de la position moyenne. Le problème de Neumann-Kelvin et celui de la diffraction-radiation sont découplés.

Le terme $-\frac{\partial}{\partial n} \phi_I(M;t)$ caractérise le problème de la diffraction dont le potentiel des vitesses $\phi_D(M;t)$ s'ajoute au potentiel de la houle incidente $\phi_I(M;t)$ pour engendrer des efforts d'excitation sinusoidaux à la pulsation de rencontre ω . En théorie linéaire, ces efforts dépendent de la position moyenne du solide, mais pas des oscillations autour de cette position.

Ainsi excité à la pulsation ω , le solide indéformable ne peut qu'osciller sinusoidalement à la même pulsation. Les six amplitudes et les six phases de ces oscillations (dans les six modes) constituent les douze inconnues qui ne seront déterminées qu'en résolvant l'équation de Newton. Une difficulté apparaît ici, puisque la connaissance des vitesses d'entraînement dans chacun des six modes est nécessaire pour déterminer le torseur des efforts

(1) La condition de glissement (2.25) étant appliquée sur la position moyenne de la carène, et non sur sa position réelle à chaque instant, il n'apparaît ici aucun couplage entre U et les oscillations. Des termes correctifs peuvent être introduits en remplaçant \vec{n} par $\vec{n} + \vec{\theta} \wedge \vec{n}$ ainsi que nous l'avons développé dans la première annexe.

hydrodynamiques. Cependant, l'hypothèse de linéarité nous permet d'écrire le torseur des efforts de radiation sous la forme d'une fonction linéaire des douze inconnues, et donc de résoudre l'équation de Newton en ne traitant au préalable que les six problèmes de radiation pour des amplitudes unitaires et des phases nulles. Le caractère sinusoïdal du problème permettant d'en déduire ensuite les six solutions pour des amplitudes unitaires et des phases en quadrature avec les précédentes, ce qui nous donnera bien douze équations.

Nous sommes donc conduits à résoudre sept problèmes relatifs à la diffraction d'une part, et à chacun des six modes de radiation pour des amplitudes unitaires et des phases nulles d'autre part.

2.10 - POSITION DU PROBLEME DE LA DIFFRACTION

La résolution du problème de la diffraction se réduit à la recherche d'une fonction potentiel des vitesses $\phi_D(M;t)$ qui vérifie les conditions suivantes :

$$(2.26) \quad \left[\begin{array}{ll} \Delta \phi_D(M;t) = 0 & \forall M \in D \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi_D(M;t) + 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \phi_D(M;t) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial z} \phi_D(M;t) = 0 & \forall M \in SL \\ \lim_{|O,M| \rightarrow \infty} \phi_D(M;t) = 0 & \forall M \in D \\ \frac{\partial}{\partial z} \phi_D(M;t) = 0 & \forall M \in F \\ \frac{\partial}{\partial n} \phi_D(M;t) = -\frac{\partial}{\partial n} \phi_I(M;t) & \forall M \in C \end{array} \right.$$

2.11 - POSITION DES PROBLEMES DE RADIATION

La résolution du problème de radiation dans le mode j ($j \in [1,6]$) se réduit à la recherche d'une fonction potentiel des vitesses $\phi_j(M;t)$ pour un mouvement forcé dont la vitesse a une amplitude unitaire et une phase nulle, telle que :

$$(2.27) \quad \left\{ \begin{array}{ll}
 \Delta \phi_j(M; t) = 0 & \forall M \in \mathcal{D} \\
 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi_j(M; t) + 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \phi_j(M; t) + \sigma \frac{\partial}{\partial z} \phi_j(M; t) = 0 & \forall M \in SL \\
 \lim_{|x, y| \rightarrow \infty} \phi_j(M; t) = 0 & \forall M \in \mathcal{D} \\
 \frac{\partial}{\partial z} \phi_j(M; t) = 0 & \forall M \in F \\
 \frac{\partial}{\partial n} \phi_j(M; t) = \vec{V}_{E_j}(M; t) \cdot \vec{n} & \forall M \in C
 \end{array} \right.$$

avec :

$$(2.28) \quad \left\{ \begin{array}{ll}
 \vec{V}_{E_j}(M; t) = \vec{i}_j \cos \omega t & j \in [1, 3] \\
 \vec{V}_{E_j}(M; t) = (\vec{i}_{j-3} \wedge \vec{O}_j M) \cos \omega t & j \in [4, 6]
 \end{array} \right.$$



Chapitre 3

MISE EN ÉQUATION DU PROBLÈME MÉCANIQUE

Nous nous proposons ici de déterminer les différents termes intervenant dans l'équation de Newton qui gouverne le comportement oscillatoire d'un flotteur.

3.1 - APPLICATION DU PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE

Le principe fondamental de la mécanique newtonienne stipule l'équivalence, à chaque instant, entre le torseur des forces d'inertie et le torseur des efforts extérieurs appliqués au système considéré.

Ce dernier est la somme de deux termes dont l'un traduit les efforts de pression exercés par le fluide sur la carène, et l'autre les forces de gravité.

Nous analyserons, dans les paragraphes qui suivent, les différents éléments qui composent ces torseurs.

3.2 - TORSEUR DES EFFORTS D'INERTIE

La vitesse $\vec{v}(P;t)$ et l'accélération $\vec{\gamma}(P;t)$ caractérisant les oscillations du corps s'écrivent en chaque point P du solide :

$$(3.1) \quad \vec{v}(P;t) = \vec{W} + \vec{\Omega} \wedge \vec{O}_0P$$

$$(3.2) \quad \vec{\gamma}(P;t) = \dot{\vec{W}} + \dot{\vec{\Omega}} \wedge \vec{O}_0P + \vec{\Omega} \wedge \dot{\vec{O}}_0P$$

Les points O_0 et P étant liés au mobile, la dérivée temporelle du vecteur \vec{O}_0P s'écrit :

$$(3.3) \quad \dot{\vec{O}}_0\vec{P} = \check{\vec{\Omega}} \wedge \vec{O}_0\vec{P}$$

L'application du double produit vectoriel permet de transformer l'expression (3.2) qui devient :

$$(3.4) \quad \vec{\Upsilon}(P;t) = \dot{\vec{W}} + \check{\vec{\Omega}} \wedge \vec{O}_0\vec{P} + \check{\vec{\Omega}} (\check{\vec{\Omega}} \cdot \vec{O}_0\vec{P}) - \Omega^2 \vec{O}_0\vec{P}$$

Le torseur des efforts d'inertie défini par les relations (3.5) et (3.6) peut donc être exprimé en fonction des vecteurs \vec{W} , $\vec{\Omega}$ et de leurs dérivées temporelles.

$$(3.5) \quad \vec{F}(t) = \iiint \vec{\Upsilon}(P;t) dm$$

$$(3.6) \quad \vec{M}(t) = \iiint \vec{O}_0\vec{P} \wedge \vec{\Upsilon}(P;t) dm$$

3.2.1 - Expression de la résultante

En remplaçant dans (3.5) $\vec{\Upsilon}(P;t)$ par son expression tirée de (3.2) et en tenant compte de l'égalité (3.3), il vient après intégration :

$$(3.7) \quad \vec{F}(t) = m[\dot{\vec{W}} + \check{\vec{\Omega}} \wedge \vec{O}_0\vec{G} + \check{\vec{\Omega}} \wedge (\check{\vec{\Omega}} \wedge \vec{O}_0\vec{G})]$$

où m désigne la masse du solide et G son centre de gravité.

3.2.2 - Expression du moment en O_0

Remplaçons dans (3.6) $\vec{\Upsilon}(P;t)$ par son expression obtenue en (3.4) et développons en fonction des coordonnées du point courant P , il vient :

$$(3.8) \quad \vec{M}(t) = m[\vec{O}_0\vec{G} \wedge \dot{\vec{W}}] + \check{\vec{\Omega}} \iiint [x_i^2 + y_i^2 + z_i^2] dm - \iiint \vec{O}_0\vec{P} [x_i \dot{\Omega}_x + y_i \dot{\Omega}_y + z_i \dot{\Omega}_z] dm \\ - \check{\vec{\Omega}} \wedge \iiint \vec{O}_0\vec{P} [x_i \Omega_x + y_i \Omega_y + z_i \Omega_z] dm$$

L'introduction, dans le second membre, du terme identiquement nul $\vec{\Omega} \wedge \iiint (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) \vec{\Omega} \, dm$ conduit à la nouvelle forme (3.9) du moment en O_0 .

$$(3.9) \quad \vec{\mathcal{M}}(t) = m[\vec{O}_0\vec{G} \wedge \vec{\dot{W}}] + \iiint [(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) \vec{\dot{\Omega}} - (x_0 \dot{\Omega}_x + y_0 \dot{\Omega}_y + z_0 \dot{\Omega}_z) \vec{O}_0\vec{P}] \, dm \\ + \vec{\Omega} \wedge \iiint [(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) \vec{\Omega} - (x_0 \Omega_x + y_0 \Omega_y + z_0 \Omega_z) \vec{O}_0\vec{P}] \, dm$$

3.2.3 - Forme matricielle du torseur d'inertie

En développant les produits vectoriels $\vec{\Omega} \wedge \vec{O}_0\vec{P}$, $\vec{\dot{\Omega}} \wedge \vec{O}_0\vec{P}$ et $\vec{O}_0\vec{G} \wedge \vec{\dot{W}}$, et en ne conservant que les termes linéaires par rapport à \vec{W} et $\vec{\dot{\Omega}}$, le torseur des efforts d'inertie s'écrit sous la forme suivante :

$$(3.10) \quad \begin{bmatrix} \vec{F}(t) \\ \vec{\mathcal{M}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{M} & \vec{T} \\ \vec{T}^t & \vec{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{W} \\ \vec{\dot{\Omega}} \end{bmatrix}$$

avec :

$$\vec{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \quad \vec{T} = \begin{bmatrix} 0 & m z_{0G} & -m y_{0G} \\ -m z_{0G} & 0 & m x_{0G} \\ m y_{0G} & -m x_{0G} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{I} = \begin{bmatrix} \iiint [y_0^2 + z_0^2] \, dm & -\iiint x_0 y_0 \, dm & -\iiint x_0 z_0 \, dm \\ -\iiint x_0 y_0 \, dm & \iiint [x_0^2 + z_0^2] \, dm & -\iiint y_0 z_0 \, dm \\ -\iiint x_0 z_0 \, dm & -\iiint y_0 z_0 \, dm & \iiint [x_0^2 + y_0^2] \, dm \end{bmatrix}$$

Les oscillations autour de la position moyenne étant de faible amplitude, et les équations du mouvement ayant été linéarisées, $\vec{\Omega}$ peut s'écrire :

$$(3.11) \quad \vec{\Omega} = \vec{\Omega}^* \cos \omega t + \vec{\Omega}^{**} \sin \omega t$$

expression dans laquelle $\vec{\Omega}^*$ et $\vec{\Omega}^{**}$ sont des vecteurs qui ne dépendent que de la pulsation et du nombre de Froude.

Il est alors possible de définir un vecteur élongation angulaire $\vec{\theta}$ par la relation suivante :

$$(3.12) \quad \dot{\vec{\theta}} = \vec{\Omega} \Leftrightarrow \vec{\Omega}^* = \omega \vec{\theta}^{**} ; \quad \vec{\Omega}^{**} = -\omega \vec{\theta}^*$$

De même, nous noterons \vec{A} le vecteur translation défini par la relation (3.13) :

$$(3.13) \quad \dot{\vec{A}} = \vec{W} \Leftrightarrow \vec{W}^* = \omega \vec{A}^{**} ; \quad \vec{W}^{**} = -\omega \vec{A}^*$$

3.3 - DECOMPOSITION DES FORCES DE PRESSION

L'équation de Lagrange (2.9) fournit une expression de la pression en chaque point du fluide (expression qui ne tient pas compte des forces de propulsion s'exerçant sur les hélices) qui s'écrit en ne tenant compte que des termes linéaires :

$$(3.14) \quad p(M;t) = -\rho g z - \rho \frac{\partial}{\partial t} \phi(M;t)$$

Le torseur des efforts qui en résulte est obtenu en intégrant la pression sur toute la carène :

$$(3.15) \quad \vec{F}(t) = \rho g \iint_C z \vec{n} \, ds + \rho \iint_C \frac{\partial}{\partial t} \phi(M;t) \vec{n} \, ds$$

$$(3.16) \quad \vec{M}(t) = \rho g \iint_C z \vec{O}_M \wedge \vec{n} \, ds + \rho \iint_C \frac{\partial}{\partial t} \phi(M;t) \vec{O}_M \wedge \vec{n} \, ds$$

Le changement de signe provient de la définition de la normale qui est extérieure à la carène.

Le torseur des forces de pression est ainsi décomposé en deux termes. Le premier ne dépend, après linéarisation de la surface libre, que de la position du flotteur, il prend en compte les efforts de rappel hydrostatique. Le second torseur dépend linéairement de la variation temporelle de la fonction potentiel des vitesses, il traduit les efforts hydrodynamiques.

3.4 - TORSEUR DES EFFORTS HYDROSTATIQUES ET DES FORCES DE GRAVITE

Nous exprimerons le torseur des efforts hydrostatiques en considérant que le flotteur a été légèrement déplacé par rapport à sa position d'équilibre statique sur un plan d'eau calme. Les éléments de réduction du torseur hydrostatique s'écrivent :

$$(3.17) \quad \vec{F}(t) = \rho g \iint_C z \vec{n} \, ds$$

$$(3.18) \quad \vec{M}(t) = \rho g \iint_C z \vec{O}_0 M \wedge \vec{n} \, ds$$

Appliquons la formule du gradient à la résultante et celle du rotationnel au moment en O_0 , en considérant l'ensemble du volume immergé τ limité par la carène C et la flottaison SF. Il vient alors, en tenant compte de l'identité $\text{rot } \vec{O}_0 \vec{P} \equiv 0$:

$$(3.19) \quad \vec{F}(t) = \rho g \vec{i}_z \iiint_{\tau} d\tau$$

$$(3.20) \quad \vec{M}(t) = -\rho g \iiint_{\tau} \vec{i}_z \wedge \vec{O}_0 \vec{P} \, d\tau$$

Il est commode, afin de ne considérer que les variations par rapport à l'équilibre statique, d'inclure les forces de gravité dans le torseur hydrostatique. Pour cela, nous désignerons par τ_0 le volume immergé dans la position d'équilibre statique, et nous écrirons le torseur des efforts de pesanteur sous la forme suivante :

$$(3.21) \quad \vec{F}(t) = - \rho g \tau_0 \vec{i}_z$$

$$(3.22) \quad \vec{M}(t) = - \rho g \tau_0 \vec{O}_0 \vec{G}_0 \wedge \vec{i}_z$$

La somme de ces deux torseurs devient, en désignant par $\Delta\tau$ la différence $\tau_0 - \tau$, par Q'_0 la position liée au flotteur du centre de carène Q_0 de l'état statique, et par Q le centre de carène dans l'état déplacé :

$$(3.23) \quad \vec{F}(t) = - \rho g \Delta\tau \vec{i}_z$$

$$(3.24) \quad \vec{M}(t) = - \rho g \tau_0 \vec{Q}'_0 \vec{G}_0 \wedge \vec{i}_z + \rho g \vec{i}_z \wedge \iiint_{\Delta\tau} \vec{O}_0 \vec{P} d\tau$$

Nous exprimerons $\Delta\tau$ en écrivant successivement τ_0 et τ dans le repère mobile. Soit $z_0 = g(x_0, y_0)$ l'équation de la carène (relation qui n'a pas d'expression explicite dans le cas général), le volume immergé à l'équilibre statique est :

$$(3.25) \quad \tau_0 = \iiint_{\tau_0} d\tau = \iint_{SF_0} \left[\int_{g(x_0, y_0)}^0 dz_0 \right] dx_0 dy_0 = - \iint_{SF_0} g(x_0, y_0) dx_0 dy_0$$

Dans sa position actuelle, la carène a pour flottaison SF , et le plan de la surface libre a pour équation dans le repère mobile :

$$(3.26) \quad z_0 = -A z_0 - \gamma_0 \theta_{x_0} + x_0 \theta_{y_0}$$

d'où, en notant SF'_0 la projection de SF sur le plan contenant SF_0 , et en remarquant que la surface $SF_0 - SF'_0$ est, du fait de l'hypothèse des petits mouvements, du deuxième ordre devant SF_0 :

$$(3.27) \quad \tau = - \iint_{SF_0} g(x_0, y_0) dx_0 dy_0 - \iint_{SF_0} [A z_0 + \gamma_0 \theta_{x_0} - x_0 \theta_{y_0}] dx_0 dy_0$$

$\Delta\tau$ s'écrit donc finalement :

$$(3.28) \quad \Delta\tau = A_{z_0} SF_0 + \theta_{x_0} \iint_{SF_0} y_0 dx_0 dy_0 - \theta_{y_0} \iint_{SF_0} x_0 dx_0 dy_0$$

Nous exprimerons de même l'intégrale de la formule (3.24) :

$$(3.29) \quad \iiint_{\Delta\tau} \vec{O_0 P} d\tau = \iint_{SF_0} \left[\int_{-A_{z_0} - y_0 \theta_{x_0} + x_0 \theta_{y_0}}^0 \vec{O_0 P} dz_0 \right] dx_0 dy_0$$

qui s'écrit après intégration en z_0 et en ne conservant que les termes du premier ordre :

$$(3.30) \quad \iiint_{\Delta\tau} \vec{O_0 P} d\tau = \left[A_{z_0} \iint_{SF_0} x_0 dx_0 dy_0 + \theta_{x_0} \iint_{SF_0} x_0 y_0 dx_0 dy_0 - \theta_{y_0} \iint_{SF_0} x_0^2 dx_0 dy_0 \right] \vec{i}_{x_0} + \left[A_{z_0} \iint_{SF_0} y_0 dx_0 dy_0 + \theta_{x_0} \iint_{SF_0} y_0^2 dx_0 dy_0 - \theta_{y_0} \iint_{SF_0} x_0 y_0 dx_0 dy_0 \right] \vec{i}_{y_0}$$

L'hypothèse des oscillations de faible amplitude nous permet enfin de confondre les vecteurs de base du repère mobile avec ceux du repère mobile moyen qui sont également ceux du repère fixe, et d'écrire :

$$(3.31) \quad \vec{Q'_0 G} \approx \vec{Q_0 G} + \vec{\theta}_0 \wedge \vec{Q_0 G} \quad \text{avec :} \quad \vec{Q_0 G} \approx \vec{Q_0 G} \vec{i}_z$$

Nous obtenons donc finalement l'expression matricielle du torseur des efforts hydrostatiques et des efforts de gravité dans le cadre d'une théorie linéaire :

$$(3.32) \quad \begin{bmatrix} \vec{F}(t) \\ \vec{M}(t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \vec{S} & \vec{U} \\ \vec{U}^t & \vec{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{A} \\ \vec{\theta} \end{bmatrix}$$

avec :

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho g S_F \end{bmatrix} \quad \vec{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \rho g \iint_{S_F} y_0 dx dy & -\rho g \iint_{S_F} x_0 dx dy & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{R} = \begin{bmatrix} \rho g \left[\tau_0 \overline{GQ_0} + \iint_{S_F} y_0^2 dx dy \right] & -\rho g \iint_{S_F} x_0 y_0 dx dy & 0 \\ -\rho g \iint_{S_F} x_0 y_0 dx dy & \rho g \left[\tau_0 \overline{GQ_0} + \iint_{S_F} x_0^2 dx dy \right] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.5 - DECOMPOSITION DU TORSEUR DES FORCES HYDRODYNAMIQUES

Le torseur des efforts hydrodynamiques est défini par les éléments de réduction suivants :

$$(3.33) \quad \vec{F}(t) = \rho \iint_C \frac{\partial}{\partial t} \phi(M;t) \vec{n} ds$$

$$(3.34) \quad \vec{M}(t) = \rho \iint_C \frac{\partial}{\partial t} \phi(M;t) \vec{OM}_A \wedge \vec{n} ds$$

Nous avons montré au paragraphe 2.9 que le problème de la diffraction-radiation peut être décomposé grâce à l'hypothèse de linéarité. Nous écrirons donc la fonction potentiel des vitesses sous la forme suivante :

$$(3.35) \quad \phi(M;t) = \phi_1(M;t) + \phi_2(M;t) + \sum_{j=1}^6 \phi_{R_j}(M;t)$$

où $\phi_{R_j}(M;t)$ désigne le potentiel absolu de radiation pour l'amplitude et la phase^j de la vitesse du solide après résolution du problème.

Le torseur des efforts hydrodynamiques peut alors être décomposé en trois parties que nous allons analyser successivement.

3.6 - TORSEUR DES FORCES DE FROUDE-KRILOV

On désigne sous le vocable de forces de Froude-Krilov les efforts dus à la houle incidente non perturbée. Le torseur correspondant s'écrit :

$$(3.36) \quad \vec{F}_I(t) = \rho \iint_C \frac{\partial}{\partial t} \phi_I(M;t) \vec{n} \, dS$$

$$(3.37) \quad \vec{M}_I(t) = \rho \iint_C \frac{\partial}{\partial t} \phi_I(M;t) \vec{OM}_A \vec{n} \, dS$$

Nous avons choisi au paragraphe 1.7 le modèle de houle incidente d'Airy qui a pour expression dans le repère fixe, dans le cas d'une profondeur illimitée :

$$(3.38) \quad \phi_I(M;t) = -\frac{2g}{\sigma} e^{kz} \cos[k_0(x \cos \beta + y \sin \beta) - \sigma t]$$

En effectuant le changement de variables adéquat, nous obtenons dans le repère mobile moyen :

$$(3.39) \quad \phi_I(M;t) = -\frac{2g}{\sigma} e^{kz_1} \cos[k_0(x_1 \cos \beta + y_1 \sin \beta) - (\sigma - Uk_0 \cos \beta)t]$$

La pulsation de rencontre ω a donc pour expression :

$$(3.40) \quad \omega = \sigma - Uk_0 \cos \beta$$

A chaque couple (ω, β) correspondent deux, une ou zéro pulsations réelles absolues σ qui sont les solutions de l'équation du second degré suivante :

$$(3.41) \quad \sigma^2 - \frac{U \cos \beta}{g} \sigma + \omega = 0$$

La figure (3.a) représente en coordonnées polaires les solutions $v_0(\beta)$ paramétrées en fonction de v , où v_0 et v désignent les nombres de Strouhal définis par les relations (3.42) :

$$(3.42) \quad v_0 = \frac{\sigma U}{g} = \tilde{\sigma} F \quad ; \quad v = \frac{\omega U}{g} = \tilde{\omega} F$$

F est le nombre de Froude, $\tilde{\sigma}$ et $\tilde{\omega}$ sont les pulsations adimensionnelles.

Le torseur des forces de Froude-Krilov est obtenu en dérivant la fonction $\phi_I(M;t)$ dans le repère absolu, puis en exprimant le résultat dans le repère relatif pour l'intégrer sur la carène.

$$(3.43) \quad \vec{F}_I(t) = -\alpha \rho g \iint_C e^{k_0 z_1} \sin [k_0 (x_1 \cos \beta + y_1 \sin \beta) - \omega t] \vec{n} \, ds$$

$$(3.44) \quad \vec{M}_I(t) = -\alpha \rho g \iint_C e^{k_0 z_1} \sin [k_0 (x_1 \cos \beta + y_1 \sin \beta) - \omega t] \vec{O}_0 M \wedge \vec{n} \, ds$$

Lorsque la profondeur est finie, la pulsation apparente est donnée par l'expression (3.45) qui n'est pas explicite puisque m_0 est la solution de l'équation (1.5).

$$(3.45) \quad \omega = \sigma - U m_0 \cos \beta$$

Le torseur des forces de Froude-Krilov s'obtient alors en remplaçant dans les expressions (3.43) et (3.44) $e^{k_0 z_1}$ par $\frac{\text{ch } m_0 (z_1 + h)}{\text{ch } m_0 h}$ et k_0 par m_0 .

COURBES $\nu_0(\beta)$ REPRESENTANT EN COORDONNEES POLAIRES ET EN FONCTION DU PARAMETRE ν LES SOLUTIONS DE L'EQUATION $\nu_0^2 \cos\beta - \nu_0 + \nu = 0$.

F est le nombre de Froude; $\tilde{\omega}$ et $\tilde{\sigma}$ sont adimensionnalisés par rapport à L.

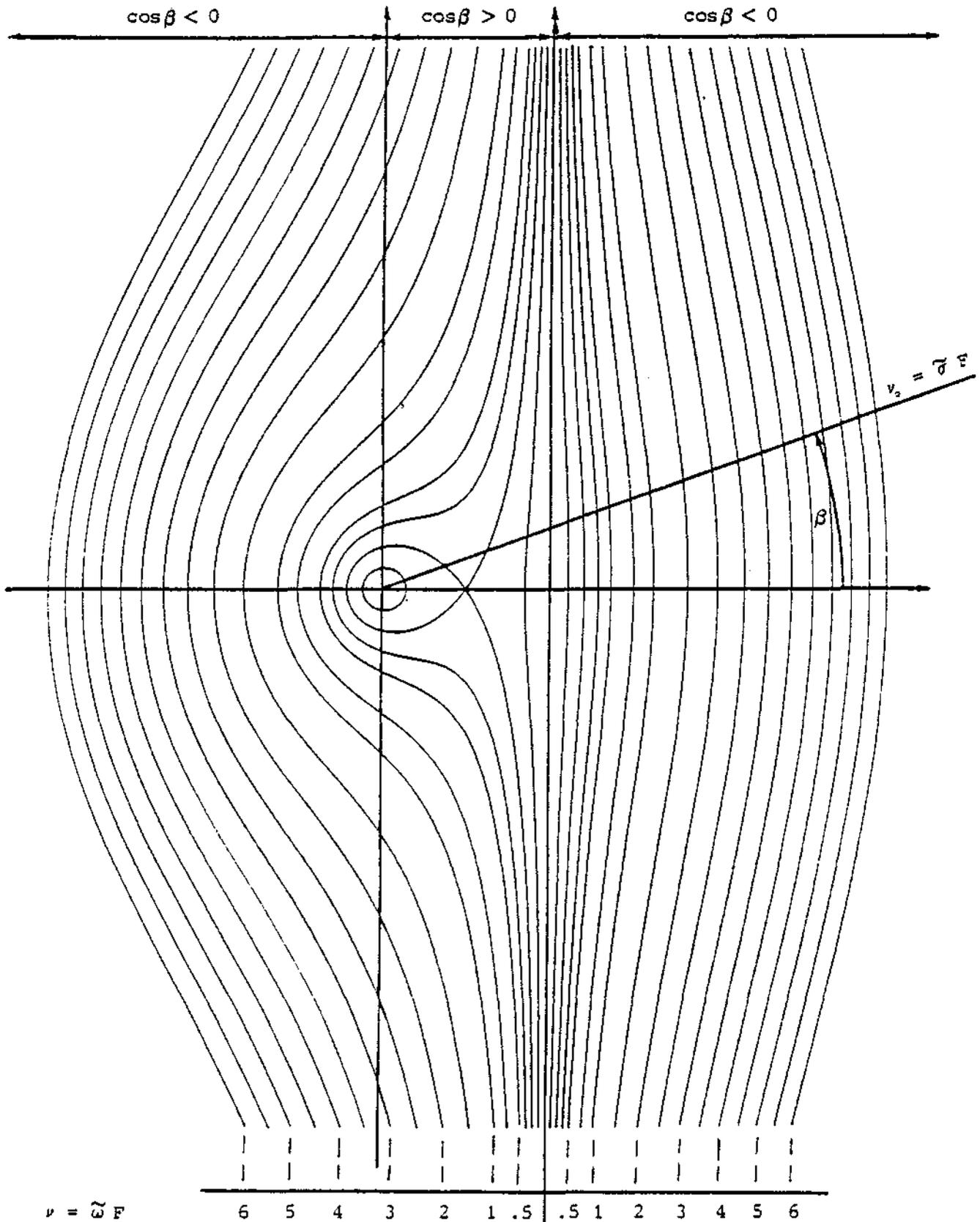


figure 3.a

3.7 - TORSEUR DES FORCES DE DIFFRACTION

Le torseur des forces de diffraction est défini par les relations suivantes :

$$(4.46) \quad \vec{F}_D(t) = \rho \iint_C \frac{\partial \phi_D(M;t)}{\partial t} \vec{n} \, ds = \rho \iint_C \left[\frac{\partial \phi_D(M;t)}{\partial t_1} - U \frac{\partial \phi_D(M;t)}{\partial x_1} \right] \vec{n} \, ds$$

$$(4.47) \quad \vec{M}_D(t) = \rho \iint_C \frac{\partial \phi_D(M;t)}{\partial t} \vec{O}_0 M \wedge \vec{n} \, ds = \rho \iint_C \left[\frac{\partial \phi_D(M;t)}{\partial t_1} - U \frac{\partial \phi_D(M;t)}{\partial x_1} \right] \vec{O}_0 M \wedge \vec{n} \, ds$$

Le potentiel de diffraction étant une fonction sinusoïdale du temps, nous pouvons écrire les expressions précédentes sous la forme suivante :

$$(3.48) \quad \begin{aligned} \vec{F}_D^* &= + \rho \iint_C \left[\omega \phi_D^{**}(M) - U \frac{\partial \phi_D^*(M)}{\partial x_1} \right] \vec{n} \, ds \\ \vec{F}_D^{**} &= - \rho \iint_C \left[\omega \phi_D^*(M) + U \frac{\partial \phi_D^{**}(M)}{\partial x_1} \right] \vec{n} \, ds \end{aligned}$$

$$(3.49) \quad \begin{aligned} \vec{M}_D^* &= + \rho \iint_C \left[\omega \phi_D^{**}(M) - U \frac{\partial \phi_D^*(M)}{\partial x_1} \right] \vec{O}_0 M \wedge \vec{n} \, ds \\ \vec{M}_D^{**} &= - \rho \iint_C \left[\omega \phi_D^*(M) + U \frac{\partial \phi_D^{**}(M)}{\partial x_1} \right] \vec{O}_0 M \wedge \vec{n} \, ds \end{aligned}$$

Leur détermination nécessite la résolution du problème de diffraction que nous avons présenté au chapitre précédent.

3.8 - TORSEUR DES FORCES DE RADIATION

Le torseur des efforts de radiation engendrés par un mouvement forcé, dont la vitesse a une amplitude unitaire et une phase nulle par rapport à la fonction temporelle de base $\cos \omega t$, est défini par les relations (3.50) et (3.51) dans lesquelles j désigne le mode du mouvement.

$$(3.50) \quad \vec{F}_j(t) = \rho \iint_C \frac{\partial}{\partial t} \phi_j(M;t) \vec{n} \, ds$$

$$(3.51) \quad \vec{M}_j(t) = \rho \iint_C \frac{\partial}{\partial t} \phi_j(M;t) \vec{O}_0 M \wedge \vec{n} \, ds$$

En explicitant la composante suivant la direction i , en fonction du potentiel $\phi_j(M;t)$ décomposé sur la base temporelle, il résulte :

$$(3.52) \quad F_{ij}(t) = \left\{ \rho \iint_C \left[\omega \phi_j^{**}(M) - U \frac{\partial}{\partial x_1} \phi_j^*(M) \right] n_i \, ds \right\} \left\{ \cos \omega t \right\} \\ + \left\{ \rho \iint_C \left[\phi_j^*(M) + \frac{U}{\omega} \frac{\partial}{\partial x_1} \phi_j^{**}(M) \right] n_i \, ds \right\} \left\{ -\omega \sin \omega t \right\}$$

$$(3.53) \quad M_{ij}(t) = \left\{ \rho \iint_C \left[\omega \phi_j^{**}(M) - U \frac{\partial}{\partial x_1} \phi_j^*(M) \right] (\vec{O}_0 M \wedge \vec{n})_i \, ds \right\} \left\{ \cos \omega t \right\} \\ + \left\{ \rho \iint_C \left[\phi_j^*(M) + \frac{U}{\omega} \frac{\partial}{\partial x_1} \phi_j^{**}(M) \right] (\vec{O}_0 M \wedge \vec{n})_i \, ds \right\} \left\{ -\omega \sin \omega t \right\}$$

Puisque $\cos \omega t$ et $-\omega \sin \omega t$ représentent respectivement la vitesse et l'accélération du solide par rapport au repère relatif moyen, nous pouvons écrire le résultat général des efforts de radiation sous la forme suivante :

$$(3.54) \quad \begin{bmatrix} \vec{F}(t) \\ \vec{M}(t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} TA_{ij} \\ MA_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{W} \\ \vec{\Omega} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} MA_{ij} \\ TA_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\vec{W}} \\ \dot{\vec{\Omega}} \end{bmatrix}$$

avec :

$$(3.55) \quad MA_{ij} = -\rho \iint_C \left[\phi_j^*(M) + \frac{U}{\omega} \frac{\partial}{\partial x_1} \phi_j^{**}(M) \right] N_i \, ds$$

$$(3.56) \quad TA_{ij} = -\rho \iint_C \left[\omega \phi_j^{**}(M) - U \frac{\partial}{\partial x_1} \phi_j^*(M) \right] N_i \, ds$$

Dans ces expressions, N_i désigne la normale généralisée définie par :

$$(3.57) \quad \begin{cases} N_i = n_i & i \in [4, 3] \\ N_i = \left(\vec{O}_i M_{ij} \wedge \vec{n} \right)_{i-3} & i \in [4, 6] \end{cases}$$

Les éléments MA_{ij} sont les masses d'eau ajoutées (ou les inerties ajoutées) et les éléments TA_{ij} sont les termes d'amortissement.

Il convient de noter qu'il s'agit ici d'un amortissement dû à la propagation vers l'infini de l'énergie radiée par le flotteur et véhiculée par des ondes de gravité.

3.9 - TORSEUR DES FORCES DE PROPULSION

Nous avons fait allusion aux forces de propulsion sans pour autant les faire intervenir dans la décomposition des forces de pression, ce que nous devons justifier.

Le torseur des efforts de propulsion est équilibré par le torseur des forces de résistance à l'avancement qui résultent à la fois du problème de Neumann-Kelvin (résistance en eau calme) et du problème de la diffraction-radiation (résistance ajoutée).

Ces torseurs sont composés de termes constants, et de termes qui sont des fonctions sinusoïdales du temps avec des pulsations multiples de ω . Puisque dans le cadre de ce travail nous ne nous intéressons qu'aux oscillations autour de la position moyenne dont la pulsation est ω , il est licite de n'introduire dans le bilan des efforts que les termes correspondant à cette seule pulsation.

3.10 - FORMULATION GENERALISEE DE L'EQUATION DE NEWTON

Tous les éléments à prendre en compte pour appliquer le principe fondamental de la dynamique ayant été explicités, nous pouvons désormais écrire l'équation de Newton. Nous emploierons, pour ce faire, les notations généralisées suivantes (fig. 3.b) :

$$(3.58) \quad \begin{cases} h_j(t) = A_j(t) & j \in [1,3] \\ h_j(t) = \theta_{j-3}(t) & j \in [4,6] \end{cases}$$

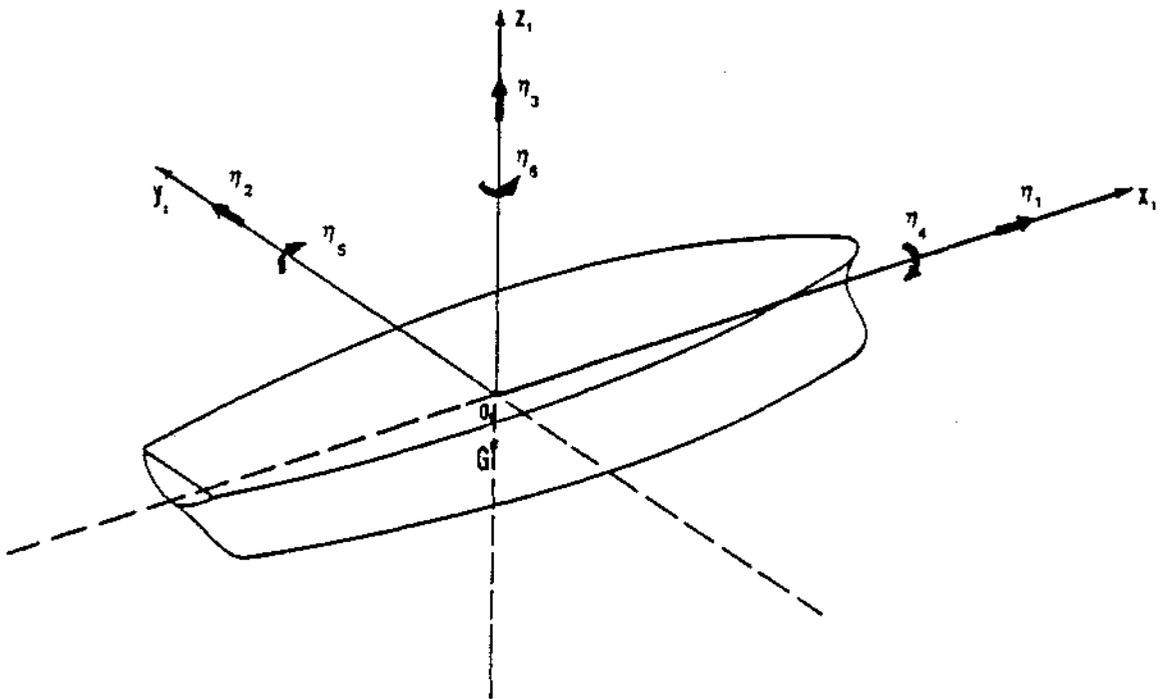


figure 3.b

Nous désignerons respectivement par M_{ij} et C_{ij} les éléments de la matrice d'inertie et de la matrice de rappel hydrostatique, et par $F_i(t)$ l'élément généralisé du torseur $(\vec{F}(t), \vec{M}(t))$.

Il vient alors en ordonnant les termes en fonction de $\eta_j(t)$ et de ses dérivées temporelles :

$$(3.59) \quad [M_{ij} + MA_{ij}] [\ddot{h}_j] + [TA_{ij}] [\dot{h}_j] + [C_{ij}] [h_j] = [F_{Ti} + F_{Di}]$$

Si nous séparons les termes en $\cos \omega t$ de ceux en $\sin \omega t$, nous aurons

$$(3.60) \quad \begin{bmatrix} -\omega^2 [M_{ij} + MA_{ij}] + C_{ij} & \omega [TA_{ij}] \\ -\omega [TA_{ij}] & -\omega^2 [M_{ij} + MA_{ij}] + C_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_j^* \\ z_j^{**} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{Ti}^* + F_{Di}^* \\ F_{Ti}^{**} + F_{Di}^{**} \end{bmatrix}$$

Nous devons donc résoudre un système de douze équations à douze inconnues. Remarquons toutefois que, dans le cas d'un solide présentant une symétrie par rapport au plan $(O_0; x_0, z_0)$, ce système se découple en deux sous-systèmes de six équations à six inconnues qui sont relatifs aux mouvements de cavement, pilonnement et tangage pour le premier, et d'embarquée, roulis et lacet pour le second.



Chapitre 4

DISTRIBUTIONS SUPERFICIELLES DE SINGULARITÉS CINÉMATIQUEMENT ÉQUIVALENTES À UNE CARÈNE ; DISTRIBUTION MIXTE DE GREEN ET DISTRIBUTION DE SOURCES

La détermination d'une fonction harmonique dans un domaine ouvert ou fermé et vérifiant des conditions de Dirichlet, Neumann ou Fourier sur les frontières peut être réalisée par plusieurs méthodes.

Nous exposerons ici deux méthodes de singularités qui conduisent chacune à la résolution numérique d'une équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce. La première met en oeuvre une distribution mixte de Green (sources et doublets normaux), et la seconde une distribution de sources.

4.1 - DIFFERENTS TYPES DE SINGULARITES

4.1.1 - Distribution volumique de sources

Soit un domaine D limité par une frontière S (éventuellement repoussée à l'infini) et $\rho(M;t)$ une fonction définie dans D et sur S , continue, bornée et telle que l'intégrale (4.1) ait un sens.

$$(4.1) \quad \iiint_D \rho(M';t) \frac{1}{|MM'|} dD(M')$$

On appelle potentiel induit au point M par la distribution volumique de sources de densité $\rho(M;t)$, la fonction suivante :

$$(4.2) \quad \Phi(M;t) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_D \rho(M';t) \frac{1}{|MM'|} dD(M')$$

4.1.2 - Distribution superficielle de sources

Soit une surface S et $\sigma(M;t)$ une fonction définie sur S , continue, bornée et telle que l'intégrale (4.3) ait un sens.

$$(4.3) \quad \iint_S \sigma(M';t) \frac{1}{|MM'|} dS(M')$$

On appelle potentiel induit au point M par la distribution superficielle de sources de densité $\sigma(M;t)$ la fonction suivante :

$$(4.4) \quad \Phi(M;t) = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \sigma(M';t) \frac{1}{|MM'|} dS(M')$$

Cette fonction représente le potentiel de simple couche.

4.1.3 - Distribution superficielle de doublets normaux

Soit une surface S , S^- et S^+ deux surfaces infiniment voisines de S , situées de part et d'autre et supportant respectivement les densités superficielles de sources $-\sigma(M;t)$ et $\sigma(M;t)$. Le potentiel total engendré au point M s'écrit :

$$(4.5) \quad \Phi(M;t) = -\frac{1}{4\pi} \left[\iint_{S^+} \sigma(M';t) \frac{1}{|MM'|} dS(M') - \iint_{S^-} \sigma(M';t) \frac{1}{|MM'|} dS(M') \right]$$

Si le produit $\sigma(M;t) \cdot \overline{M^-M^+}$ admet une limite $\mu(M;t)$ lorsque M^- et M^+ tendent vers M suivant la normale \vec{n} à S (orientée de M^- vers M^+), on appelle potentiel induit au point M par la distribution superficielle de doublets normaux de densité $\mu(M;t)$ la fonction :

$$(4.6) \quad \Phi(M;t) = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \mu(M';t) \frac{\partial}{\partial n'} \left[\frac{1}{|MM'|} \right] dS(M')$$

Cette fonction représente le potentiel de double couche.

4.1.4 - Discontinuités attachées aux distributions superficielles

Soit S une surface admettant un plan tangent au point M , le potentiel engendré par une distribution superficielle de singularités possède

des propriétés caractéristiques de la distribution. Nous désignerons par \vec{n} la normale à S en M orientée de M^- vers M^+ (deux points infiniment voisins de M de part et d'autre de S et situés sur la normale à S) et par $\vec{\ell}$ un vecteur unitaire contenu dans le plan tangent à S en M.

4.1.4.1 - Distribution superficielle de sources

$$(4.7) \quad \left[\begin{array}{l} \Phi(M^+; t) - \Phi(M^-; t) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial n} \Phi(M^+; t) - \frac{\partial}{\partial n} \Phi(M; t) = \frac{1}{2} \sigma(M; t) \\ \frac{\partial}{\partial n} \Phi(M; t) - \frac{\partial}{\partial n} \Phi(M^-; t) = \frac{1}{2} \sigma(M; t) \\ \frac{\partial}{\partial \ell} \Phi(M^+; t) - \frac{\partial}{\partial \ell} \Phi(M^-; t) = 0 \end{array} \right.$$

4.1.4.2 - Distribution superficielle de doublets normaux

$$(4.8) \quad \left[\begin{array}{l} \Phi(M^+; t) - \Phi(M; t) = -\frac{1}{2} \mu(M; t) \\ \Phi(M; t) - \Phi(M^-; t) = -\frac{1}{2} \mu(M; t) \\ \frac{\partial}{\partial n} \Phi(M^+; t) - \frac{\partial}{\partial n} \Phi(M^-; t) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \ell} \Phi(M^+; t) - \frac{\partial}{\partial \ell} \Phi(M; t) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \ell} \mu(M; t) \\ \frac{\partial}{\partial \ell} \Phi(M; t) - \frac{\partial}{\partial \ell} \Phi(M^-; t) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \ell} \mu(M; t) \end{array} \right.$$

4.2 - EXPRESSION D'UN CHAMP SCALAIRE DANS UN DOMAINE D LIMITE PAR UNE FRONTIERE S

4.2.1 - Intégrale de Stieltjes

Soit D un volume limité par la surface S, et soit $\phi(M;t)$ une fonction définie, bornée et deux fois continûment différentiable par rapport à M dans tout l'espace. La formule d'Ostrogradsky peut être appliquée dans le cas d'un champ newtonien sous réserve d'attribuer à l'intégrale (4.9), appelée intégrale de Stieltjes, la valeur $-\Omega(M) \phi(M;t)$ obtenue en faisant le produit de l'angle solide $\Omega(M)$ sous lequel la surface orientée est vue depuis M et de la valeur de la fonction $\phi(M;t)$ au point M.

$$(4.9) \quad \iiint_D \phi(M';t) \Delta_{M'} \left[\frac{1}{|MM'|} \right] dD(M')$$

4.2.2 - Troisième formule de Green

L'application de la deuxième formule de Green aux fonctions scalaires $\phi(M';t)$ et $\frac{1}{|MM'|}$ permet d'écrire :

$$(4.10) \quad \iint_S \left[\phi(M';t) \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{|MM'|} \right) - \frac{\partial}{\partial n'} \phi(M';t) \cdot \frac{1}{|MM'|} \right] dS(M') = \iiint_D \left[\phi(M';t) \Delta_{M'} \left(\frac{1}{|MM'|} \right) - \Delta_{M'} \phi(M';t) \frac{1}{|MM'|} \right] dD(M')$$

En extrayant l'intégrale de Stieltjes du second membre et en l'explicitant, il vient simplement :

$$(4.11) \quad -\frac{1}{4\pi} \iiint_D \Delta_{M'} \phi(M';t) \frac{1}{|MM'|} dD(M') + \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\partial}{\partial n'} \phi(M';t) \frac{1}{|MM'|} dS(M') - \frac{1}{4\pi} \iint_S \phi(M';t) \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{|MM'|} \right) dS(M') = \frac{1}{4\pi} \Omega(M) \phi(M;t)$$

4.3 - EXPRESSION D'UN CHAMP SCALAIRE HARMONIQUE ET REGULIER A L'INFINI DANS UN DOMAINE NON BORNE

Soit D le domaine limité par les plans d'équations $z = 0$ et $z = -h$ représentant respectivement la surface libre SL et le fond F, par la carène C qui coupe ou non la surface libre, et par la surface Σ définie par un cylindre de génératrices parallèles à Oz et de directrice le cercle de rayon R centré

en O_1 et contenu dans un plan de côte constante.

La troisième formule de Green appliquée au domaine borné D, compte tenu de ce que la fonction $\Phi(M;t)$ est harmonique, conduit au résultat suivant :

$$(4.12) \quad \frac{1}{4\pi} \iint_{SLUCUFU\Sigma} \frac{\partial}{\partial n'} \Phi(M';t) \frac{1}{|MM'|} dS(M') - \frac{1}{4\pi} \iint_{SLUCUFU\Sigma} \Phi(M';t) \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{|MM'|} \right) dS(M') = \frac{1}{4\pi} \Omega(M) \Phi(M;t)$$

Cette expression est issue de la formule d'Ostrogradsky et a donc été établie dans le cas où la normale est extérieure au domaine D. Nous pouvons changer le sens de cette normale en changeant simultanément les signes du premier membre de l'équation.

La fonction $\Phi(M;t)$ est régulière à l'infini. Elle s'annule donc à l'infini ainsi que ses dérivées. Il s'ensuit que les intégrales ayant Σ pour support ont une limite nulle quand R tend vers l'infini. Il reste donc alors :

$$(4.13) \quad \frac{1}{4\pi} \iint_{SLUCUF} \frac{\partial}{\partial n'} \Phi(M';t) \frac{1}{|MM'|} dS(M') - \frac{1}{4\pi} \iint_{SLUCUF} \Phi(M';t) \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{|MM'|} \right) dS(M') = \frac{1}{4\pi} \Omega(M) \Phi(M;t)$$

Dans le cas d'une profondeur illimitée, il est nécessaire de s'assurer que l'intégrale sur le plan F tend vers zéro quand h croît indéfiniment. Cette condition sera vérifiée si la fonction potentiel décroît au moins comme $\frac{1}{|MM'|}$ quand la côte du plan F tend vers l'infini négatif.

4.4 - EXPRESSION GENERALE D'UN CHAMP SCALAIRE HARMONIQUE ET REGULIER DANS UN DOMAINE NON BORNE

Si nous faisons un raisonnement analogue à celui du paragraphe précédent pour le domaine D' limité par la surface libre SL, la carène C⁽¹⁾ et le plan F₁ d'équation z = +h, nous obtenons :

$$(4.14) \quad \frac{1}{4\pi} \iint_{SLUCUF_1} \frac{\partial}{\partial n'} \Phi'(M';t) \frac{1}{|MM'|} dS(M') - \frac{1}{4\pi} \iint_{SLUCUF_2} \Phi'(M';t) \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{|MM'|} \right) dS(M') = \frac{1}{4\pi} \Omega'(M) \Phi'(M;t)$$

(1) Si la carène est totalement immergée, il faut introduire un troisième domaine D'', et séparer SL et C.

De même, nous pouvons définir deux infinités dénombrables de couples de domaines (D_p, D'_p) , D_p étant limité par les plans F_p et SL_p de côtes respectives $(2p-1)h$ et $2ph$, et D'_p étant compris entre les plans SL_p et F_{p+1} . Lorsque p est égal à zéro, les domaines D_p et D'_p ne sont autres que D et D' .

Il convient de remarquer que seuls les domaines D et D' ne sont pas de simples bandes en raison de la présence de la carène.

Les formules (4.13) et (4.14) peuvent être transposées aux domaines D_p et D'_p en introduisant les fonctions harmoniques régulières à l'infini $\Phi_p(M;t)$ et $\Phi'_p(M;t)$.

La superposition de l'ensemble de ces résultats conduit à l'expression générale suivante :

$$(4.15) \quad \left[\begin{aligned} & -\frac{1}{4\pi} \iint_{SL \cup C} \frac{\partial}{\partial n'} \left(\Phi(M;t) - \Phi'(M;t) \right) \frac{1}{|MM'|} ds(M') + \frac{1}{4\pi} \iint_{SL \cup C} \left(\Phi(M;t) - \Phi'(M;t) \right) \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{|MM'|} \right) ds(M') \\ & -\frac{1}{4\pi} \iint_F \frac{\partial}{\partial n'} \left(\Phi(M;t) - \Phi'(M;t) \right) \frac{1}{|MM'|} ds(M') + \frac{1}{4\pi} \iint_F \left(\Phi(M;t) - \Phi'(M;t) \right) \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{|MM'|} \right) ds(M') \\ & + \sum_{p \in \mathbb{Z}^*} \left\{ -\frac{1}{4\pi} \iint_{SL_p} \frac{\partial}{\partial n'} \left(\Phi_p(M;t) - \Phi'_p(M;t) \right) \frac{1}{|MM'|} ds(M') + \frac{1}{4\pi} \iint_{SL_p} \left(\Phi_p(M;t) - \Phi'_p(M;t) \right) \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{|MM'|} \right) ds(M') \right. \\ & \quad \left. -\frac{1}{4\pi} \iint_{F_p} \frac{\partial}{\partial n'} \left(\Phi_p(M;t) - \Phi'_{p-1}(M;t) \right) \frac{1}{|MM'|} ds(M') + \frac{1}{4\pi} \iint_{F_p} \left(\Phi_p(M;t) - \Phi'_{p-1}(M;t) \right) \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{|MM'|} \right) ds(M') \right\} \\ & = \frac{1}{4\pi} \left\{ \Omega(M) \Phi(M;t) + \Omega'(M) \Phi'(M;t) + \sum_{p \in \mathbb{Z}^*} \left[\Omega'_p(M) \Phi_p(M;t) + \Omega_p(M) \Phi'_p(M;t) \right] \right\} \end{aligned} \right]$$

Dans le cas d'une profondeur illimitée, cette expression générale devient plus simplement :

$$(4.16) \quad \left[\begin{aligned} & -\frac{1}{4\pi} \iint_{SL \cup C} \frac{\partial}{\partial n'} \left(\Phi(M;t) - \Phi'(M;t) \right) \frac{1}{|MM'|} ds(M') + \frac{1}{4\pi} \iint_{SL \cup C} \left(\Phi(M;t) - \Phi'(M;t) \right) \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{|MM'|} \right) ds(M') \\ & = \frac{1}{4\pi} \left[\Omega(M) \Phi(M;t) + \Omega'(M) \Phi'(M;t) \right] \end{aligned} \right]$$

4.5 - FONCTION DE GREEN

Toutes les fonctions que nous avons définies dans ce chapitre ont un comportement temporel sinusoïdal. Nous pouvons donc les projeter sur la base des fonctions temporelles $\cos \omega t$ et $\sin \omega t$. Nous affecterons d'un astérisque les composantes de $\cos \omega t$, et de deux astérisques celles de $\sin \omega t$. La fonction potentiel sera donc écrite sous la forme suivante :

$$(4.17) \quad \Phi(M;t) = \Phi^*(M) \cos \omega t + \Phi^{**}(M) \sin \omega t$$

4.5.1 - Cas de la profondeur illimitée

En introduisant la décomposition (4.17) dans la relation (4.16), nous obtenons :

$$(4.18) \quad \left[\begin{aligned} & -\frac{1}{4\pi} \iint_{SLUC} \left[\frac{\partial}{\partial n'} \left(\Phi^*(M') - \Phi'^*(M') \right) \frac{\cos \omega t}{|MM'|} + \frac{\partial}{\partial n'} \left(\Phi^{**}(M') - \Phi'^{**}(M') \right) \frac{\sin \omega t}{|MM'|} \right] ds(M') \\ & + \frac{1}{4\pi} \iint_{SLUC} \left[\left(\Phi^*(M') - \Phi'^*(M') \right) \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{\cos \omega t}{|MM'|} \right) + \left(\Phi^{**}(M') - \Phi'^{**}(M') \right) \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{\sin \omega t}{|MM'|} \right) \right] ds(M') \\ & = \frac{1}{4\pi} \left[\left(\Omega(M) \Phi^*(M) + \Omega'(M) \Phi'^*(M) \right) \cos \omega t + \left(\Omega(M) \Phi^{**}(M) + \Omega'(M) \Phi'^{**}(M) \right) \sin \omega t \right] \end{aligned} \right]$$

Soit $g_c(M, M'; t)$ et $g_s(M, M'; t)$ deux fonctions harmoniques, définies pour M et M' appartenant au demi espace de côte négative, bornées, continûment différentiables deux fois par rapport à M et à M' et suffisamment régulières à l'infini⁽¹⁾.

(1) S'il existe une solution à notre problème, non seulement elle doit être régulière à l'infini de telle manière que l'intégrale sur Σ soit nulle, mais aussi de telle manière que la contribution des intégrales sur SL soit finie. Cette condition est d'ailleurs nécessaire pour qu'il n'y ait pas de vagues générées à l'infini ; nous verrons ultérieurement qu'elle est bien vérifiée.

Nous pouvons définir un prolongement de ces fonctions pour M et M' appartenant à D' au moyen des formules suivantes :

$$(4.19) \quad g_c(M, M'; t) = g_c(N, M'; t) \quad ; \quad g_s(M, M'; t) = g_s(N, M'; t) \quad M \in D' \quad ; \quad M' \in D$$

$$(4.20) \quad g_c(M, M'; t) = g_c(M, N'; t) \quad ; \quad g_s(M, M'; t) = g_s(M, N'; t) \quad M \in D \quad ; \quad M' \in D'$$

$$(4.21) \quad g_c(M, M'; t) = g_c(N, N'; t) \quad ; \quad g_s(M, M'; t) = g_s(N, N'; t) \quad M \in D' \quad ; \quad M' \in D'$$

Expressions dans lesquelles N et N' sont respectivement les points symétriques de M et M' par rapport au plan de la surface libre.

Il vient alors en appliquant la deuxième formule de Green dans le domaine D aux deux couples de fonctions $\Phi^*(M')$, $g_c(M, M'; t)$ et $\Phi^{**}(M')$, $g_s(M, M'; t)$:

$$(4.22) \quad - \iint_{S \cup U \cup C} \left[\frac{\partial}{\partial n'} \Phi^*(M') g_c(M, M'; t) - \Phi^*(M') \frac{\partial}{\partial n'} g_c(M, M'; t) \right] dS(M') = 0$$

$$(4.23) \quad - \iint_{S \cup U \cup C} \left[\frac{\partial}{\partial n'} \Phi^{**}(M') g_s(M, M'; t) - \Phi^{**}(M') \frac{\partial}{\partial n'} g_s(M, M'; t) \right] dS(M') = 0$$

En appliquant la deuxième formule de Green dans le domaine D' aux couples de fonctions $\Phi'^*(M')$, $g_c(M, M'; t)$ et $\Phi'^{**}(M')$, $g_s(M, M'; t)$, nous obtenons de même :

$$(4.24) \quad + \iint_{S \cup U \cup C} \left[\frac{\partial}{\partial n'} \Phi'^*(M') g_c(M, M'; t) - \Phi'^*(M') \frac{\partial}{\partial n'} g_c(M, M'; t) \right] dS(M') = 0$$

$$(4.25) \quad + \iint_{S \cup U \cup C} \left[\frac{\partial}{\partial n'} \Phi'^{**}(M') g_s(M, M'; t) - \Phi'^{**}(M') \frac{\partial}{\partial n'} g_s(M, M'; t) \right] dS(M') = 0$$

En faisant la somme, membre à membre, de l'équation (4.18) et des équations (4.22) à (4.25), il vient simplement :

$$(4.26) \quad \left[\begin{aligned} & -\frac{1}{4\pi} \iint_{S_{LUC}} \left\{ \frac{\partial}{\partial n'} \left[\Phi^*(M') - \Phi'(M') \right] \left[\frac{\cos \omega t}{|MM'|} + \sigma_c(M, M'; t) \right] + \frac{\partial}{\partial n'} \left[\Phi^{**}(M') - \Phi'^{**}(M') \right] \left[\frac{\sin \omega t}{|MM'|} + \sigma_s(M, M'; t) \right] \right\} ds(M') \\ & + \frac{1}{4\pi} \iint_{S_{LUC}} \left\{ \left[\Phi^*(M') - \Phi'(M') \right] \frac{\partial}{\partial n'} \left[\frac{\cos \omega t}{|MM'|} + \sigma_c(M, M'; t) \right] + \left[\Phi^{**}(M') - \Phi'^{**}(M') \right] \frac{\partial}{\partial n'} \left[\frac{\sin \omega t}{|MM'|} + \sigma_s(M, M'; t) \right] \right\} ds(M') \\ & = \frac{1}{4\pi} \left[\left(\Omega(M) \Phi^*(M) + \Omega'(M) \Phi'(M) \right) \cos \omega t + \left(\Omega(M) \Phi^{**}(M) + \Omega'(M) \Phi'^{**}(M) \right) \sin \omega t \right] \end{aligned} \right]$$

Désignons par \mathcal{L}_1 la condition de surface libre telle qu'elle est énoncée au deuxième chapitre :

$$(4.27) \quad \mathcal{L}_1 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} + \sigma \frac{\partial}{\partial z} \Big|_{SL}$$

On appelle fonction de Green associée à la fonction $\frac{\cos \omega t}{|MM'|}$ (respectivement à la fonction $\frac{\sin \omega t}{|MM'|}$) pour l'opérateur \mathcal{L}_1 , la fonction $g_c(M, M'; t)$ (respectivement $g_s(M, M'; t)$) définie précédemment et telle que les relations suivantes soient satisfaites :

$$(4.28) \quad -\frac{1}{4\pi} \iint_{SL} \left\{ \frac{\partial}{\partial n'} \left[\Phi^*(M') - \Phi'(M') \right] \left[\frac{\cos \omega t}{|MM'|} + \sigma_c(M, M'; t) \right] - \left[\Phi^*(M') - \Phi'(M') \right] \frac{\partial}{\partial n'} \left[\frac{\cos \omega t}{|MM'|} + \sigma_c(M, M'; t) \right] \right\} ds(M') = 0$$

$$(4.29) \quad -\frac{1}{4\pi} \iint_{SL} \left\{ \frac{\partial}{\partial n'} \left[\Phi^{**}(M') - \Phi'^{**}(M') \right] \left[\frac{\sin \omega t}{|MM'|} + \sigma_s(M, M'; t) \right] - \left[\Phi^{**}(M') - \Phi'^{**}(M') \right] \frac{\partial}{\partial n'} \left[\frac{\sin \omega t}{|MM'|} + \sigma_s(M, M'; t) \right] \right\} ds(M') = 0$$

L'expression générale de la fonction potentiel se met donc sous la forme simplifiée (4.30).

$$(4.30) \quad \left[\begin{aligned} & -\frac{1}{4\pi} \iint_c \left\{ \frac{\partial}{\partial n'} \left[\Phi^*(M') - \Phi'(M') \right] \left[\frac{\cos \omega t}{|MM'|} + \sigma_c(M, M'; t) \right] - \left[\Phi^*(M') - \Phi'(M') \right] \frac{\partial}{\partial n'} \left[\frac{\cos \omega t}{|MM'|} + \sigma_c(M, M'; t) \right] \right\} ds(M') \\ & - \frac{1}{4\pi} \iint_c \left\{ \frac{\partial}{\partial n'} \left[\Phi^{**}(M') - \Phi'^{**}(M') \right] \left[\frac{\sin \omega t}{|MM'|} + \sigma_s(M, M'; t) \right] - \left[\Phi^{**}(M') - \Phi'^{**}(M') \right] \frac{\partial}{\partial n'} \left[\frac{\sin \omega t}{|MM'|} + \sigma_s(M, M'; t) \right] \right\} ds(M') \\ & = \frac{1}{4\pi} \left[\left(\Omega(M) \Phi^*(M) + \Omega'(M) \Phi'(M) \right) \cos \omega t + \left(\Omega(M) \Phi^{**}(M) + \Omega'(M) \Phi'^{**}(M) \right) \sin \omega t \right] \end{aligned} \right]$$

Nous déterminerons les fonctions de Green en écrivant que les fonctions $\Phi(M;t)$ et $\Phi'(M;t)$ vérifient la condition de surface libre. Le premier membre de l'équation (4.30) doit donc satisfaire cette même condition, ce qui sera réalisé que si et seulement si les équations suivantes sont vérifiées.

$$(4.31) \quad \mathcal{L}_1 \left[\frac{\cos \omega t}{|MM'|} + g_c(M,M';t) \right] = 0$$

$$(4.32) \quad \mathcal{L}_1 \left[\frac{\sin \omega t}{|MM'|} + g_s(M,M';t) \right] = 0$$

En effet, seuls les termes contenant les fonctions de Green dépendent simultanément de M et de t , et ils sont linéairement indépendants.

Il convient de remarquer que les fonctions $g_c(M,M';t)$ et $g_s(M,M';t)$ sont alors liées entre elles par les relations suivantes :

$$(4.33) \quad g_c(M,M';t) = g^{**}(M,M') \cos \omega t + g^{**}(M,M') \sin \omega t$$

$$(4.34) \quad g_s(M,M';t) = -g^{**}(M,M') \sin \omega t + g^{**}(M,M') \sin \omega t$$

et qu'il nous suffira de déterminer $g_c(M,M';t)$. Désormais, nous nous affranchirons des indices c et s en ne considérant plus que la fonction de Green associée à $\frac{\cos \omega t}{|MM'|}$.

Notons également que les dérivées de la fonction de Green par rapport à z et à z' seront identiques puisque les dérivées temporelles ne dépendent ni de z ni de z' et que la fonction $\frac{1}{|MM'|}$ est symétrique. L'opérateur \mathcal{L}_1 peut donc être appliqué indifféremment par rapport à M ou à M' .

L'intérêt de l'utilisation de la fonction de Green réside dans la réduction du support d'intégration à un domaine fini limité à la carène.

4.5.2 - Cas d'une profondeur finie

Lorsque la profondeur est finie, il est nécessaire de définir deux séries de fonctions $g_{cp}(M,M';t)$ et $g_{sp}(M,M';t)$ telles que toutes les

intégrales sur SL_p et F_p soient nulles. Elles se déduisent alors les unes des autres par une translation de côte $2ph$, et doivent être définies pour les deux opérateurs \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 avec :

$$(4.35) \quad \mathcal{L}_1 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} + g \frac{\partial}{\partial z} \Big|_{SL}$$

$$(4.36) \quad \mathcal{L}_2 = \frac{\partial}{\partial z} \Big|_F$$

Nous obtenons alors l'équation suivante :

$$(4.37) \quad \left[\begin{aligned} & -\frac{1}{4\pi} \iint_C \left\{ \frac{\partial}{\partial n'} \left[\Phi^*(M') - \Phi'^*(M') \right] \left[\frac{\cos \omega t}{|MM'|} + g_c(M, M'; t) \right] - \left[\Phi^*(M') - \Phi'^*(M') \right] \frac{\partial}{\partial n'} \left[\frac{\cos \omega t}{|MM'|} + g_c(M, M'; t) \right] \right\} dS(M') \\ & -\frac{1}{4\pi} \iint_C \left\{ \frac{\partial}{\partial n'} \left[\Phi^{**}(M') - \Phi'^{**}(M') \right] \left[\frac{\sin \omega t}{|MM'|} + g_s(M, M'; t) \right] - \left[\Phi^{**}(M') - \Phi'^{**}(M') \right] \frac{\partial}{\partial n'} \left[\frac{\sin \omega t}{|MM'|} + g_s(M, M'; t) \right] \right\} dS(M') \\ & = \frac{1}{4\pi} \left\{ \Omega(M) \Phi^*(M) + \Omega'(M) \Phi'^*(M) + \sum_{p \in Z^*} \left[\Omega_p(M) \Phi_p^*(M) + \Omega'_p(M) \Phi'_p^*(M) \right] \right\} \cos \omega t \\ & + \frac{1}{4\pi} \left\{ \Omega(M) \Phi^{**}(M) + \Omega'(M) \Phi'^{**}(M) + \sum_{p \in Z^*} \left[\Omega_p(M) \Phi_p^{**}(M) + \Omega'_p(M) \Phi'_p^{**}(M) \right] \right\} \sin \omega t \end{aligned} \right.$$

4.6 - FONCTION DE GREEN MODIFIEE

L'opérateur \mathcal{L}_1 , tel qu'il a été précédemment défini, impose la vérification de la condition de surface libre sur le plan de côte nulle privé de la flottaison de la carène, sans introduire de discontinuité sur la ligne de flottaison. Dans le cas d'un corps flottant, la fonction de Green ne pourra pas être exprimée sous une forme générale puisqu'elle est dépendante de la flottaison qui est une donnée du flotteur.

Nous utiliserons donc une autre fonction que nous noterons $g'(M, M'; t)$ et qui sera déterminée en remplaçant l'opérateur \mathcal{L}_1 par son extension \mathcal{L}'_1 à tout le plan d'équation $z = 0$; c'est-à-dire que nous emploierons dans tous les cas la fonction de Green $g(M, M'; t)$ correspondant à un corps totalement

immergé.

Il découle de cette modification n'affectant pas l'opérateur \mathcal{L}_2 que la substitution de $g'(M, M'; t)$ à $g(M, M'; t)$ aura pour unique conséquence de donner une contribution non nulle aux intégrales ayant SL pour support.

Dans le cas d'une profondeur finie, seule la fonction correspondant à SL sera modifiée puisque la carène ne coupe pas les plans SL_p .

4.7 - INTEGRALE DE LIGNE

Les intégrales I' sur SL se présentent, que la profondeur soit finie ou illimitée, sous la forme suivante :

$$(4.38) \quad \left[\begin{aligned} & -\frac{1}{4\pi} \iint_{SL} \left\{ \frac{\partial}{\partial n'} \left[\Phi^*(M') - \Phi^*(M) \right] \left[G^*(M, M') \cos \omega t + G^{**}(M, M') \sin \omega t \right] - \left[\Phi^*(M') - \Phi^*(M) \right] \frac{\partial}{\partial n'} \left[G^*(M, M') \cos \omega t + G^{**}(M, M') \sin \omega t \right] \right\} dS(M') \\ & -\frac{1}{4\pi} \iint_{SL} \left\{ \frac{\partial}{\partial n'} \left[\Phi^{**}(M') - \Phi^{**}(M) \right] \left[G^*(M, M') \sin \omega t - G^{**}(M, M') \cos \omega t \right] - \left[\Phi^{**}(M') - \Phi^{**}(M) \right] \frac{\partial}{\partial n'} \left[G^*(M, M') \sin \omega t - G^{**}(M, M') \cos \omega t \right] \right\} dS(M') \end{aligned} \right]$$

après avoir posé, pour alléger l'écriture :

$$(4.39) \quad G'(M, M'; t) = \frac{\cos \omega t}{|MM'|} + g'(M, M'; t)$$

La normale intérieure au domaine D s'identifie sur SL au vecteur unitaire porté par Oz et dirigé vers les z négatifs, ce qui permet de substituer la dérivation par rapport à z' à celle par rapport à n' en changeant le signe de I' .

Sur le plan de côte nulle, l'opérateur \mathcal{L}'_1 impose une relation entre les dérivées spatiales et temporelle. Il vient donc simplement en ordonnant les termes temporels :

$$(4.40) \left[-\frac{1}{4\pi g} \iint_{SL} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\left(\Phi^*(M) - \Phi^*(M') \right) \cos \omega t + \left(\Phi^{**}(M) - \Phi^{**}(M') \right) \sin \omega t \right] G^*(M, M') + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\left(\Phi^*(M) - \Phi^*(M') \right) \sin \omega t - \left(\Phi^{**}(M) - \Phi^{**}(M') \right) \cos \omega t \right] G^{**}(M, M') \right\} dS(M') \right. \\ \left. + \frac{1}{4\pi g} \iint_{SL} \left\{ \left[\Phi^*(M) - \Phi^*(M') \right] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[G^*(M, M') \cos \omega t + G^{**}(M, M') \sin \omega t \right] + \left[\Phi^{**}(M) - \Phi^{**}(M') \right] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[G^*(M, M') \sin \omega t - G^{**}(M, M') \cos \omega t \right] \right\} dS(M') \right]$$

Cette expression peut être transformée en explicitant la dérivée temporelle dans le repère relatif :

$$(4.41) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} - 2U \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial x_1} + U^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}$$

Il est clair que les trois termes obtenus dans le repère relatif sont linéairement indépendants, et que la réintroduction de la fonction $g(M, M'; t)$ conduirait à trois termes séparément nuls.

La double dérivation temporelle dans le repère relatif se traduit par le facteur multiplicatif $(-\omega^2)$. Il en résulte immédiatement que le premier terme est nul puisque tous les produits des fonctions Φ et G apparaissent successivement avec les deux signes plus et moins.

La dérivation croisée a une contribution non nulle qu'il est plus délicat de mettre sous une forme maniable. Ecrivons le deuxième terme sous la forme suivante :

$$(4.42) \left[-\frac{U}{2\pi g} \iint_{SL} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\left(\Phi^*(M) - \Phi^*(M') \right) \frac{\partial}{\partial t_1} \left(G^*(M, M') \cos \omega t + G^{**}(M, M') \sin \omega t \right) + \left(\Phi^{**}(M) - \Phi^{**}(M') \right) \frac{\partial}{\partial t_1} \left(G^*(M, M') \sin \omega t - G^{**}(M, M') \cos \omega t \right) \right] \right\} dS(M') \right. \\ \left. + \frac{U}{2\pi g} \iint_{SL} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\Phi^*(M) - \Phi^*(M') \right] \frac{\partial}{\partial t_1} \left[G^*(M, M') \cos \omega t + G^{**}(M, M') \sin \omega t \right] + \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\Phi^{**}(M) - \Phi^{**}(M') \right] \frac{\partial}{\partial t_1} \left[G^*(M, M') \sin \omega t - G^{**}(M, M') \cos \omega t \right] \right\} dS(M') \right]$$

La première intégrale peut être transformée, par application de la formule de Stokes en une intégrale curviligne sur le contour composé de l'intersection Γ de la carène et de la surface libre d'une part, et du cercle à l'infini dans le plan de côte nulle d'autre part. L'intégrale à l'infini sera nulle dans les mêmes conditions que celle sur Σ .

La deuxième intégrale de surface ne contient que des termes indépendants des dérivées spatiales de $G'(M, M'; t)$. Or, comme nous l'avons mis en évidence dans la deuxième annexe, la différence entre g et g' ne concerne que leurs dérivées spatiales. Cette deuxième intégrale est donc nulle. Cet argument corrobore le résultat obtenu pour la double dérivation temporelle.

La double dérivation spatiale se met immédiatement sous la forme de la dérivée d'une fonction par rapport à x'_i et se transforme sans difficulté en une intégrale de contour comme précédemment.

L'intégrale I' s'écrit donc :

$$(4.43) \quad \left[\begin{aligned} & -\frac{U}{2\pi g} \int_{\mathcal{P}^n} \left\{ \left[\Phi^*(M') - \Phi^{**}(M') \right] \frac{\partial}{\partial t} \left[G^*(M, M') \cos \omega t + G^{**}(M, M') \sin \omega t \right] + \left[\Phi^{**}(M') - \Phi^*(M') \right] \frac{\partial}{\partial t} \left[G^*(M, M') \sin \omega t - G^{**}(M, M') \cos \omega t \right] \right\} dy'_i \\ & + \frac{U^2}{4\pi g} \int_{\mathcal{P}^n} \left\{ \left[\Phi^*(M') - \Phi^{**}(M') \right] \frac{\partial}{\partial x'_i} \left[G^*(M, M') \cos \omega t + G^{**}(M, M') \sin \omega t \right] + \left[\Phi^{**}(M') - \Phi^*(M') \right] \frac{\partial}{\partial x'_i} \left[G^*(M, M') \sin \omega t - G^{**}(M, M') \cos \omega t \right] \right\} dy'_i \\ & - \frac{U^2}{4\pi g} \int_{\mathcal{P}^n} \left\{ \frac{\partial}{\partial x'_i} \left[\Phi^*(M') - \Phi^{**}(M') \right] \left[G^*(M, M') \cos \omega t + G^{**}(M, M') \sin \omega t \right] + \frac{\partial}{\partial x'_i} \left[\Phi^{**}(M') - \Phi^*(M') \right] \left[G^*(M, M') \sin \omega t - G^{**}(M, M') \cos \omega t \right] \right\} dy'_i \end{aligned} \right]$$

Nous obtenons la forme définitive de I' en explicitant la dérivée par rapport à x'_i des fonctions $\Phi(M') - \Phi^*(M')$.

$$(4.44) \quad \frac{\partial}{\partial x'_i} \left[\Phi(M') - \Phi^*(M') \right] = \frac{\partial}{\partial n} \left[\Phi(M') - \Phi^*(M') \right] (\vec{n}' \cdot \vec{i}'_x) + \frac{\partial}{\partial \ell} \left[\Phi(M') - \Phi^*(M') \right] (\vec{\ell}' \cdot \vec{i}'_x) + \frac{\partial}{\partial s} \left[\Phi(M') - \Phi^*(M') \right] (\vec{s}' \cdot \vec{i}'_x)$$

où \vec{s}' et $\vec{\ell}'$ sont deux vecteurs unitaires tangents à la carène C tels que $\vec{\ell}'$ est contenu dans le plan de la surface libre, et que le trièdre $(\vec{n}', \vec{\ell}', \vec{s}')$ est orthonormé direct.

Nous voyons apparaître ici deux termes qui n'apparaissent pas dans les intégrales de surface. Il est aisé de s'affranchir de la dérivée suivant le contour de flottaison en intégrant par parties. En effet, l'égalité $dy'_i = (\vec{\ell}' \cdot \vec{i}'_y) d\ell'$ nous permet d'écrire :

$$(4.45) \quad \left[\int_{\vec{r}} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[\Phi^*(M') - \Phi^{**}(M') \right] \left[G^*(M, M') \cos \omega t + G^{**}(M, M') \sin \omega t \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left[\Phi^{**}(M') - \Phi^*(M') \right] \left[G^*(M, M') \sin \omega t - G^{**}(M, M') \cos \omega t \right] \right\} (\vec{e}'_x \cdot \vec{i}_x) (\vec{e}'_y \cdot \vec{i}_y) d\vec{r}' \right. \\ = \left. \left\{ \left[\Phi^*(M') - \Phi^{**}(M') \right] \left[G^*(M, M') \cos \omega t + G^{**}(M, M') \sin \omega t \right] + \left[\Phi^{**}(M') - \Phi^*(M') \right] \left[G^*(M, M') \sin \omega t - G^{**}(M, M') \cos \omega t \right] \right\} (\vec{e}'_x \cdot \vec{i}_x) (\vec{e}'_y \cdot \vec{i}_y) \right]_{\vec{r}} \\ - \left. \left\{ \left[\Phi^*(M') - \Phi^{**}(M') \right] d \left[G^*(M, M') \cos \omega t + G^{**}(M, M') \sin \omega t \right] + \left[\Phi^{**}(M') - \Phi^*(M') \right] d \left[G^*(M, M') \sin \omega t - G^{**}(M, M') \cos \omega t \right] \right\} (\vec{e}'_x \cdot \vec{i}_x) (\vec{e}'_y \cdot \vec{i}_y) \right]_{\vec{r}}$$

Il est à noter qu'en absence de circulation les fonctions $\Phi^*(M') - \Phi^{**}(M')$ et $\Phi^{**}(M') - \Phi^*(M')$ sont uniformes et qu'alors le premier terme du second membre est nul ; c'est le cas en particulier des écoulements irrotationnels.

Il n'est malheureusement pas possible de lever la difficulté liée à la dérivée par rapport à s' au moyen d'une transformation analytique.

L'expression générale de la fonction potentiel engendrée s'écrit pour une profondeur illimitée :

$$(4.46) \quad \left[-\frac{1}{4\pi} \int_C \left\{ \frac{\partial}{\partial n} \left[\Phi^*(M') - \Phi^{**}(M') \right] \left[G^*(M, M') \cos \omega t + G^{**}(M, M') \sin \omega t \right] + \frac{\partial}{\partial n} \left[\Phi^{**}(M') - \Phi^*(M') \right] \left[G^*(M, M') \sin \omega t - G^{**}(M, M') \cos \omega t \right] \right\} dS(M') \right. \\ + \frac{1}{4\pi} \int_C \left\{ \left[\Phi^*(M') - \Phi^{**}(M') \right] \frac{\partial}{\partial n} \left[G^*(M, M') \cos \omega t + G^{**}(M, M') \sin \omega t \right] + \left[\Phi^{**}(M') - \Phi^*(M') \right] \frac{\partial}{\partial n} \left[G^*(M, M') \sin \omega t - G^{**}(M, M') \cos \omega t \right] \right\} dS(M') \\ - \frac{U}{2\pi g} \int_{\vec{r}} \left\{ \left[\Phi^*(M') - \Phi^{**}(M') \right] \frac{\partial}{\partial x_1} \left[G^*(M, M') \cos \omega t + G^{**}(M, M') \sin \omega t \right] + \left[\Phi^{**}(M') - \Phi^*(M') \right] \frac{\partial}{\partial x_1} \left[G^*(M, M') \sin \omega t - G^{**}(M, M') \cos \omega t \right] \right\} dy'_1 \\ + \frac{U^2}{4\pi g} \int_{\vec{r}} \left\{ \left[\Phi^*(M') - \Phi^{**}(M') \right] \frac{\partial}{\partial x_1} \left[G^*(M, M') \cos \omega t + G^{**}(M, M') \sin \omega t \right] + \left[\Phi^{**}(M') - \Phi^*(M') \right] \frac{\partial}{\partial x_1} \left[G^*(M, M') \sin \omega t - G^{**}(M, M') \cos \omega t \right] \right\} dy'_1 \\ + \frac{U^2}{4\pi g} \int_{\vec{r}} \left\{ \left[\Phi^*(M') - \Phi^{**}(M') \right] d \left[G^*(M, M') \cos \omega t + G^{**}(M, M') \sin \omega t \right] + \left[\Phi^{**}(M') - \Phi^*(M') \right] d \left[G^*(M, M') \sin \omega t - G^{**}(M, M') \cos \omega t \right] \right\} (\vec{e}'_x \cdot \vec{i}_x) (\vec{e}'_y \cdot \vec{i}_y) \\ - \frac{U^2}{4\pi g} \int_{\vec{r}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\Phi^*(M') - \Phi^{**}(M') \right] \left[G^*(M, M') \cos \omega t + G^{**}(M, M') \sin \omega t \right] + \frac{\partial}{\partial n} \left[\Phi^{**}(M') - \Phi^*(M') \right] \left[G^*(M, M') \sin \omega t - G^{**}(M, M') \cos \omega t \right] \right\} (\vec{n} \cdot \vec{i}_x) dy'_1 \\ - \frac{U^2}{4\pi g} \int_{\vec{r}} \left\{ \frac{\partial}{\partial s'} \left[\Phi^*(M') - \Phi^{**}(M') \right] \left[G^*(M, M') \cos \omega t + G^{**}(M, M') \sin \omega t \right] + \frac{\partial}{\partial s'} \left[\Phi^{**}(M') - \Phi^*(M') \right] \left[G^*(M, M') \sin \omega t - G^{**}(M, M') \cos \omega t \right] \right\} (\vec{s}' \cdot \vec{i}_x) dy'_1 \\ = \frac{1}{4\pi} \left\{ \left[\Omega(M) \Phi^*(M) + \Omega'(M) \Phi^{**}(M) \right] \cos \omega t + \left[\Omega(M) \Phi^{**}(M) + \Omega'(M) \Phi^*(M) \right] \sin \omega t \right\}$$

Dans le cas d'une profondeur finie, seul le second membre change :

$$(4.47) \quad \left[\begin{aligned} & \frac{1}{4\eta} \left\{ \Omega(M) \Phi^*(M) + \Omega'(M) \Phi'^*(M) + \sum_{p \in \mathbb{Z}^*} \left[\Omega_p(M) \Phi_p^*(M) + \Omega'_p(M) \Phi'_p^*(M) \right] \right\} \cos \omega t \\ & + \frac{1}{4\eta} \left\{ \Omega(M) \Phi^{**}(M) + \Omega'(M) \Phi'^{**}(M) + \sum_{p \in \mathbb{Z}^*} \left[\Omega_p(M) \Phi_p^{**}(M) + \Omega'_p(M) \Phi'_p^{**}(M) \right] \right\} \sin \omega t \end{aligned} \right]$$

4.8 - DISTRIBUTION MIXTE DE GREEN

La fonction $\Phi'(M;t)$ définie dans le domaine D' étant arbitraire, nous pouvons considérer le cas particulier suivant :

$$(4.48) \quad \Phi^*(M) \equiv 0 \quad ; \quad \Phi'^{**}(M) \equiv 0 \quad \forall M \in D' \cup S \cup C$$

Cette fonction est harmonique et satisfait toutes les conditions nécessaires à l'infini et sur la surface libre.

Si nous écrivons le potentiel des vitesses en un point M de la carène, nous obtenons une équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce où l'inconnue est la fonction $\Phi(M;t)$ sur la carène.

Les distributions superficielles de singularités équivalentes à la carène sont alors :

$$(4.49) \quad \mu^*(M) = -\Phi^*(M) \quad ; \quad \mu'^{**}(M) = -\Phi'^{**}(M) \quad \forall M \in C$$

$$(4.50) \quad \sigma^*(M) = \frac{\partial}{\partial n} \Phi^*(M) \quad ; \quad \sigma'^{**}(M) = \frac{\partial}{\partial n} \Phi'^{**}(M) \quad \forall M \in C$$

La distribution de doublets normaux est inconnue et la distribution de sources est connue. Nous avons pour les problèmes de radiation :

$$(4.51) \quad \frac{\partial}{\partial n} \phi_j^*(M) = \vec{V}_{E_j}^{**} \cdot \vec{n} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial n} \phi_j'^{**}(M) = \vec{V}_{E_j}^{**} \cdot \vec{n} = 0 \quad \forall M \in C$$

et pour le problème de diffraction :

$$(4.52) \quad \frac{\partial}{\partial n} \Phi_D^*(M) = -\frac{\partial}{\partial n} \Phi_I^*(M) ; \quad \frac{\partial}{\partial n} \Phi_D^{**}(M) = -\frac{\partial}{\partial n} \Phi_I^{**}(M) \quad \forall M \in C$$

Ces distributions vérifient les équations suivantes obtenues par projection sur les fonctions temporelles de base ; en tout point M de C admettant un plan tangent :

$$(4.53) \quad \left[\begin{aligned} & \frac{1}{2} \mu^*(M) - \frac{1}{4\pi} \iint_C \left[\mu^*(M') \frac{\partial}{\partial n'} G^*(M, M') - \mu^{**}(M') \frac{\partial}{\partial n'} G^*(M, M') \right] dS(M') \\ & + \frac{U\omega}{2\pi g} \int_P \left[\mu^*(M') G^*(M, M') + \mu^{**}(M') G^*(M, M') \right] dy'_1 - \frac{U^2}{4\pi g} \int_P \left[\mu^*(M') \frac{\partial}{\partial x'_1} G^*(M, M') - \mu^{**}(M') \frac{\partial}{\partial x'_1} G^*(M, M') \right] dy'_1 \\ & - \frac{U^2}{4\pi g} \int_P \left[\mu^*(M') dG^*(M, M') - \mu^{**}(M') dG^*(M, M') \right] (\vec{e}'_1 \cdot \vec{i}_x) (\vec{e}'_1 \cdot \vec{i}_y) + \frac{U^2}{4\pi g} \int_P \left[\frac{\partial \mu^*(M')}{\partial s'} G^*(M, M') - \frac{\partial \mu^{**}(M')}{\partial s'} G^*(M, M') \right] (\vec{s}' \cdot \vec{i}_x) dy \\ & = \frac{1}{4\pi} \iint_C \left[\sigma^*(M') G^*(M, M') - \sigma^{**}(M') G^*(M, M') \right] dS(M') + \frac{U^2}{4\pi g} \int_P \left[\sigma^*(M') G^*(M, M') - \sigma^{**}(M') G^*(M, M') \right] (\vec{n}' \cdot \vec{i}_x) dy'_1 \end{aligned} \right.$$

$$(4.54) \quad \left[\begin{aligned} & \frac{1}{2} \mu^{**}(M) - \frac{1}{4\pi} \iint_C \left[\mu^{**}(M') \frac{\partial}{\partial n'} G^*(M, M') + \mu^*(M') \frac{\partial}{\partial n'} G^*(M, M') \right] dS(M') \\ & + \frac{U\omega}{2\pi g} \int_P \left[\mu^{**}(M') G^*(M, M') - \mu^*(M') G^*(M, M') \right] dy'_1 - \frac{U^2}{4\pi g} \int_P \left[\mu^{**}(M') \frac{\partial}{\partial x'_1} G^*(M, M') + \mu^*(M') \frac{\partial}{\partial x'_1} G^*(M, M') \right] dy'_1 \\ & - \frac{U^2}{4\pi g} \int_P \left[\mu^{**}(M') dG^*(M, M') + \mu^*(M') dG^*(M, M') \right] (\vec{e}'_1 \cdot \vec{i}_x) (\vec{e}'_1 \cdot \vec{i}_y) + \frac{U^2}{4\pi g} \int_P \left[\frac{\partial \mu^{**}(M')}{\partial s'} G^*(M, M') + \frac{\partial \mu^*(M')}{\partial s'} G^*(M, M') \right] (\vec{s}' \cdot \vec{i}_x) dy \\ & = \frac{1}{4\pi} \iint_C \left[\sigma^{**}(M') G^*(M, M') + \sigma^*(M') G^*(M, M') \right] dS(M') + \frac{U^2}{4\pi g} \int_P \left[\sigma^{**}(M') G^*(M, M') + \sigma^*(M') G^*(M, M') \right] (\vec{n}' \cdot \vec{i}_x) dy'_1 \end{aligned} \right.$$

Remarquons que dans le cas où la carène coupe perpendiculairement la surface libre, le terme $(\vec{s}' \cdot \vec{i}_x)$ s'annule et les intégrales contenant des dérivées par rapport à s' disparaissent.

4.9 - DISTRIBUTION DE SOURCES

Considérons maintenant la fonction $\phi'(M;t)$ telle que :

$$(4.55) \quad \Phi'(\overset{*}{M}) \equiv \Phi(\overset{*}{M}) \quad ; \quad \Phi'(\overset{**}{M}) \equiv \Phi(\overset{**}{M}) \quad \forall M \in C \cup SL$$

$\phi'(M;t)$ est une fonction harmonique qui satisfait comme $\phi(M;t)$ la condition de surface libre et possède les mêmes propriétés que $\phi(M;t)$ à l'infini.

L'expression (4.46) se réduit à la formule suivante :

$$(4.56) \quad \left[\begin{aligned} & -\frac{1}{4\pi} \iint_C \left\{ \frac{\partial}{\partial n'} \left[\Phi(\overset{*}{M}') - \Phi(\overset{*}{M}) \right] \left[G(\overset{*}{M}, M') \cos \omega t + G(\overset{**}{M}, M') \sin \omega t \right] + \frac{\partial}{\partial n'} \left[\Phi(\overset{**}{M}') - \Phi(\overset{**}{M}) \right] \left[G(\overset{*}{M}, M') \sin \omega t - G(\overset{**}{M}, M') \cos \omega t \right] \right\} dS(M') \\ & -\frac{U^2}{4\pi g} \iint_P \left\{ \frac{\partial}{\partial n} \left[\Phi(\overset{*}{M}) - \Phi(\overset{*}{M}') \right] \left[G(\overset{*}{M}, M') \cos \omega t + G(\overset{**}{M}, M') \sin \omega t \right] + \frac{\partial}{\partial n} \left[\Phi(\overset{**}{M}) - \Phi(\overset{**}{M}') \right] \left[G(\overset{*}{M}, M') \sin \omega t - G(\overset{**}{M}, M') \cos \omega t \right] \right\} (\vec{n} \cdot \vec{i}_x) d\sigma \\ & = \Phi(\overset{*}{M}) \cos \omega t + \Phi(\overset{**}{M}) \sin \omega t - \frac{\Omega'(M)}{4\pi} \left[\left(\Phi(\overset{*}{M}) - \Phi(\overset{*}{M}') \right) \cos \omega t + \left(\Phi(\overset{**}{M}) - \Phi(\overset{**}{M}') \right) \sin \omega t \right] \end{aligned} \right.$$

Dans le cas d'une profondeur finie, le deuxième membre contient en plus la somme des termes dépendant de p .

En tout point M où la carène admet un plan tangent, nous pouvons écrire :

$$(4.57) \quad \left[\begin{aligned} & -\frac{1}{4\pi} \iint_C \left\{ \frac{\partial}{\partial n'} \left[\Phi(\overset{*}{M}') - \Phi(\overset{*}{M}) \right] \frac{\partial}{\partial n'} \left[G(\overset{*}{M}, M') \cos \omega t + G(\overset{**}{M}, M') \sin \omega t \right] + \frac{\partial}{\partial n'} \left[\Phi(\overset{**}{M}') - \Phi(\overset{**}{M}) \right] \frac{\partial}{\partial n'} \left[G(\overset{*}{M}, M') \sin \omega t - G(\overset{**}{M}, M') \cos \omega t \right] \right\} dS(M') \\ & -\frac{U^2}{4\pi g} \iint_P \left\{ \frac{\partial}{\partial n} \left[\Phi(\overset{*}{M}) - \Phi(\overset{*}{M}') \right] \frac{\partial}{\partial n} \left[G(\overset{*}{M}, M') \cos \omega t + G(\overset{**}{M}, M') \sin \omega t \right] + \frac{\partial}{\partial n} \left[\Phi(\overset{**}{M}) - \Phi(\overset{**}{M}') \right] \frac{\partial}{\partial n} \left[G(\overset{*}{M}, M') \sin \omega t - G(\overset{**}{M}, M') \cos \omega t \right] \right\} (\vec{n} \cdot \vec{i}_x) d\sigma \\ & = \frac{\partial}{\partial n} \Phi(\overset{*}{M}) \cos \omega t + \frac{\partial}{\partial n} \Phi(\overset{**}{M}) \sin \omega t - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial n} \left(\Phi(\overset{*}{M}) - \Phi(\overset{*}{M}') \right) \cos \omega t + \frac{\partial}{\partial n} \left(\Phi(\overset{**}{M}) - \Phi(\overset{**}{M}') \right) \sin \omega t \right] \end{aligned} \right.$$

La distribution de singularités cinématiquement équivalente à la carène est alors :

$$(4.58) \quad \sigma^*(M) = \frac{\partial}{\partial n} (\Phi^*(M) - \Phi'(M)) ; \quad \sigma^{**}(M) = \frac{\partial}{\partial n} (\Phi^{**}(M) - \Phi'(M)) \quad M \in C$$

et vérifie les équations intégrales suivantes :

$$(4.59) \quad \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} \sigma^*(M) - \frac{1}{4\pi} \iint_C \left[\sigma^*(M') \frac{\partial}{\partial n} G^*(M, M') - \sigma^{**}(M') \frac{\partial}{\partial n} G'^{**}(M, M') \right] dS(M') \\ - \frac{U^2}{4\pi g} \int_{\vec{r}} \left[\sigma^*(M') \frac{\partial}{\partial n} G^*(M, M') - \sigma^{**}(M') \frac{\partial}{\partial n} G'^{**}(M, M') \right] (\vec{n}' \cdot \vec{i}_x) dy'_1 = \frac{\partial}{\partial n} \Phi^*(M) \end{array} \right.$$

$$(4.60) \quad \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} \sigma^{**}(M) - \frac{1}{4\pi} \iint_C \left[\sigma^{**}(M') \frac{\partial}{\partial n} G^*(M, M') + \sigma^*(M') \frac{\partial}{\partial n} G'^{**}(M, M') \right] dS(M') \\ - \frac{U^2}{4\pi g} \int_{\vec{r}} \left[\sigma^{**}(M') \frac{\partial}{\partial n} G^*(M, M') + \sigma^*(M') \frac{\partial}{\partial n} G'^{**}(M, M') \right] (\vec{n}' \cdot \vec{i}_x) dy'_1 = \frac{\partial}{\partial n} \Phi^{**}(M) \end{array} \right.$$

Les seconds membres de ces équations sont donnés par les formules (4.51) et (4.52).

4.10 - CONCLUSION

Nous nous proposons désormais de résoudre les problèmes que nous avons posés au deuxième chapitre en utilisant les deux types de distribution. Il est clair que nous devons nous attendre à rencontrer plus de difficultés dans le cas de la distribution mixte que dans celui de la distribution de sources.

La solution que nous obtiendrons ainsi n'aura de sens que si elle est compatible avec une intégrale sur Σ nulle, ce qu'il faudra montrer a posteriori.



Chapitre 5

CONSTRUCTION DE LA FONCTION DE GREEN DANS LE CAS OÙ LA PROFONDEUR EST ILLIMITÉE

De nombreux auteurs se sont intéressés, dans le passé, à la détermination de la fonction de Green relative au problème de la diffraction-radiation avec vitesse d'avance. C'est ainsi que M.D. HASKIND /1946/, R. BRARD /1948/ et T. HANAOKA /1953/ puis L.N. SRETENSKII /1954/ et T.H. HAVELOCK /1958/ ont donné différentes formulations de cette fonction dans le cas où la profondeur est illimitée. J.V. WEHAUSEN et E.V. LAITONE en ont donné une analyse /HY-56/.

Nous nous proposons ici de construire la fonction de Green associée à la fonction $\frac{\cos \omega t}{|MM'|}$ pour l'opérateur \mathcal{L}' , sous une forme adaptée aux exigences du traitement numérique et des développements asymptotiques /HY-18/.

5.1 - EXPRESSION GENERALE DE LA FONCTION DE GREEN

L'opérateur \mathcal{L}' faisant intervenir des dérivées partielles par rapport aux deux variables z et t , nous aurons recours à une formulation intégrale pour transformer la dérivation par rapport à z en un opérateur algébrique et obtenir ainsi une équation différentielle linéaire du deuxième ordre dans laquelle les seules dérivations sont temporelles.

La solution élémentaire de l'équation de Laplace dans le domaine $D(z < 0)$ obtenue par le procédé de séparation des variables en coordonnées cartésiennes, et satisfaisant les conditions requises quand z tend vers l'infini négatif est :

$$(5.1) \quad e^{kz} e^{ik(x \cos \theta + y \sin \theta)}$$

Nous construirons donc la fonction de Green sous la forme suivante :

$$(5.2) \quad \hat{g}'(M, M'; t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\eta} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} \hat{g}'(\theta, k, \varepsilon; t) e^{kz} e^{ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} k dk \right\}$$

Ce choix présente deux avantages. D'une part, l'équation de Laplace sera satisfaite quelle que soit la fonction $\hat{g}'(\theta, k, \varepsilon; t)$ et, d'autre part, $\frac{1}{|MM'|}$ s'exprime très simplement en fonction de la solution élémentaire⁽¹⁾.

$$(5.3) \quad \frac{1}{|MM'|} = \frac{1}{\eta} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} e^{k(z-z')} e^{ik[(x-x') \cos \theta + (y-y') \sin \theta]} dk \right\} ; (z-z') < 0$$

$$(5.4) \quad \frac{1}{|MM'|} = \frac{1}{\eta} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} e^{-k(z-z')} e^{ik[(x-x') \cos \theta + (y-y') \sin \theta]} dk \right\} ; (z-z') > 0$$

Nous désignerons globalement le noyau des intégrales relatives au potentiel engendré par une distribution superficielle de sources par :

$$(5.5) \quad G'(M, M'; t) = \frac{\cos \omega t}{|MM'|} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\eta} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} \hat{g}'(\theta, k, \varepsilon; t) e^{kz} e^{ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} k dk \right\}$$

Sous cette forme, $G'(M, M'; t)$ vérifie l'équation de Laplace en tout point M du domaine D à l'exception du point M' , et la condition de régularité quand z tend vers l'infini négatif. Il nous reste donc à déterminer la fonction $\hat{g}'(\theta, k, \varepsilon; t)$ pour que l'équation (5.6) soit satisfaite, et à vérifier ensuite que la solution obtenue est suffisamment régulière quand $\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$ tend vers l'infini (cf. chapitre 7).

$$(5.6) \quad \mathcal{L}'_1 \left[G'(M, M'; t) \right] = 0$$

(1) Cette forme d'écriture qui rend possible la résolution de l'équation différentielle aux dérivées partielles introduit malheureusement une difficulté supplémentaire à cause de sa discontinuité lorsque $z-z'$ s'annule. Nous avons montré dans la deuxième annexe que cette discontinuité joue un rôle important dans la manière dont l'intégrale de ligne se manifeste.

5.2 - DETERMINATION DE LA FONCTION DE GREEN

L'opérateur \mathcal{L}'_1 impose au point M d'être situé sur le plan de la surface libre. Puisque le point M' appartient au domaine D, z' est toujours négatif ($z' = 0$ étant incompatible avec la proposition précédente). $z-z'$ est donc toujours positif dans l'équation (5.6), et seule l'expression (5.4) convient pour exprimer $\frac{1}{|MM'|}$.

Nous allègerons l'écriture en posant :

$$(5.7) \quad \varpi = (x-x') \cos \theta + (y-y') \sin \theta$$

Compte tenu de l'identité $U \equiv \frac{dx'}{dt}$, le calcul des différents termes de $\mathcal{L}'_1 \left[\frac{\cos \omega t}{|MM'|} \right]$ se présente sous la forme suivante :

$$(5.8) \quad \left[\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\cos \omega t}{|MM'|} \right] = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} \left[-\omega \sin \omega t - ikU \cos \theta \cos \omega t \right] e^{-k(z-z')} e^{ik\varpi} dk \right\} \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{\cos \omega t}{|MM'|} \right] = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} \left[-(\omega^2 + U^2 k^2 \cos^2 \theta) \cos \omega t + 2iUk \cos \theta \omega \sin \omega t \right] e^{-k(z-z')} e^{ik\varpi} dk \right\} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\cos \omega t}{|MM'|} \right] = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} \left[-k \cos \omega t \right] e^{-k(z-z')} e^{ik\varpi} dk \right\} \end{array} \right.$$

Le terme $2 \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\cos \omega t}{|MM'|} \right]$ peut être négligé puisqu'il n'interviendra que dans le second membre de l'équation différentielle et qu'à ce titre, il restera toujours au numérateur des différentes expressions. Nous obtenons donc :

$$(5.9) \quad \mathcal{L}'_1 \left[\frac{\cos \omega t}{|MM'|} \right] = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} \left[-(\omega^2 + U^2 k^2 \cos^2 \theta + gk) \cos \omega t + 2iUk \cos \theta \omega \sin \omega t \right] e^{kz'} e^{ik\varpi} dk \right\}$$

L'application de l'opérateur \mathcal{L}'_1 à $g'(M, M'; t)$ conduit au résultat suivant :

$$(5.10) \quad \mathcal{L}'_1 \left[g'(M, M'; t) \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} + gk \right] \hat{g}'(\theta, k, \varepsilon; t) e^{ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} k dk \right\}$$

De l'équation (5.6), nous pouvons déduire que la somme des intégrands est nulle. Il vient alors :

$$(5.11) \quad \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} + gk \right] \hat{g}'(\theta, k, \varepsilon; t) = \left[(\omega^2 + U^2 k^2 \cos^2 \theta + gk) \cos \omega t - 2iUk \cos \theta \omega \sin \omega t \right] e^{kz'} e^{-ik(x' \cos \theta + y' \sin \theta)} \cdot \frac{1}{k}$$

La résolution de cette équation différentielle n'est pas évidente sous la forme ci-dessus, dans la mesure où x' est une fonction du temps. Nous devons donc décomposer les fonctions $\cos \omega t$ et $\sin \omega t$ en exponentielles complexes et effectuer le changement de variables (1.1) pour passer dans le repère mobile moyen.

$$(5.12) \quad \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} + gk \right] \hat{g}'(\theta, k, \varepsilon; t) = \frac{1}{2k} e^{kz'} e^{-ik(x' \cos \theta + y' \sin \theta)} \times \left\{ e^{i(\omega - Uk \cos \theta)t} \left[\frac{z}{\omega + Uk^2 \cos^2 \theta + gk} - 2Uk \cos \theta \omega \right] + e^{-i(\omega + Uk \cos \theta)t} \left[\frac{z}{\omega + Uk^2 \cos^2 \theta + gk} + 2Uk \cos \theta \omega \right] \right\}$$

La solution générale de cette équation différentielle sans second membre caractérise le transitoire. Seule la solution particulière de l'équation complète qui représente le régime établi retiendra notre attention. Cette dernière se met sous la forme suivante :

$$(5.13) \quad \hat{g}'(\theta, k, \varepsilon; t) = A(\theta, k, \varepsilon) e^{i(\omega - Uk \cos \theta)t} + B(\theta, k, \varepsilon) e^{-i(\omega + Uk \cos \theta)t}$$

Le caractère linéaire de l'équation nous autorise à identifier séparément les deux termes $A(\theta, k, \varepsilon)$ et $B(\theta, k, \varepsilon)$. Nous obtenons après avoir effectué tous les calculs :

$$(5.14) \quad A(\theta, k, \varepsilon) = \frac{1}{2k} e^{kz'} e^{-ik(x' \cos \theta + y' \sin \theta)} \frac{\omega^2 + U^2 k^2 \cos^2 \theta + gk - 2Uk \cos \theta \omega}{-(\omega - Uk \cos \theta)^2 + 2i\varepsilon(\omega - Uk \cos \theta) + gk}$$

$$(5.15) \quad B(\theta, k, \varepsilon) = \frac{1}{2k} e^{kz'} e^{-ik(x' \cos \theta + y' \sin \theta)} \frac{\omega^2 + U^2 k^2 \cos^2 \theta + gk + 2Uk \cos \theta \omega}{-(\omega + Uk \cos \theta)^2 - 2i\varepsilon(\omega + Uk \cos \theta) + gk}$$

En reportant ces résultats dans (5.13) et en revenant dans le repère absolu au moyen de la transformation (1.1), il vient :

$$(5.16) \quad \left[\begin{array}{l} \hat{g}'(\theta, k, \varepsilon; t) = -\frac{1}{k} e^{kz'} e^{-ik(x' \cos \theta + y' \sin \theta)} \quad x \\ \left[\cos \omega t + e^{i\omega t} \frac{g'k}{(\omega - Uk \cos \theta)^2 - g'k - 2i\varepsilon(\omega - Uk \cos \theta)} + e^{-i\omega t} \frac{g'k}{(\omega + Uk \cos \theta)^2 - g'k + 2i\varepsilon(\omega + Uk \cos \theta)} \right] \end{array} \right]$$

D'où l'expression de la fonction de Green :

$$(5.17) \quad \left[\begin{array}{l} g'(M, M'; t) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} e^{k(z+z')} e^{ik\sigma} dk \right\} \cos \omega t \\ + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[-\frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ e^{i\omega t} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} \frac{e^{k(z+z')} e^{ik\sigma} g'k dk}{(\omega - Uk \cos \theta)^2 - g'k - 2i\varepsilon(\omega - Uk \cos \theta)} \right\} \right] \\ + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[-\frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\omega t} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} \frac{e^{k(z+z')} e^{ik\sigma} g'k dk}{(\omega + Uk \cos \theta)^2 - g'k + 2i\varepsilon(\omega + Uk \cos \theta)} \right\} \right] \end{array} \right]$$

Le premier terme de la fonction $g'(M, M'; t)$ peut être transformé en remarquant que $z + z'$ est toujours négatif et peut s'écrire $z - (-z')$, ce qui nous permet d'utiliser la formule (5.3) :

$$(5.18) \quad \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} e^{k(z+z')} e^{ik\sigma} dk \right\} = \frac{1}{|MM'|}$$

en désignant par N' le point symétrique de M' par rapport au plan d'équation $z = 0$.

La fonction $G'(M, M'; t)$ peut ainsi de mettre sous la forme :

$$(5.19) \quad G'(M, M'; t) = G'_0(M, N'; t) + G'_1(M, M'; t) + G'_2(M, M'; t)$$

avec :

$$(5.20) \left[\begin{aligned} G'_0(M, M'; t) &= \left[\frac{1}{|MM'|} - \frac{1}{|MM'|} \right] \cos \omega t \\ G'_1(M, M'; t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[-\frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ e^{i\omega t} \int_0^{+\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} \frac{e^{k[z+z'+i\varepsilon]} g^k dk}{(\omega - Uk \cos \theta)^2 - g^k - 2i\varepsilon(\omega - Uk \cos \theta)} \right\} \right] \\ G'_2(M, M'; t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[-\frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\omega t} \int_0^{+\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} \frac{e^{k[z+z'+i\varepsilon]} g^k dk}{(\omega + Uk \cos \theta)^2 - g^k + 2i\varepsilon(\omega + Uk \cos \theta)} \right\} \right] \end{aligned} \right]$$

5.3 - INTRODUCTION DES TERMES ADIMENSIONNELS CARACTERISTIQUES

Dans le dessein de simplifier les notations utilisées et de faire apparaître les nombres adimensionnels caractéristiques de l'écoulement, nous introduirons une longueur arbitraire l (par exemple, la longueur de la carène à la flottaison) et nous poserons :

$$(5.21) \left[\begin{aligned} K &= kl & \tilde{\omega} &= \omega \sqrt{\frac{l}{g}} & \tilde{\varepsilon} &= \varepsilon \sqrt{\frac{l}{g}} & F &= \frac{U}{\sqrt{gl}} \\ X &= \frac{x}{l} & Y &= \frac{y}{l} & Z &= \frac{z}{l} & \Omega &= \frac{\omega}{l} \end{aligned} \right]$$

En effectuant ces changements de variables, les fonctions (5.20) deviennent :

$$(5.22) \left[\begin{aligned} G'_0(M, M'; t) &= \left[\frac{1}{|MM'|} - \frac{1}{|MM'|} \right] \cos \omega t \\ G'_1(M, M'; t) &= \lim_{\tilde{\varepsilon} \rightarrow 0^+} \left[-\frac{1}{\pi l} \operatorname{Re} \left\{ e^{i\omega t} \int_0^{+\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} \frac{e^{K[Z+Z'+i\tilde{\varepsilon}]} K dK}{(\tilde{\omega} - FK \cos \theta)^2 - K - 2i\tilde{\varepsilon}(\tilde{\omega} - FK \cos \theta)} \right\} \right] \\ G'_2(M, M'; t) &= \lim_{\tilde{\varepsilon} \rightarrow 0^+} \left[-\frac{1}{\pi l} \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\omega t} \int_0^{+\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} \frac{e^{K[Z+Z'+i\tilde{\varepsilon}]} K dK}{(\tilde{\omega} + FK \cos \theta)^2 - K + 2i\tilde{\varepsilon}(\tilde{\omega} + FK \cos \theta)} \right\} \right] \end{aligned} \right]$$

5.4 - ETUDE DES PÔLES DE L'INTEGRAND DE $G_1^*(M, M'; t)$

5.4.1 - Détermination des pôles

La partie réelle du dénominateur de l'intégrand de $G_1^*(M, M'; t)$ s'écrit, une fois développée et ordonnée en puissances décroissantes de K :

$$(5.23) \quad \operatorname{Re}\{D_1(\theta, K, \tilde{\varepsilon})\} = K^2(F \cos \theta)^2 - K(1 + 2\tilde{\omega} F \cos \theta) + \tilde{\omega}^2$$

L'équation du second degré $\operatorname{Re}\{D_1(\theta, K, \tilde{\varepsilon})\} = 0$ admet pour discriminant :

$$(5.24) \quad \Delta = 1 + 4\tilde{\omega} F \cos \theta$$

expression qui est toujours positive puisque $\tilde{\omega}, F$ et $\cos \theta$ ($\theta \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$) sont essentiellement positifs. Le polynôme (5.23) possède donc toujours deux zéros réels positifs K_1 et K_2 ($K_1 < K_2$) qui sont :

$$(5.25) \quad K_1 = \frac{1 + 2\tilde{\omega} F \cos \theta - \sqrt{1 + 4\tilde{\omega} F \cos \theta}}{2 F^2 \cos^2 \theta}$$

$$(5.26) \quad K_2 = \frac{1 + 2\tilde{\omega} F \cos \theta + \sqrt{1 + 4\tilde{\omega} F \cos \theta}}{2 F^2 \cos^2 \theta}$$

Dans le cas particulier où $\cos \theta$ est nul, le polynôme dégénère et il ne reste plus qu'un seul zéro :

$$(5.27) \quad K_1 = \tilde{\omega}^2$$

5.4.2 - Détermination des signes des parties imaginaires des pôles

Les deux zéros de la partie réelle du polynôme étant déterminés, nous pouvons factoriser $D_1(\theta, K, \tilde{\varepsilon})$:

$$(5.28) \quad D_1(\theta, K, \tilde{\varepsilon}) = F^2 \cos^2 \theta [K - K_1][K - K_2] - 2i\tilde{\varepsilon}(\tilde{\omega} - FK \cos \theta)$$

Le signe de la partie complexe de chaque pôle peut être mis en évidence en linéarisant $D_1(\theta, K, \tilde{\epsilon})$ au voisinage de chacun de ses zéros.

$$(5.29) \quad D_1(\theta, K, \tilde{\epsilon}) \simeq F^2 \cos^2 \theta [K_1 - K_2] [K - K_1] - 2i\tilde{\epsilon} (\tilde{\omega} - FK_2 \cos \theta) \quad \text{au voisinage de } K_1$$

$$(5.30) \quad D_1(\theta, K, \tilde{\epsilon}) \simeq F^2 \cos^2 \theta [K_2 - K_1] [K - K_2] - 2i\tilde{\epsilon} (\tilde{\omega} - FK_2 \cos \theta) \quad \text{au voisinage de } K_2$$

ce qui peut s'écrire encore :

$$(5.31) \quad D_1(\theta, K, \tilde{\epsilon}) \simeq F^2 \cos^2 \theta [K_1 - K_2] [K - (K_1 - i_1(0))] \quad \text{au voisinage de } K_1$$

$$(5.32) \quad D_1(\theta, K, \tilde{\epsilon}) \simeq F^2 \cos^2 \theta [K_2 - K_1] [K - (K_2 - i_2(0))] \quad \text{au voisinage de } K_2$$

en désignant par $i_1(0)$ et $i_2(0)$ les termes imaginaires positifs infiniment petits suivants :

$$(5.33) \quad i_1(0) = - \frac{2i\tilde{\epsilon} (\tilde{\omega} - FK_2 \cos \theta)}{F^2 \cos^2 \theta (K_1 - K_2)}$$

$$(5.34) \quad i_2(0) = - \frac{2i\tilde{\epsilon} (\tilde{\omega} - FK_2 \cos \theta)}{F^2 \cos^2 \theta (K_2 - K_1)}$$

Les pôles de l'intégrand de $G_1^1(M, M'; t)$ ont toujours une partie réelle strictement positive et une partie imaginaire arbitrairement petite de signe négatif.

5.5 - ETUDE DES PÔLES DE L'INTEGRAND DE $G_2^1(M, M'; t)$

5.5.1 - Détermination des pôles

La partie réelle du dénominateur de l'intégrand de $G_2^1(M, M'; t)$ s'écrit une fois développée et ordonnée en puissances décroissantes de K :

$$(5.35) \quad \operatorname{Re} \{ D_2(\theta, K, \tilde{\epsilon}) \} = K^2 (F \cos \theta)^2 - K (1 - 2\tilde{\omega} F \cos \theta) + \tilde{\omega}^2$$

L'équation du second degré $\text{Re}\{D_2(\theta, K, \tilde{\varepsilon})\} = 0$ admet pour discriminant :

$$(5.36) \quad \Delta = 1 - 4\tilde{\omega}F \cos \theta$$

expression qui s'annule pour une valeur de $\cos \theta$ si et seulement si la relation (5.37) est satisfaite. Dans ce cas, il existe sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ deux valeurs de θ que nous noterons $-\theta_c$ et $+\theta_c$ telles que Δ est nul.

$$(5.37) \quad \tilde{\nu} = \tilde{\omega}F \geq \frac{1}{4} = \tilde{\nu}_c$$

Nous voyons apparaître ici l'importance du nombre sans dimension ν qui est le nombre de Strouhal caractéristique de l'écoulement :

$$(5.38) \quad \tilde{\nu} = \tilde{\omega}F = \frac{\omega U}{g} = \frac{T U}{\lambda}$$

où T désigne la période de la houle radiée et λ sa longueur d'onde.

Si le discriminant est positif, ce qui est toujours vérifié pour ν inférieur à ν_c , et à condition que $|\theta|$ soit supérieur à $|\theta_c|$ pour ν supérieur ou égal à ν_c , le polynôme (5.35) possède deux zéros réels positifs K_3 et K_4 ($K_3 < K_4$) qui sont :

$$(5.39) \quad K_3 = \frac{1 - 2\tilde{\omega}F \cos \theta - \sqrt{1 - 4\tilde{\omega}F \cos \theta}}{2F^2 \cos^2 \theta}$$

$$(5.40) \quad K_4 = \frac{1 - 2\tilde{\omega}F \cos \theta + \sqrt{1 - 4\tilde{\omega}F \cos \theta}}{2F^2 \cos^2 \theta}$$

Si le discriminant est nul, le polynôme (3.35) possède un zéro double réel positif K_c :

$$(5.41) \quad K_c = 4\tilde{\omega}^2$$

Si le discriminant est négatif, ce qui est vérifié à la double condition que ν soit supérieur à ν_c et que $|\theta|$ soit inférieur à $|\theta_c|$, le poly-

nôme (5.35) possède deux zéros complexes conjugués Z_3 et Z_4 ($\text{Im}(Z_3) < 0 < \text{Im}(Z_4)$) qui sont :

$$(5.42) \quad Z_3 = \frac{1 - 2\tilde{\omega}F\cos\theta - i\sqrt{4\tilde{\omega}F\cos\theta - 1}}{2F^2\cos^2\theta}$$

$$(5.43) \quad Z_4 = \frac{1 - 2\tilde{\omega}F\cos\theta + i\sqrt{4\tilde{\omega}F\cos\theta - 1}}{2F^2\cos^2\theta}$$

Il convient de remarquer que la partie réelle de ces deux expressions change de signe pour deux valeurs de θ que nous noterons $-\theta'_c$ et $+\theta'_c$, dans le cas où la relation (5.44) est satisfaite.

$$(5.44) \quad \vartheta \geq \frac{1}{2} = \vartheta'_c$$

Enfin, dans le cas particulier où $\cos\theta$ est nul, le polynôme dégénère, et il ne reste plus qu'un seul zéro réel positif :

$$(5.45) \quad K_3 = \tilde{\omega}^2$$

Le tableau 5.1 permet une vue synthétique des différents résultats obtenus en fonction du nombre de Strouhal.

La figure 5.a représente le lieu des pôles de $G'_2(M, M'; t)$ dans le plan complexe $F^2Z = X + iY$; lieu qui est une cardioïde.

5.5.2 - Détermination des signes des parties imaginaires des pôles

Les deux zéros de la partie réelle du polynôme étant déterminés, nous pouvons factoriser $D_2(\theta, K, \tilde{\varepsilon})$, ce qui conduit dans le cas où le discriminant est positif, à l'expression suivante :

$$(5.46) \quad D_2(\theta, K, \tilde{\varepsilon}) = F^2\cos^2\theta [K - K_3][K - K_4] + 2i\tilde{\varepsilon}(\tilde{\omega} + FK\cos\theta)$$

$\nu = \bar{\omega} \cdot F$	$0 < \nu < 1/4$	$\nu = 1/4$	$1/4 < \nu < 1/2$	$\nu = 1/2$	$1/2 < \nu$
$\cos \theta = 0$	Une seule racine réelle finie positive : K_3				
$0 < \cos \theta < \cos \theta'_C$	Deux racines réelles positives : $K_3 < K_C < K_4$				
$\cos \theta = \cos \theta'_C$	Une racine double réelle positive : $K_C = 4 \cdot \bar{\omega}^2$				
$\cos \theta'_C < \cos \theta < \cos \theta''_C$	Deux racines complexes conjuguées à partie réelle positive				
$\cos \theta = \cos \theta''_C$	Deux racines imaginaires pures conjuguées				
$\cos \theta'_C < \cos \theta \leq 1$	Deux racines complexes conjuguées à partie réelle négative				

LIEU DES POLES DE $G_2'(M, M'; t)$ DANS LE PLAN COMPLEXE : $F^2Z = X + iY$

Equation cartésienne de la cardioïde : $(x^2+y^2)^2 - 4v^2x(x^2+y^2) - 4v^4y^2 = 0$

Equation pôlaire de la cardioïde : $\rho = 2v^2(1+\cos\psi)$

$$\operatorname{tg} \psi_{\max} = \frac{\sqrt{4v-1}}{1-2v}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2v(1+\cos\psi)}$$

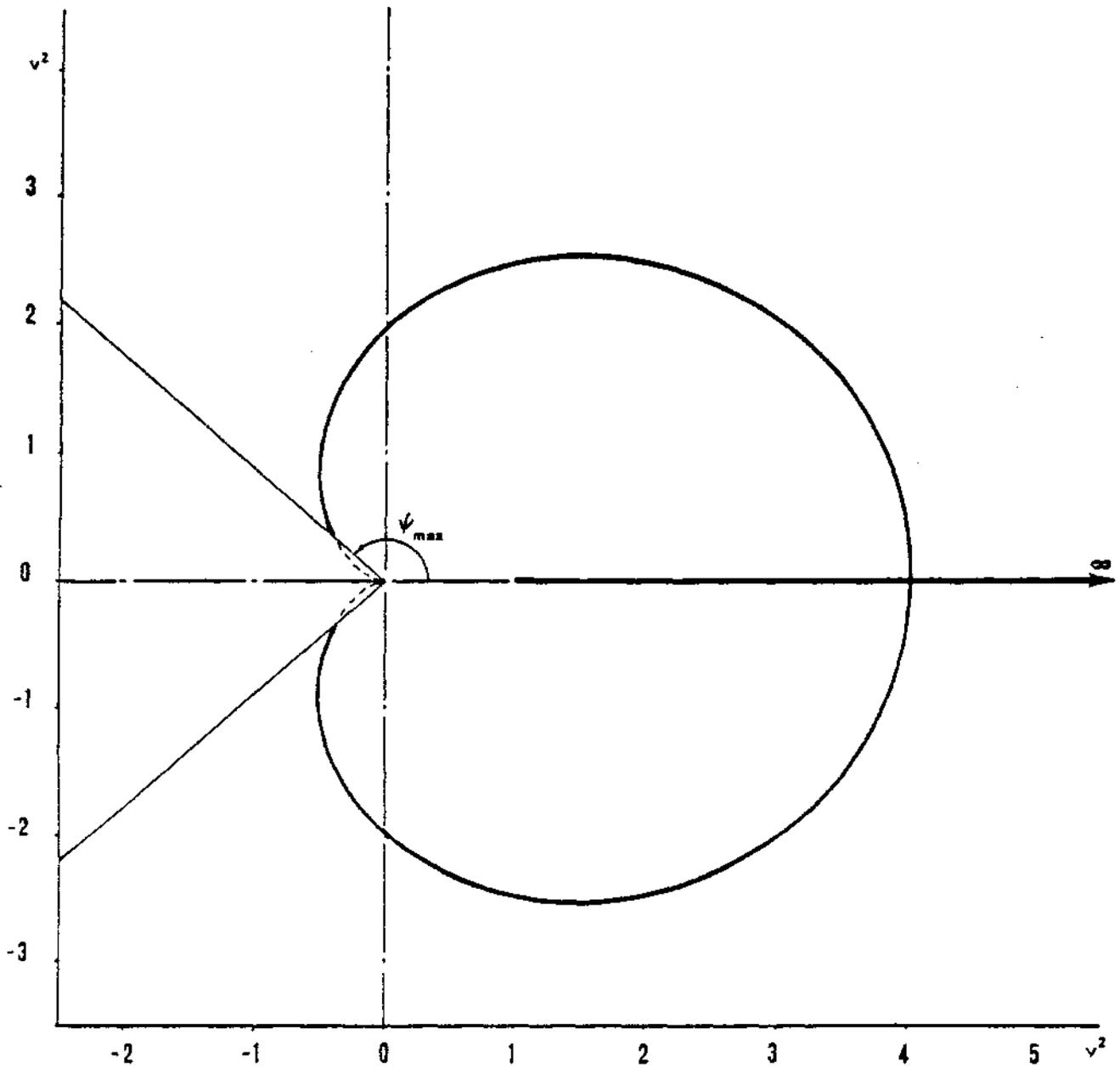


figure 5.a

Le signe de la partie complexe de chaque pôle peut être mis en évidence en linéarisant $D_2(\theta, K, \tilde{\varepsilon})$ au voisinage de chacun de ses zéros. Il vient alors :

$$(5.47) \quad D_2(\theta, K, \tilde{\varepsilon}) \approx F^2 \cos^2 \theta [K_3 - K_4] [K - (K_3 + i_3(0))] \quad \text{au voisinage de } K_3$$

$$(5.48) \quad D_2(\theta, K, \tilde{\varepsilon}) \approx F^2 \cos^2 \theta [K_4 - K_3] [K - (K_4 - i_4(0))] \quad \text{au voisinage de } K_4$$

en désignant par $i_3(0)$ et $i_4(0)$ les termes imaginaires positifs infiniment petits suivants :

$$(5.49) \quad i_3(0) = - \frac{2i\tilde{\varepsilon}(\tilde{\omega} + FK_3 \cos \theta)}{F^2 \cos^2 \theta (K_3 - K_4)}$$

$$(5.50) \quad i_4(0) = + \frac{2i\tilde{\varepsilon}(\tilde{\omega} + FK_4 \cos \theta)}{F^2 \cos^2 \theta (K_4 - K_3)}$$

Lorsque la partie réelle de $D_2(\theta, K, \tilde{\varepsilon})$ admet des zéros réels, les pôles de l'intégrand de $G'_2(M, M'; t)$ ont une partie réelle strictement positive et une partie imaginaire arbitrairement petite de signe positif pour K_3 et de signe négatif pour K_4 .

Lorsque la partie réelle de $D_1(\theta, K, \tilde{\varepsilon})$ admet des zéros complexes, les pôles de l'intégrand de $G'_2(M, M'; t)$ ont une partie réelle dont le signe peut être positif, nul ou négatif et une partie imaginaire finie de signe négatif pour Z_3 et de signe positif pour Z_4 .

5.6 - INTEGRATION DE LA FONCTION $G'_1(M, M'; t)$

La fonction $G'_1(M, M'; t)$ se présente sous la forme définie par la formule (5.22) du paragraphe 5.3 que nous rappelons ici :

$$G'_1(M, M'; t) = \lim_{\tilde{\varepsilon} \rightarrow 0^+} \left[-\frac{1}{\pi \tilde{\varepsilon}} \operatorname{Re} \left\{ e^{i\omega t} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} \frac{e^{K[z+z'+i\Omega]} K dK}{(\tilde{\omega} - FK \cos \theta)^2 - K - 2i\tilde{\varepsilon}(\tilde{\omega} - FK \cos \theta)} \right\} \right]$$

D'après les résultats du paragraphe 5.4, nous avons :

$$(5.51) \quad \frac{K}{(\tilde{\omega} - FK \cos \theta)^2 - K - 2i\tilde{\Gamma}(\tilde{\omega} - FK \cos \theta)} = \frac{1}{F^2 \cos^2 \theta [K_1 - K_2]} \left[\frac{K_1}{K - K_1 + i_1(\theta)} - \frac{K_2}{K - K_2 + i_2(\theta)} \right]$$

ce qui permet d'écrire l'intégrale par rapport à la variable K sous la forme suivante :

$$(5.52) \quad f(\theta) = \frac{1}{F^2 \cos^2 \theta [K_1 - K_2]} \left[K_1 \int_0^{\infty} \frac{e^{K(z+z'+i\Omega)}}{K - K_1 + i_1(\theta)} dK - K_2 \int_0^{\infty} \frac{e^{K(z+z'+i\Omega)}}{K - K_2 + i_2(\theta)} dK \right]$$

Nous avons alors à calculer deux fonctions exponentielles intégrales dont les propriétés ont été rappelées dans la troisième annexe. Il vient finalement :

$$(5.53) \quad f(\theta) = \frac{1}{F^2 \cos^2 \theta [K_1 - K_2]} \left[K_1 G_1[K_1(z+z'+i\Omega)] - K_2 G_1[K_2(z+z'+i\Omega)] \right]$$

Cette formule peut être simplifiée en remplaçant au dénominateur K_1 et K_2 par leurs expressions. De plus, la fonction $\sin \theta$ étant impaire, et la fonction $\cos \theta$ étant paire, nous ramènerons l'intervalle d'intégration en θ à $[0, \frac{\pi}{2}]$ en posant :

$$(5.54) \quad \left[\begin{array}{l} \xi = z + z' + i\Omega = z + z' + i[(x-x') \cos \theta + (y-y') \sin \theta] \\ \xi' = z + z' + i\Omega' = z + z' + i[(x-x') \cos \theta - (y-y') \sin \theta] \end{array} \right]$$

La fonction $G'_1(M, M'; t)$ s'écrit donc après l'intégration par rapport à la variable K, sous la forme suivante :

$$(5.55) \quad G'_1(M, M'; t) = \frac{1}{\pi t} \operatorname{Re} \left\{ e^{i\omega t} \int_0^{+\pi/2} \frac{K_1 [G_1(K_1 \xi) + G_1(K_1 \xi')] - K_2 [G_1(K_2 \xi) + G_1(K_2 \xi')]}{\sqrt{1 + 4Y \cos \theta}} d\theta \right\}$$

L'intégration par rapport à la variable θ sera effectuée par une méthode numérique adéquate sur laquelle nous reviendrons ultérieurement.

Remarquons, en outre, que lorsque $\cos \theta$ tend vers zéro, le produit $K_2[G_1(K_2\zeta) + G_1(K_2\zeta')]$ dégénère et rend nécessaire une étude asymptotique.

5.7 - INTEGRATION DE LA FONCTION $G_2^1(M, M'; t)$

La fonction $G_2^1(M, M'; t)$ se présente sous la forme définie par la formule (5.22) du paragraphe 5.3 que nous rappelons ici :

$$G_2^1(M, M'; t) = \lim_{\tilde{\epsilon} \rightarrow 0^+} \left[-\frac{1}{\pi \tilde{\epsilon}} \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\omega t} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} \frac{e^{K(z+z'+i\Omega)} K dK}{(\tilde{\omega} + FK \cos \theta)^2 - K + 2i\tilde{\epsilon}(\tilde{\omega} + FK \cos \theta)} \right\} \right]$$

L'intégrand ayant des pôles réels ou complexes, l'intégration est plus délicate que dans le cas précédent. Nous serons conduits à intégrer en fonction de la variable θ sur des intervalles qui dépendent de $\cos \theta_c$ et $\cos \theta'_c$.

5.7.1 - Cas des racines réelles ($\cos \theta \leq \cos \theta_c$)

Dans le cas où les racines sont réelles, le même procédé que celui mis en oeuvre pour $G_1^1(M, M'; t)$ peut être utilisé. Nous obtenons après la décomposition de l'intégrand :

$$(5.56) \quad \hat{p}(\theta) = \frac{1}{F^2 \cos^2 \theta [K_3 - K_4]} \left[K_3 \int_0^{\infty} \frac{e^{K(z+z'+i\Omega)}}{K - K_3 - i_3(\theta)} dK - K_4 \int_0^{\infty} \frac{e^{K(z+z'+i\Omega)}}{K - K_4 + i_4(\theta)} dK \right]$$

Nous avons de nouveau à calculer des fonctions exponentielles intégrales, mais avec une partie imaginaire positive pour K_3 . Nous obtenons finalement en utilisant les résultats de la troisième annexe :

$$(5.57) \quad \hat{p}(\theta) = - \frac{K_3 G_3(K_3 \zeta) - K_4 G_1(K_4 \zeta)}{\sqrt{1 - 4 \nu \cos \theta}}$$

Il convient de remarquer que lorsque $\cos \theta$ tend vers zéro, le produit $K_4 G_1(K_4 \zeta)$ dégénère et que le dénominateur tend vers zéro quand $\cos \theta$ tend vers $\cos \theta_c$ ($\nu \geq \nu_c$).

5.7.2 - Cas des racines complexes ($\cos \theta_c < \cos \theta < \cos \theta'_c$)

Dans le cas où les racines sont complexes, nous pouvons encore décomposer l'intégrand en éléments simples :

$$(5.58) \quad f(\theta) = \frac{1}{F^2 \cos^2 \theta [Z_3 - Z_4]} \left[Z_3 \int_0^{\infty} \frac{e^{k[z+z'+i\Omega]}}{k - Z_3} dk - Z_4 \int_0^{\infty} \frac{e^{k[z+z'+i\Omega]}}{k - Z_4} dk \right]$$

Ce qui s'exprime au moyen de fonctions exponentielles intégrales en remarquant que la partie imaginaire de Z_3 est négative et celle de Z_4 est positive, mais que leur partie réelle est positive. Il vient, d'après les résultats de la troisième annexe :

$$(5.59) \quad f(\theta) = +i \frac{Z_3 G1(Z_3, \xi) - Z_4 G3(K_4, \xi)}{\sqrt{4i \cos \theta - 1}}$$

5.7.3 - Cas des racines complexes ($\cos \theta'_c \leq \cos \theta$)

Dans le cas où les racines complexes ont une partie réelle négative ou nulle, l'expression (5.58) reste valide, mais la formulation des fonctions exponentielles intégrales diffère et le résultat obtenu en (5.59) est remplacé par :

$$(5.60) \quad f(\theta) = +i \frac{Z_3 G2(Z_3, \xi) - Z_4 G2(Z_4, \xi)}{\sqrt{4i \cos \theta - 1}}$$

5.7.4 - Etude particulière au voisinage de θ_c

L'intégration numérique par rapport à la variable θ présente une difficulté quand v est supérieur à v_c . En effet, le dénominateur de l'intégrand tend vers zéro quand θ tend vers θ_c . Il est donc nécessaire de réaliser une étude particulière au voisinage de θ_c sur un intervalle que nous noterons $[\theta_c - \alpha_c, \theta_c + \alpha_c]$

En effectuant le changement de variable $\theta = \theta_c + \alpha$, nous pouvons développer $\cos \theta$ en fonction de α :

$$(5.61) \quad \cos \theta = \cos \theta_c - \alpha \sin \theta_c - \frac{\alpha^2}{2} \cos \theta_c + \theta(\alpha^2)$$

Le dénominateur de l'intégrand s'écrit alors :

$$(5.62) \quad \sqrt{1-4\gamma\cos\theta} \approx \sqrt{4\gamma\left(\alpha\sin\theta_c + \frac{\alpha^2}{2}\cos\theta_c\right)} \quad \alpha \in [0, \alpha_c]$$

$$(5.63) \quad \sqrt{4\gamma\cos\theta-1} \approx \sqrt{-4\gamma\left(\alpha\sin\theta_c + \frac{\alpha^2}{2}\cos\theta_c\right)} \quad \alpha \in [-\alpha_c, 0]$$

Lorsque v est égal à v_c , $\cos\theta_c$ est égal à l'unité et $\sin\theta_c$ est nul. Dans ce cas, l'intégrand de $G'_2(M, M'; t)$ possède un pôle sur la première borne d'intégration et l'intégrale qui définit $G'_2(M, M'; t)$ n'a pas de sens.

Quand $\sin\theta_c$ n'est pas nul, nous obtenons au premier ordre en α :

$$(5.64) \quad \int_{-\alpha_c}^0 f(\theta) d\theta = \frac{\pi K_c e^{K_c \xi}}{\sqrt{\gamma} \sin\theta_c} \int_{-\alpha_c}^0 \frac{d\alpha}{\sqrt{-\alpha}} = \frac{2\pi K_c e^{K_c \xi}}{\sqrt{\gamma} \sin\theta_c} \sqrt{\alpha_c}$$

$$(5.65) \quad \int_0^{\alpha_c} f(\theta) d\theta = -i \frac{\pi K_c e^{K_c \xi}}{\sqrt{\gamma} \sin\theta_c} \int_0^{\alpha_c} \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}} = -i \frac{2\pi K_c e^{K_c \xi}}{\sqrt{\gamma} \sin\theta_c} \sqrt{\alpha_c}$$

5.7.5 - Forme générale de $G'_2(M, M'; t)$

Compte tenu de la restriction de l'intervalle d'intégration à $[0, \frac{\pi}{2}]$, la fonction $G'_2(M, M'; t)$ se présente sous la forme générale suivante :

$$(5.66) \quad \left[G'_2(M, M'; t) = -\frac{1}{\pi l} \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\omega t} \left[\int_0^{\theta_c'} \frac{z_3 [G_2(z_3 \xi) + G_2(z_3 \xi')] - z_4 [G_2(z_4 \xi) + G_2(z_4 \xi')]}{\sqrt{4\gamma\cos\theta - 1}} d\theta \right. \right. \right. \\ + \int_0^{\theta_c - \alpha_c} \frac{z_1 [G_1(z_1 \xi) + G_1(z_1 \xi')] - z_4 [G_3(z_4 \xi) + G_3(z_4 \xi')]}{\sqrt{4\gamma\cos\theta - 1}} d\theta \\ + \frac{2\pi K_c [e^{K_c \xi} + e^{K_c \xi'}] \sqrt{\alpha_c} [1-i]}{\sqrt{\gamma} \sin\theta_c} \\ \left. \left. \left. + \int_{\theta_c + \alpha_c}^{\pi/2} - \frac{K_3 [G_3(K_3 \xi) + G_3(K_3 \xi')] - K_4 [G_1(K_4 \xi) + G_1(K_4 \xi')]}{\sqrt{1 - 4\gamma\cos\theta}} d\theta \right] \right\} \right]$$

Dans le cas où v est inférieur à v'_c mais supérieur à v_c , la première intégrale disparaît et la borne θ'_c de la deuxième intégrale est remplacée par zéro.

Dans le cas où v est inférieur à v_c , seule la dernière intégrale subsiste, mais sa borne inférieure $\theta_c + \alpha_c$ est remplacée par zéro.

L'intégration par rapport à la variable θ sera effectuée comme dans le cas précédent au moyen d'une méthode numérique sur laquelle nous reviendrons.



Chapitre 6

CONSTRUCTION DE LA FONCTION DE GREEN DANS LE CAS OÙ LA PROFONDEUR EST FINIE

Dans le cas plus complexe où la profondeur est finie, les formulations proposées sont plus rares. La première due à J.K. LUNDE /1951/ a été améliorée par J.C. DERN et G. FERNANDEZ /1979/.

Nous nous proposons ici de construire la fonction de Green associée à la fonction $\frac{\cos \omega t}{|MM'|}$ pour les opérateurs \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 , sous une forme analogue à celle que nous avons obtenue dans le cas où la profondeur est illimitée /HY-18/.

6.1 - EXPRESSION GENERALE DE LA FONCTION DE GREEN

La fonction la plus simple que nous puissions ajouter à $\frac{\cos \omega t}{|MM'|}$ pour que la condition de glissement soit vérifiée sur la frontière F est $\frac{\cos \omega t}{|MN'|}$, où N' est le point symétrique du point M' par rapport au plan d'équations $z = -h$.

La solution élémentaire de l'équation de Laplace dans le domaine D ($-h < z < 0$) obtenue par le procédé de séparation des variables en coordonnées cartésiennes et satisfaisant la condition de glissement sur F s'écrit :

$$(6.1) \quad \text{ch } k(z+h) e^{ik(x \cos \theta + y \sin \theta)}$$

Nous construirons donc la fonction de Green sous la forme suivante :

$$(6.2) \quad g'(M, M'; t) = \frac{\cos \omega t}{|MM'|} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \text{Re} \left\{ \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \int_0^{\omega} \hat{g}'(\theta, k, \varepsilon; t) \frac{\text{ch } k(z+h)}{\text{ch } kh} e^{ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} k dk \right\}$$

La fonction $ch kh$ est destinée à fournir un module unitaire à la fonction (6.1) quand z est nul.

Nous désignerons globalement le noyau des intégrales relatives au potentiel engendré par une distribution superficielle de sources par :

$$(6.3) \quad G'(M, M'; t) = \frac{\cos \omega t}{|MM'|} + g'(M, M'; t)$$

Sous cette forme $G'(M, M'; t)$ vérifie l'équation de Laplace en tout point M du domaine D , à l'exception du point M' , ainsi que la condition (6.4).

$$(6.4) \quad \mathcal{L}_2 [G'(M, M'; t)] = 0$$

Il nous reste donc à déterminer la fonction $\hat{g}'(\theta, k, \tilde{z}; t)$ pour que l'équation (6.5) soit satisfaite, et à vérifier que la solution obtenue est suffisamment régulière quand $\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$ tend vers l'infini (cf. chapitre 8).

$$(6.5) \quad \mathcal{L}'_1 [G'(M, M'; t)] = 0$$

6.2 - DETERMINATION DE LA FONCTION DE GREEN

Pour les mêmes raisons qu'au paragraphe 5.2, les points M' et N' auront des côtes négatives. En reprenant les notations du chapitre précédent, le calcul des différents termes de $\mathcal{L}'_1 \left[\frac{\cos \omega t}{|MM'|} + \frac{\cos \omega t}{|MN'|} \right]$ se présente sous la forme suivante :

$$(6.6) \quad \left[\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\cos \omega t}{|MM'|} + \frac{\cos \omega t}{|MN'|} \right] = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} \left[-\omega \sin \omega t - iUk \cos \theta \cos \omega t \right] \left[\frac{e^{-k(z-z')}}{e^{-k(z+z'+2h)}} \right] e^{ikz} dk \right\} \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\frac{\cos \omega t}{|MM'|} + \frac{\cos \omega t}{|MN'|} \right] = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} \left[-(\omega^2 + U^2 k^2 \cos^2 \theta) \cos \omega t + 2iUk \cos \theta \omega \sin \omega t \right] \left[\frac{e^{-k(z-z')}}{e^{-k(z+z'+2h)}} \right] e^{ikz} dk \right\} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\cos \omega t}{|MM'|} + \frac{\cos \omega t}{|MN'|} \right] = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} \left[-k \cos \omega t \right] \left[\frac{e^{-k(z-z')}}{e^{-k(z+z'+2h)}} \right] e^{ikz} dk \right\} \end{array} \right.$$

Le terme $2\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\cos \omega t}{|MM'|} + \frac{\cos \omega t}{|MN'|} \right]$ peut être négligé puisqu'il n'interviendra que dans le second membre de l'équation différentielle et qu'à ce titre, il restera toujours au numérateur des différentes expressions. Nous obtenons donc :

$$(6.7) \quad \mathcal{L}'_1 \left[\frac{\cos \omega t}{|MM'|} + \frac{\cos \omega t}{|MN'|} \right] = \frac{2}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} \left[-(\omega^2 - Uk^2 \cos^2 \theta + g^2 k) \cos \omega t + 2iUk \cos \theta \omega \sin \omega t \right] e^{-kh} \operatorname{ch} k(z+h) e^{ikx} dk \right\}$$

L'application de l'opérateur \mathcal{L}'_1 à $g'(M, M'; t) - \frac{\cos \omega t}{|MN'|}$ conduit au résultat suivant :

$$(6.8) \quad \mathcal{L}'_1 \left[g'(M, M'; t) - \frac{\cos \omega t}{|MN'|} \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} + g^2 k \operatorname{th} k h \right] \hat{g}'(\theta, k, \varepsilon; t) e^{ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} k dk \right\}$$

De l'équation (6.5) nous pouvons déduire que la somme des intégrands est nulle. Il vient alors :

$$(6.9) \quad \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} + g^2 k \operatorname{th} k h \right] \hat{g}'(\theta, k, \varepsilon; t) = 2 \left[(\omega^2 - Uk^2 \cos^2 \theta + g^2 k) \cos \omega t - 2iUk \cos \theta \omega \sin \omega t \right] e^{-kh} \operatorname{ch} k(z+h) e^{-ik(x' \cos \theta + y' \sin \theta)} \frac{1}{k}$$

Après avoir décomposé les fonctions $\cos \omega t$ et $\sin \omega t$ en exponentielles complexes et effectué le changement de variables (1.1), nous obtenons à l'instar du chapitre précédent :

$$(6.10) \quad \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} + g^2 k \operatorname{th} k h \right] \hat{g}'(\theta, k, \varepsilon; t) = \frac{1}{k} e^{-kh} \operatorname{ch} k(z'+h) e^{-ik(x' \cos \theta + y' \sin \theta)} \times$$

$$\left\{ e^{i(\omega - Uk \cos \theta)t} \left[\omega^2 + Uk^2 \cos^2 \theta + g^2 k - 2Uk \cos \theta \omega \right] + e^{-i(\omega + Uk \cos \theta)t} \left[\omega^2 + Uk^2 \cos^2 \theta + g^2 k + 2Uk \cos \theta \omega \right] \right\}$$

La solution particulière de l'équation complète est de la forme suivante :

$$(6.11) \quad \hat{g}'(\theta, k, \varepsilon; t) = A(\theta, k, \varepsilon) e^{i(\omega - Uk \cos \theta)t} + B(\theta, k, \varepsilon) e^{-i(\omega + Uk \cos \theta)t}$$

Il vient alors en procédant par identification :

$$(6.12) \quad A(\theta, k, \varepsilon) = \frac{1}{k} e^{-kh} \operatorname{ch} k(z_1+h) e^{-ik(x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta)} \frac{\omega^2 + U^2 k^2 \cos^2 \theta + g^2 k - 2Uk \cos \theta \omega}{-(\omega - Uk \cos \theta)^2 + 2i\varepsilon(\omega - Uk \cos \theta) + g^2 k^2 \operatorname{th} kh}$$

$$(6.13) \quad B(\theta, k, \varepsilon) = \frac{1}{k} e^{-kh} \operatorname{ch} k(z_1+h) e^{-ik(x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta)} \frac{\omega^2 + U^2 k^2 \cos^2 \theta + g^2 k + 2Uk \cos \theta \omega}{-(\omega + Uk \cos \theta)^2 - 2i\varepsilon(\omega + Uk \cos \theta) + g^2 k^2 \operatorname{th} kh}$$

En reportant ces résultats dans (6.11) et en revenant dans le repère absolu au moyen de la transformation (1.1), il vient :

$$(6.14) \quad \left[\begin{array}{l} \hat{g}(\theta, k, \varepsilon; t) = -\frac{1}{k} e^{-kh} \operatorname{ch} k(z_1+h) e^{-ik(x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta)} \times \\ \left[2 \cos \omega t + e^{i\omega t} \frac{g^2 k(1 + \operatorname{th} kh)}{(\omega - Uk \cos \theta)^2 - g^2 k^2 \operatorname{th} kh - 2i\varepsilon(\omega - Uk \cos \theta)} + e^{-i\omega t} \frac{g^2 k(1 + \operatorname{th} kh)}{(\omega + Uk \cos \theta)^2 - g^2 k^2 \operatorname{th} kh + 2i\varepsilon(\omega + Uk \cos \theta)} \right] \end{array} \right]$$

D'où l'expression de la fonction de Green :

$$(6.15) \quad G'(M, M'; t) = G'_0(M, M'; t) + G'_1(M, M'; t) + G'_2(M, M'; t)$$

avec :

$$(6.16) \quad \left[\begin{array}{l} G'_0(M, M'; t) = \left[\frac{1}{|MM'|} + \frac{1}{|MN'|} - \frac{2}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} k(z+h) \operatorname{ch} k(z'+h)}{\operatorname{ch} kh} e^{-kh} e^{ik\sigma} dk \right\} \right] \\ G'_1(M, M'; t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[-\frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ e^{i\omega t} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} k(z+h) \operatorname{ch} k(z'+h) e^{ik\sigma} g^2 k dk}{\operatorname{ch}^2 kh [(\omega - Uk \cos \theta)^2 - g^2 k^2 \operatorname{th} kh - 2i\varepsilon(\omega - Uk \cos \theta)]} \right\} \right] \\ G'_2(M, M'; t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[-\frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\omega t} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} k(z+h) \operatorname{ch} k(z'+h) e^{ik\sigma} g^2 k dk}{\operatorname{ch}^2 kh [(\omega + Uk \cos \theta)^2 - g^2 k^2 \operatorname{th} kh + 2i\varepsilon(\omega + Uk \cos \theta)]} \right\} \right] \end{array} \right]$$

Il convient de noter que $G'_0(M, M'; t)$ ainsi que ses dérivées par rapport au temps et aux variables x, x', y et y' sont nulles lorsqu'un des points M où M' est situé sur le plan d'équation $z = 0$.

6.3 - INTRODUCTION DES TERMES ADIMENSIONNELS CARACTERISTIQUES

Pour les mêmes raisons qu'au cinquième chapitre, nous introduirons ici les nombres adimensionnels caractéristiques de l'écoulement en posant :

$$(6.17) \quad \left[\begin{array}{cccc} K = kh & \tilde{\omega} = \omega \sqrt{\frac{h}{g}} & \tilde{\varepsilon} = \varepsilon \sqrt{\frac{h}{g}} & F = \frac{U}{\sqrt{g'h}} \\ X = \frac{x}{h} & Y = \frac{y}{h} & Z = \frac{z}{h} & \Omega = \frac{\omega}{h} \end{array} \right.$$

Contrairement au cas où la profondeur est illimitée, la longueur d'adimensionnalisation n'est pas arbitraire. Elle s'introduit naturellement dans les équations. Dès lors, le nombre de Froude et la pulsation adimensionnelle ne sont plus caractéristiques du seul flotteur, mais dépendent également de la profondeur du fluide.

En effectuant les changements de variables (6.17), les fonctions (6.16) deviennent :

$$(6.18) \quad \left[\begin{array}{l} G'_0(M, M'; t) = \left[\frac{1}{|MM|} + \frac{1}{|MM'|} - \frac{2}{\pi h} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{+\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} K(z+1) \operatorname{ch} K(z'+1)}{\operatorname{ch} K} e^{K[-1+i\Omega]} dK \right\} \right] \cos \omega t \\ G'_1(M, M'; t) = \lim_{\tilde{\varepsilon} \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{\pi h} \operatorname{Re} \left\{ e^{i\omega t} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} K(z+1) \operatorname{ch} K(z'+1) e^{iK\Omega}}{\operatorname{ch}^2 K [(\tilde{\omega} - FK \cos \theta)^2 - K^2 h K - 2i\tilde{\varepsilon}(\tilde{\omega} - FK \cos \theta)]} K dK \right\} \right] \\ G'_2(M, M'; t) = \lim_{\tilde{\varepsilon} \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{\pi h} \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\omega t} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} K(z+1) \operatorname{ch} K(z'+1) e^{iK\Omega}}{\operatorname{ch}^2 K [(\tilde{\omega} + FK \cos \theta)^2 - K^2 h K + 2i\tilde{\varepsilon}(\tilde{\omega} + FK \cos \theta)]} K dK \right\} \right] \end{array} \right.$$

6.4 - ETUDE DES PÔLES DE L'INTEGRAND DE $G'_1(M, M'; t)$

6.4.1 - Détermination des pôles

La partie réelle du dénominateur de l'intégrand de $G'_1(M, M'; t)$ est :

$$(6.19) \quad \operatorname{Re}\{D_1(\theta, K, \tilde{\omega})\} = (\tilde{\omega} - FK \cos \theta)^2 - K \operatorname{th} K$$

L'étude des pôles n'est plus aussi triviale que dans le cas où la profondeur est illimitée puisque $D_1(\theta, K, \tilde{\omega})$ contient une fonction hyperbolique. Nous sommes donc contraints à faire une analyse graphique à partir des équations (6.20) pour $\cos \theta$ positif ou nul.

$$(6.20) \quad \tilde{\omega} - FK \cos \theta = \pm \sqrt{K \operatorname{th} K}$$

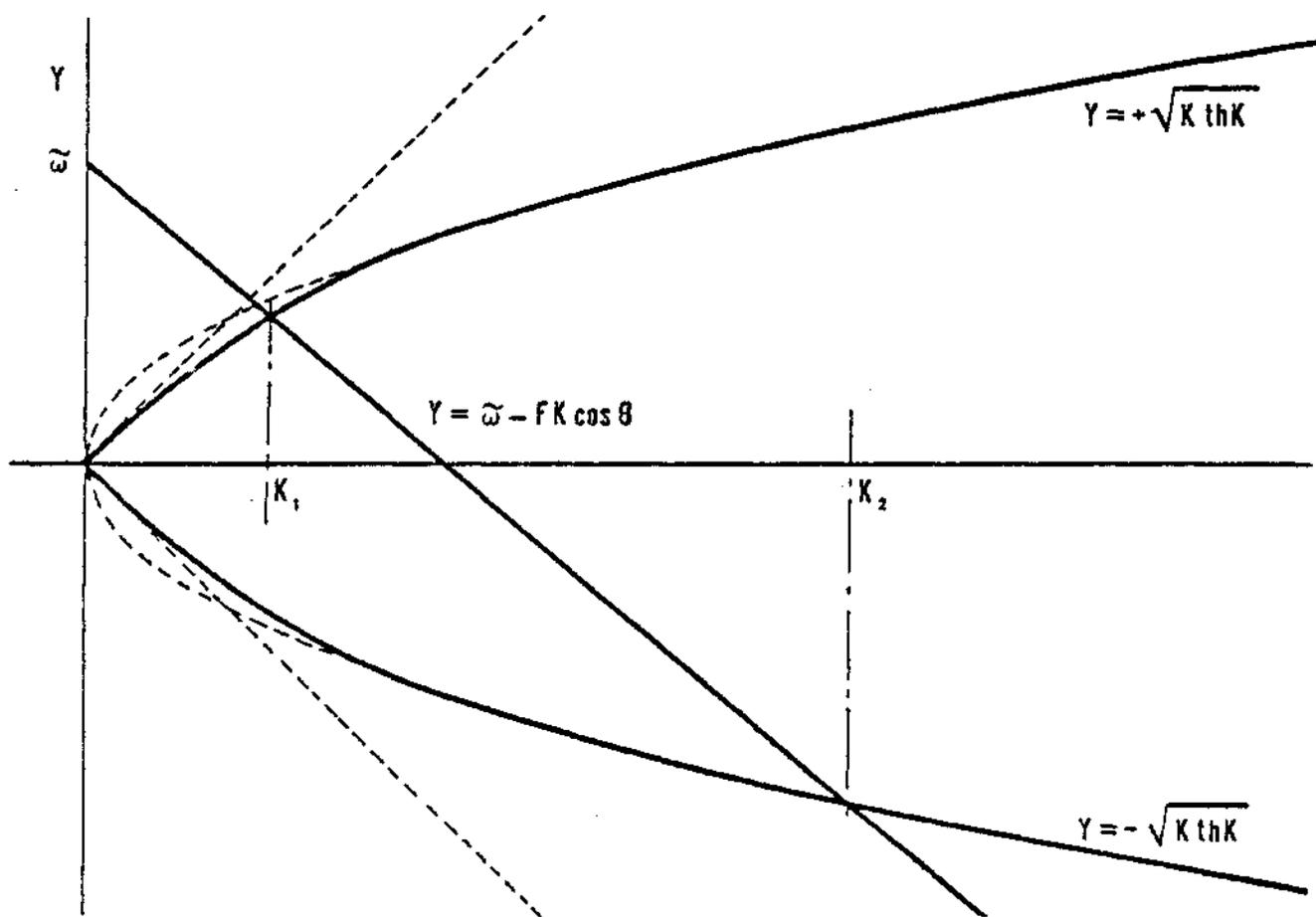


figure 6.a

La figure 6.a met en évidence l'existence de deux solutions réelles strictement positives K_1 et K_2 ($K_1 < K_2$), quelle que soit la valeur du nombre de Strouhal.

Dans le cas limite où $\cos \theta$ est nul, il ne reste plus qu'une seule solution réelle strictement positive.

Il convient de noter que $\text{Re}\{D_1(\theta, K, \tilde{\epsilon})\}$ possède une infinité de zéros complexes qu'il n'est pas possible de déterminer analytiquement. Nous verrons ultérieurement que cela n'est pas un handicap.

Nous reviendrons au dixième chapitre sur la méthode numérique employée pour calculer les valeurs de K_1 et K_2 .

6.4.2 - Détermination des signes des parties imaginaires des pôles

Le signe de la partie complexe de chaque pôle peut être mis en évidence en linéarisant $D_1(\theta, K, \tilde{\epsilon})$ au voisinage de chacun de ses zéros.

$$(6.21) \quad D_1(\theta, K, \tilde{\epsilon}) \approx \frac{d}{dK} \text{Re} \left\{ D_1(\theta, K, \tilde{\epsilon}) \right\}_{K_1} [K - K_1] - 2i\tilde{\epsilon}(\tilde{\omega} - FK_1 \cos \theta) \quad \text{au voisinage de } K_1$$

$$(6.22) \quad D_1(\theta, K, \tilde{\epsilon}) \approx \frac{d}{dK} \text{Re} \left\{ D_1(\theta, K, \tilde{\epsilon}) \right\}_{K_2} [K - K_2] - 2i\tilde{\epsilon}(\tilde{\omega} - FK_2 \cos \theta) \quad \text{au voisinage de } K_2$$

ce qui peut s'écrire encore :

$$(6.23) \quad D_1(\theta, K, \tilde{\epsilon}) \approx \frac{d}{dK} \text{Re} \left\{ D_1(\theta, K, \tilde{\epsilon}) \right\}_{K_1} [K - (K_1 - i_1(0))] \quad \text{au voisinage de } K_1$$

$$(6.24) \quad D_1(\theta, K, \tilde{\epsilon}) \approx \frac{d}{dK} \text{Re} \left\{ D_1(\theta, K, \tilde{\epsilon}) \right\}_{K_2} [K - (K_2 - i_2(0))] \quad \text{au voisinage de } K_2$$

en désignant par $i_1(0)$ et $i_2(0)$ les termes imaginaires positifs infiniment petits suivants :

$$(6.25) \quad i_1(0) = - \frac{2i\tilde{\epsilon}(\tilde{\omega} - FK_1 \cos \theta)}{\frac{d}{dK} \text{Re} \left\{ D_1(\theta, K, \tilde{\epsilon}) \right\}_{K_1}}$$

$$(6.26) \quad i_2(0) = - \frac{2i\tilde{\epsilon}(\tilde{\omega} - FK_2 \cos \theta)}{\frac{d}{dK} \text{Re} \left\{ D_1(\theta, K, \tilde{\epsilon}) \right\}_{K_2}}$$

L'intégrand de $G_1'(M, M'; t)$ admet toujours, en plus de ses pôles complexes à parties imaginaires finies, deux pôles dont les parties réelles sont strictement positives et donc les parties imaginaires sont arbitrairement petites de signe négatif.

6.5 - ETUDE DES PÔLES DE L'INTEGRAND DE $G_2'(M, M'; t)$

6.5.1 - Détermination des pôles

La partie réelle du dénominateur de l'intégrand de $G_2'(M, M'; t)$ est :

$$(6.27) \quad \text{Re} \{ D_2(\theta, K, \tilde{\epsilon}) \} = (\tilde{\omega} + FK \cos \theta)^2 - K \text{th} K$$

L'étude des zéros de cette fonction sera menée graphiquement à partir des équations (6.28).

$$(6.28) \quad \tilde{\omega} + FK \cos \theta = \pm \sqrt{K \text{th} K}$$

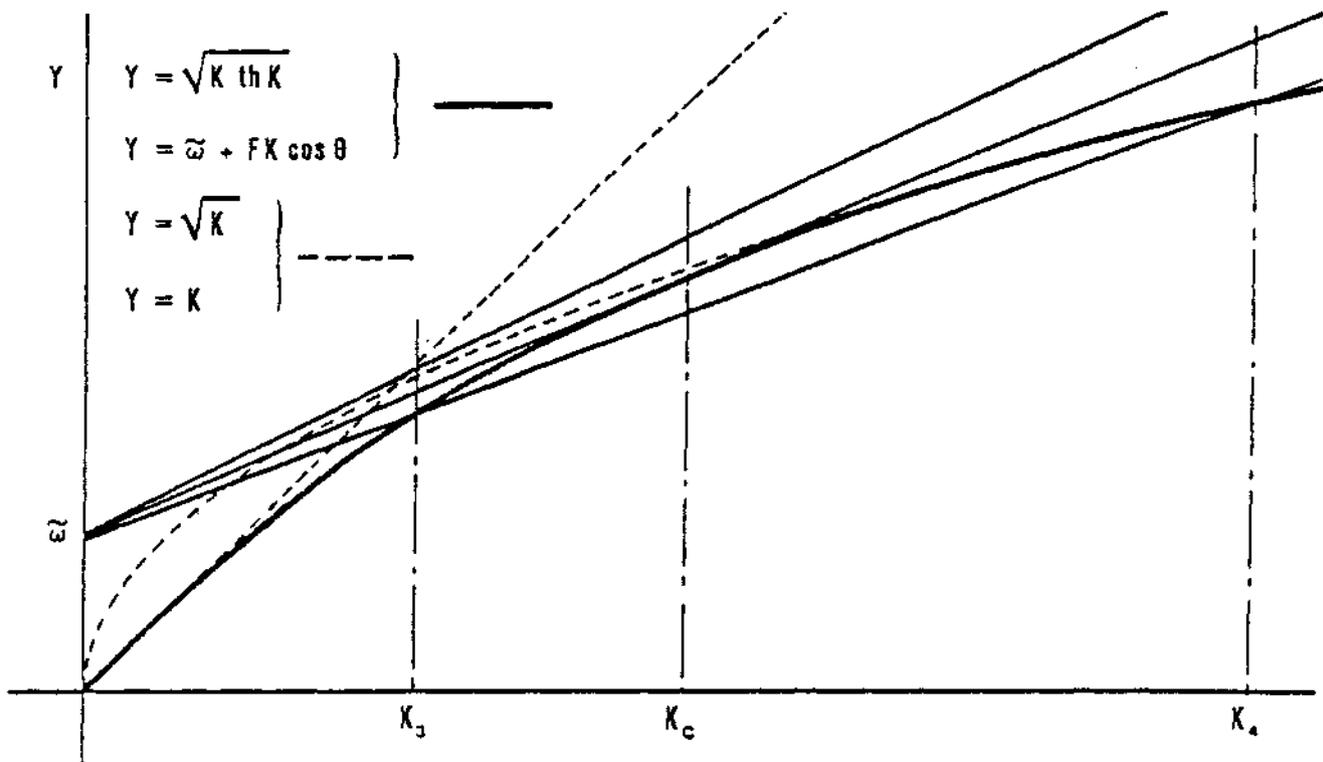


figure 6.b

La figure 6.b met en évidence l'existence de deux solutions réelles strictement positives dans le cas où $\cos \theta$ est inférieur à $\cos \theta_c$, d'une solution réelle double strictement positive lorsque $\cos \theta$ est égal à $\cos \theta_c$ et d'aucune solution réelle si $\cos \theta$ est supérieur à $\cos \theta_c$.

Dans le cas où $\cos \theta$ est nul, il ne reste plus qu'une seule solution réelle strictement positive.

De même que $\text{Re}\{D_1(\theta, K, \tilde{\omega})\}$, $\text{Re}\{D_2(\theta, K, \tilde{\omega})\}$ possède une infinité de zéros complexes qu'il n'est pas possible de déterminer analytiquement. K_3 et K_4 seront calculées par la même méthode que celle employée pour calculer K_1 et K_2 .

6.5.2 - Détermination du pôle double

La forme même des équations (6.28) laisse prévoir que la solution double ne dépend que de $\tilde{\omega}$, et que de la connaissance de $\tilde{\omega}$ et de K_c , il est possible de déduire la valeur θ_c de l'angle correspondant à K_c s'il existe.

Il y aura une solution de multiplicité deux si et seulement si $\text{Re}\{D_2(\theta, K, \tilde{\omega})\}$ et sa dérivée par rapport à K s'annulent simultanément, et donc s'il existe un angle θ compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ tel que :

$$(6.29) \quad 2F \cos \theta = \frac{bK}{\sqrt{K} \text{th} K} \left[1 + \frac{2K}{\text{sh} 2K} \right]$$

En multipliant les deux membres par K et en remplaçant $F K \cos \theta$ par son expression tirée de (6.28), nous obtenons la relation qui lie $\tilde{\omega}$ et K_c :

$$(6.30) \quad \tilde{\omega} = \frac{1}{2} \sqrt{K_c \text{th} K_c} \left[1 - \frac{2K_c}{\text{sh} 2K_c} \right]$$

6.5.3 - Etude de la nature des pôles en fonction de θ_c

Si nous substituons dans l'équation (6.28) prise avec le signe positif le deuxième membre de (6.30) à $\tilde{\omega}$, nous obtenons :

$$(6.31) \quad \cos \theta_c = \frac{1}{F} \frac{\sqrt{K_c \text{th} K_c}}{2K_c} \left[1 + \frac{2K_c}{\text{sh} 2K_c} \right] = \frac{1}{F} \frac{\sqrt{K_c \text{th} K_c} - \tilde{\omega}}{K_c}$$

Il n'existe donc un angle θ_c appartenant à l'intervalle d'intégration que si le second membre de l'expression (6.31) est inférieur ou égal à l'unité.

Le nombre de Strouhal critique v_c correspondant à la valeur unité de $\cos \theta_c$ peut être obtenu à partir des formules (6.30) et (6.31). Il s'écrit :

$$(6.32) \quad v_c = \frac{thK_c}{4} \left[1 - \left(\frac{2K_c}{sh2K_c} \right)^2 \right]$$

Le tableau 6.1 rassemble les différents résultats obtenus en fonction du nombre de Strouhal v .

Les figures 6.c et 6.d montrent respectivement l'évolution de v_c en fonction de $\omega \sqrt{\frac{h}{g}}$ et la division du plan $\omega \sqrt{\frac{l}{g}}, \frac{U}{\sqrt{gl}}$ en fonction du rapport $\sqrt{\frac{h}{l}}$.

tableau 6.1

$v = \tilde{\omega} \cdot F$	$0 < v < v_c$	$v = v_c$	$v_c < v$
$\cos \theta = 0$	Une seule racine réelle positive K_3		
$0 < \cos \theta < \cos \theta_c$	Deux racines réelles positives $K_3 < K_c < K_4$		
$\cos \theta = \cos \theta_c$		Une racine double réelle positive K_c	
$\cos \theta_c < \cos \theta$			Pas de racine réelle

6.5.4 - Détermination des signes des parties imaginaires des pôles

Dans le cas où la partie réelle du dénominateur de l'intégrand admet deux zéros réels, nous pouvons déterminer le signe de la partie imaginaire de chacun des pôles en linéarisant $D_2(\theta, K, \tilde{\varepsilon})$ aux voisinages de K_3 et de K_4 .

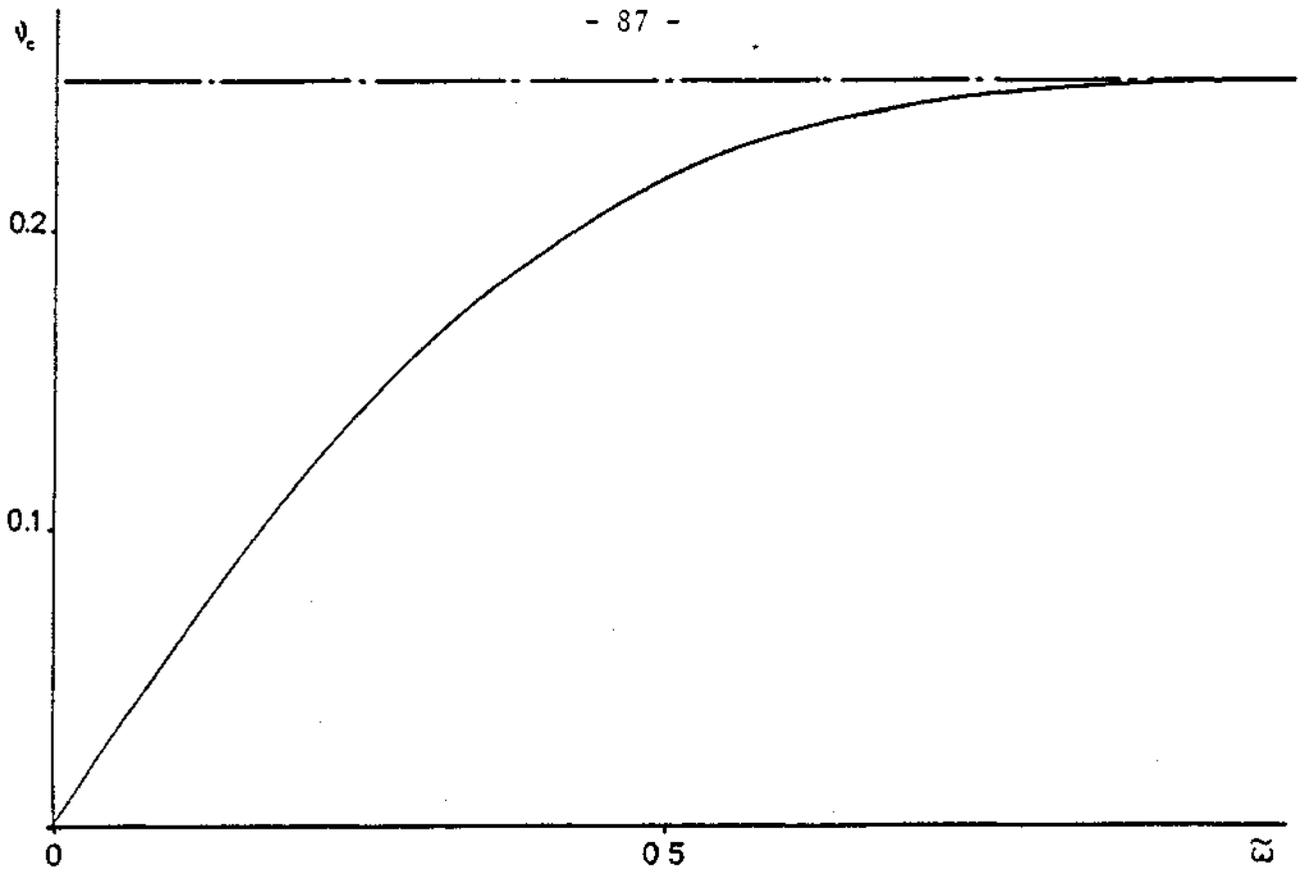


figure 6.c

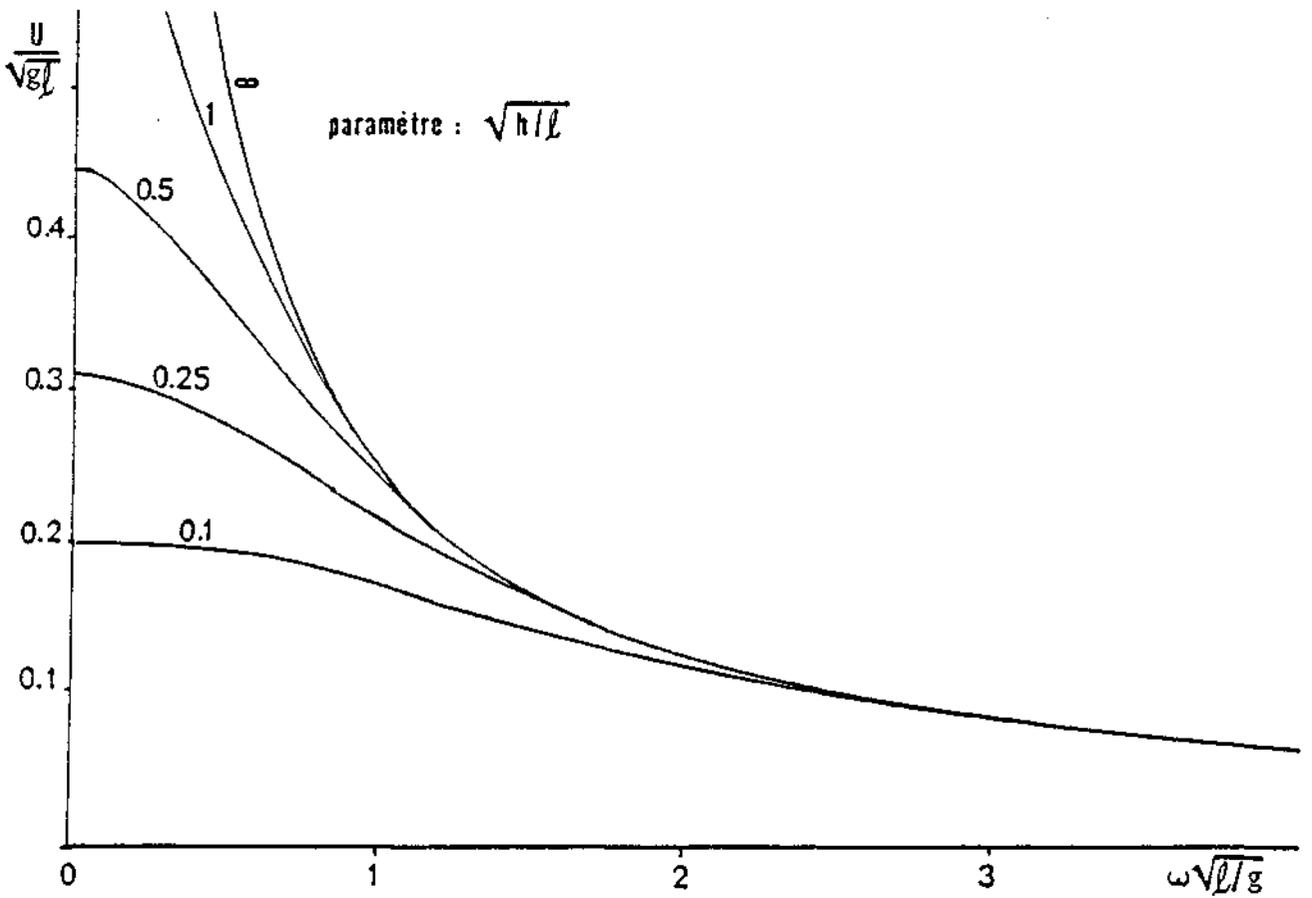


figure 6.d

$$(6.33) \quad D_2(\theta, K, \tilde{E}) \approx \frac{d}{dK} \operatorname{Re} \left\{ D_2(\theta, K, \tilde{E}) \right\}_{K_3} [K - K_3] + 2i\tilde{E} (\tilde{\omega} + FK_3 \cos \theta) \quad \text{au voisinage de } K_3$$

$$(6.34) \quad D_2(\theta, K, \tilde{E}) \approx \frac{d}{dK} \operatorname{Re} \left\{ D_2(\theta, K, \tilde{E}) \right\}_{K_4} [K - K_4] + 2i\tilde{E} (\tilde{\omega} + FK_4 \cos \theta) \quad \text{au voisinage de } K_4$$

ce qui peut s'écrire encore :

$$(6.35) \quad D_2(\theta, K, \tilde{E}) \approx \frac{d}{dK} \operatorname{Re} \left\{ D_2(\theta, K, \tilde{E}) \right\}_{K_3} [K - (K_3 + i_3(0))] \quad \text{au voisinage de } K_3$$

$$(6.36) \quad D_2(\theta, K, \tilde{E}) \approx \frac{d}{dK} \operatorname{Re} \left\{ D_2(\theta, K, \tilde{E}) \right\}_{K_4} [K - (K_4 - i_4(0))] \quad \text{au voisinage de } K_4$$

en désignant par $i_3(0)$ et $i_4(0)$ les termes imaginaires positifs infiniment petits suivants :

$$(6.37) \quad i_3(0) = - \frac{2i\tilde{E} (\tilde{\omega} + FK_3 \cos \theta)}{\frac{d}{dK} \operatorname{Re} \left\{ D_2(\theta, K, \tilde{E}) \right\}_{K_3}}$$

$$(6.38) \quad i_4(0) = + \frac{2i\tilde{E} (\tilde{\omega} + FK_4 \cos \theta)}{\frac{d}{dK} \operatorname{Re} \left\{ D_2(\theta, K, \tilde{E}) \right\}_{K_4}}$$

Lorsque la partie réelle de $D_2(\theta, K, \tilde{E})$ admet des zéros réels, les pôles de l'intégrand de $G_2'(M, M'; t)$ ont une partie réelle strictement positive et une partie imaginaire arbitrairement petite de signe positif pour K_3 et de signe négatif pour K_4 .

Dans le cas où le nombre de Strouhal est supérieur à v_c et où $\cos \theta$ est supérieur à $\cos \theta_c$, l'intégrand de $G_2'(M, M'; t)$ ne possède que des pôles complexes à parties imaginaires finies.

6.6 - INTEGRATION DE LA FONCTION $G'_0(M, M'; t)$

La partie de la fonction $G'_0(M, M'; t)$ que nous devons intégrer se présente sous la forme suivante :

$$(6.39) \quad -\frac{2}{\pi h} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} K(z+1) \operatorname{ch} K(z'+1)}{\operatorname{ch} K} e^{K[-1+i\Omega]} dK \right\}$$

Parmi les méthodes qui permettent d'intégrer analytiquement en fonction de la variable K , nous en avons choisi une qui conduit à des fonctions intégrables analytiquement par rapport à θ .

Considérons les deux identités suivantes⁽¹⁾ :

$$(6.40) \quad \operatorname{ch} K(z+1) \operatorname{ch} K(z'+1) = \frac{1}{4} \left[e^{K(z-z')} + e^{-K(z-z')} + e^{K(z+z'+2)} + e^{-K(z+z'+2)} \right]$$

$$(6.41) \quad \frac{1}{\operatorname{ch} K} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-(2n+1)K} \quad K > 0$$

L'intégrand de $G'_0(M, M'; t)$ peut s'écrire simplement :

$$(6.42) \quad \left[\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[e^{K[-2(n+1)+z-z'+i\Omega]} + e^{K[-2(n+1)-z+z'+i\Omega]} \right. \right. \\ \left. \left. + e^{K[-2n+z+z'+i\Omega]} + e^{K[-2(n+2)-z-z'+i\Omega]} \right] \right]$$

Cette expression admet pour primitive par rapport à la variable K :

$$(6.43) \quad \left[\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{e^{K[-2(n+1)+z-z'+i\Omega]}}{-2(n+1)+z-z'+i\Omega} + \frac{e^{K[-2(n+1)-z+z'+i\Omega]}}{-2(n+1)-z+z'+i\Omega} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{e^{K[-2n+z+z'+i\Omega]}}{-2n+z+z'+i\Omega} + \frac{e^{K[-2(n+2)-z-z'+i\Omega]}}{-2(n+2)-z-z'+i\Omega} \right] \right]$$

(1) Nous ne saurions utiliser directement la seconde identité puisque la série n'est pas convergente pour $K = 0$. Nous devons donc calculer d'abord sa primitive qui est convergente pour $K = 0$.

Le terme (6.39) prend alors la forme suivante :

$$(6.44) \quad -\frac{1}{2\pi h} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{-2(n+1)+Z-Z'+i\Omega} + \frac{1}{-2(n+1)-Z+Z'+i\Omega} + \frac{1}{-2n+Z+Z'+i\Omega} + \frac{1}{-2(n+2)-Z-Z'+i\Omega} \right] d\theta \right\}$$

Toutes ces fonctions s'intègrent par rapport à la variable θ en donnant des fonctions de la forme $\frac{1}{|MM'_n|}$ où les M'_n sont les images de M' obtenues par l'infinité de symétries par rapport à SL_n et F_n .

Cette méthode présente un inconvénient puisque la série alternée (6.44) converge lentement. Il est donc nécessaire de calculer un grand nombre de termes pour obtenir une précision satisfaisante.

Nous réduirons les temps de calcul en remplaçant la série (6.41) par une somme de fonctions exponentielles réelles obtenue au moyen d'un lissage /AN-1/. Nous aurons alors :

$$(6.45) \quad \frac{1}{\operatorname{ch} K} \approx \sum_{n=1}^{N_0} a_n e^{\lambda_n K}$$

La fonction $\frac{1}{\operatorname{ch} K}$ ayant une décroissance de même type que les exponentielles, six termes suffiront pour obtenir une excellente précision. L'expression (6.44) sera alors remplacée par :

$$(6.46) \quad -\frac{1}{2\pi h} \sum_{n=1}^{N_0} a_n \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} \left[e^{\kappa[\lambda_n-1+Z-Z']} + e^{\kappa[\lambda_n-1-Z+Z']} + e^{\kappa[\lambda_n+1+Z+Z']} + e^{\kappa[\lambda_n-3-Z-Z']} \right] e^{iK\Omega} dK \right\}$$

Le lissage étant réalisé une fois pour toutes, nous pouvons en choisir un qui a des exposants et des coefficients réels tels que tous les termes de (6.46) donnent lieu à des intégrales convergentes. Les formules (5.3) et (5.4) peuvent alors être utilisées après avoir effectué les changements de variables adéquats. Il vient :

$$(6.47) \quad G'_0(M, M'; t) = \left[\frac{1}{|MM'_1|} + \frac{1}{|MM'_2|} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_0} a_n \left(\frac{1}{|MM'_{n1}|} + \frac{1}{|MM'_{n2}|} + \frac{1}{|MM'_{n3}|} + \frac{1}{|MM'_{n4}|} \right) \right] \cos \omega t$$

avec :

$$(6.48) \quad \left[\begin{array}{l} z'_{n1} = z' + h(1-\lambda_n) \\ z'_{n2} = z' - h(1-\lambda_n) \\ z'_{n3} = -z' - h(1+\lambda_n) \\ z'_{n4} = -z' - h(3-\lambda_n) \end{array} \right.$$

6.7 - INTEGRATION DE LA FONCTION $G'_1(M, M'; t)$

La fonction $G'_1(M, M'; t)$ se présente sous la forme définie par la formule (6.18) du paragraphe 6.3 que nous rappelons ici :

$$G'_1(M, M'; t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[-\frac{1}{\pi h} \operatorname{Re} \left\{ e^{i\omega t} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} K(z+1) \operatorname{ch} K(z'+1) e^{iK\Omega} K dK}{\operatorname{ch}^2 K [(\tilde{\omega} - FK \cos \theta)^2 - K^2 h^2 - 2i\varepsilon(\tilde{\omega} - FK \cos \theta)]} \right\} \right]$$

L'intégration par rapport à la variable K n'est pas aussi immédiate que dans le cas où la profondeur est illimitée. En effet, toute recherche d'intégration purement analytique est rendue vaine par la présence de fonctions hyperboliques au sein du dénominateur, et il serait illusoire d'espérer réaliser une intégration purement numérique à cause de l'existence de pôles situés infiniment près de l'axe réel. Nous ne pourrions donc apporter une solution à ce problème qu'en séparant les difficultés.

Soit alors la décomposition suivante :

$$(6.49) \quad \frac{K}{\operatorname{ch}^2 K [(\tilde{\omega} - FK \cos \theta)^2 - K^2 h^2 - 2i\varepsilon(\tilde{\omega} - FK \cos \theta)]} = P_{10}(K) + P_{11}(K) + P_{12}(K)$$

avec :

$$(6.50) \quad \left[\begin{array}{l} P_{10}(K) = \frac{K}{\operatorname{ch}^2 K [(\tilde{\omega} - FK \cos \theta)^2 - K^2 h^2]} - \frac{A(K_1) e^{-2K}}{K - K_1} - \frac{A(K_2) e^{-2K}}{K - K_2} \\ P_{11}(K) = \frac{A(K_1) e^{-2K}}{K - K_1 + i_1^{(0)}} \\ P_{12}(K) = \frac{A(K_2) e^{-2K}}{K - K_2 + i_2^{(0)}} \end{array} \right.$$

Expressions dans lesquelles $A(K)$ est une fonction destinée à assurer à $P_{11}(K)$ et $P_{12}(K)$ un comportement adéquat aux voisinages des pôles. L'exponentielle e^{-2K} assure, pour sa part, à $P_{11}(K)$ et $P_{12}(K)$ un comportement analogue à celui de $\frac{1}{\text{ch}^2 K}$ quand K tend vers l'infini. Nous avons donc aux voisinages des pôles :

$$(6.51) \quad \frac{K}{\text{ch}^2 K \frac{d}{dK} \text{Re} \left\{ \mathcal{D}_1(\theta, \kappa, \bar{\epsilon}) \right\}_{\kappa_1} [K - \kappa_1]} = \frac{A(\kappa_1) e^{-2K}}{K - \kappa_1} \quad \text{au voisinage de } \kappa_1$$

$$(6.52) \quad \frac{K}{\text{ch}^2 K \frac{d}{dK} \text{Re} \left\{ \mathcal{D}_1(\theta, \kappa, \bar{\epsilon}) \right\}_{\kappa_2} [K - \kappa_2]} = \frac{A(\kappa_2) e^{-2K}}{K - \kappa_2} \quad \text{au voisinage de } \kappa_2$$

ce qui donne pour $A(K)$:

$$(6.53) \quad A(K) = \frac{K(1 + \text{ch} K)^2}{\frac{d}{dK} \text{Re} \left\{ \mathcal{D}_1(\theta, \kappa, \bar{\epsilon}) \right\}}$$

Il est alors possible de remplacer la fonction $P_{10}(K)$ qui est régulière, par une série d'exponentielles complexes au moyen d'un lissage, et d'intégrer analytiquement l'expression suivante en utilisant les résultats de la troisième annexe :

$$(6.54) \quad \text{ch} K(z+1) \text{ch} K(z'+1) e^{iK\Omega} \left[\sum_{n=1}^{N_1} a_n e^{\lambda_n K} + \frac{A(\kappa_1) e^{-2K}}{K - \kappa_1 + \lambda_1(\theta)} + \frac{A(\kappa_2) e^{-2K}}{K - \kappa_2 + \lambda_2(\theta)} \right]$$

L'égalité (6.40) nous permet alors de mettre $G'_1(M, M'; t)$ sous la forme ci-après :

$$(6.55) \quad \left[G'_1(M, M'; t) = \frac{1}{4\pi h} \text{Re} \left\{ e^{i\omega t} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \left[- \sum_{n=1}^{N_1} a_n \left(\frac{1}{\lambda_n + z - z' + i\Omega} + \frac{1}{\lambda_n - z + z' + i\Omega} + \frac{1}{\lambda_n + 2 + z + z' + i\Omega} + \frac{1}{\lambda_n - 2 - z - z' + i\Omega} \right) \right. \right. \right. \\ \left. \left. + A(\kappa_1) \left(G_1[\kappa_1, (z - z' - 2 + i\Omega)] + G_1[\kappa_1, (-z + z' - 2 + i\Omega)] + G_1[\kappa_1, (z + z' + i\Omega)] + G_1[\kappa_1, (-z - z' - 4 + i\Omega)] \right) \right. \right. \\ \left. \left. + A(\kappa_2) \left(G_1[\kappa_2, (z - z' - 2 + i\Omega)] + G_1[\kappa_2, (-z + z' - 2 + i\Omega)] + G_1[\kappa_2, (z + z' + i\Omega)] + G_1[\kappa_2, (-z - z' - 4 + i\Omega)] \right) \right] d\theta \right\}$$

Afin de simplifier l'écriture et de réduire l'intervalle d'intégration par rapport à la variable θ , nous effectuerons les changements de variables suivants :

$$(6.56) \quad \left[\begin{array}{cccc} \xi_1 = Z - Z' + i\Omega & \xi_2 = -Z + Z' + i\Omega & \xi_3 = Z + Z' + i\Omega & \xi_4 = -Z - Z' + i\Omega \\ \xi'_1 = Z - Z' + i\Omega' & \xi'_2 = -Z + Z' - i\Omega' & \xi'_3 = Z + Z' + i\Omega' & \xi'_4 = -Z - Z' + i\Omega' \end{array} \right.$$

Nous obtenons alors :

$$(6.57) \quad \left[\begin{array}{l} G'_1(M, M'; t) = \frac{1}{4\pi h} \operatorname{Re} \left\{ e^{i\omega t} \int_0^{+\pi i} \left[\sum_{n=1}^{M_1} a_n \left(\frac{1}{\lambda_n + \xi_1} + \frac{1}{\lambda_n + \xi_2} + \frac{1}{\lambda_n + 2 + \xi_3} + \frac{1}{\lambda_n - 2 + \xi_4} + \frac{1}{\lambda_n + \xi'_1} + \frac{1}{\lambda_n + \xi'_2} + \frac{1}{\lambda_n + 2 + \xi'_3} + \frac{1}{\lambda_n - 2 + \xi'_4} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + A(K_1) \left(G_1(K_1, \xi_1 - 2) + G_1(K_1, \xi_2 - 2) + G_1(K_1, \xi_3) + G_1(K_1, \xi_4 - 4) + G_1(K_1, \xi'_1 - 2) + G_1(K_1, \xi'_2 - 2) + G_1(K_1, \xi'_3) + G_1(K_1, \xi'_4 - 4) \right) \right. \right. \\ \left. \left. + A(K_2) \left(G_1(K_2, \xi_1 - 2) + G_1(K_2, \xi_2 - 2) + G_1(K_2, \xi_3) + G_1(K_2, \xi_4 - 4) + G_1(K_2, \xi'_1 - 2) + G_1(K_2, \xi'_2 - 2) + G_1(K_2, \xi'_3) + G_1(K_2, \xi'_4 - 4) \right) \right] d\theta \right\} \end{array} \right.$$

En ce qui concerne l'intégration par rapport à la variable θ , nous utiliserons la même méthode numérique que dans le cas où la profondeur est illimitée.

Il est à noter que dans le cas présent les coefficients a_n et les exposants λ_n sont fonctions de la variable θ et qu'il n'est donc pas possible d'utiliser les formules (5.3) et (5.4) pour intégrer la série.

6.8 - INTÉGRATION DE LA FONCTION $G'_2(M, M'; t)$

La fonction $G'_2(M, M'; t)$ se présente sous la forme définie par la formule (6.18) du paragraphe 6.3 que nous rappelons ici :

$$G'_2(M, M'; t) = \lim_{\tilde{\varepsilon} \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{\pi h} \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\omega t} \int_{-\pi i}^{+\pi i} d\theta \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} K(Z+1) \operatorname{ch} K(Z'+1) e^{iK\Omega} K dK}{\operatorname{ch}^2 K [(\tilde{\omega} + FK \cos \theta)^2 - K^2] K + 2i\tilde{\varepsilon} (\tilde{\omega} + FK \cos \theta)} \right\} \right]$$

L'intégrand de $G'_2(M, M'; t)$ ayant zéro, un ou deux pôles réels suivant les valeurs de ν et de $\cos \theta$, l'intégration est plus délicate que dans le cas

précédent. Plusieurs cas doivent être envisagés.

6.8.1 - Cas des racines réelles ($\cos \theta < \cos \theta_c$)

Lorsqu'il existe deux racines réelles, il est possible d'utiliser le même procédé que celui mis en oeuvre pour intégrer $G'_1(M, M'; t)$. Nous obtenons après avoir décomposé l'intégrand :

$$(6.58) \quad f(\theta, K) = \text{ch} K(z+1) \text{ch} K(z-1) e^{iK\Omega} \left[\sum_{n=1}^{N_2} a_n e^{\lambda_n K} + \frac{B(K_3) e^{-2K}}{K - K_3 - L_3(\theta)} + \frac{B(K_4) e^{-2K}}{K - K_4 + L_4(\theta)} \right]$$

expression dans laquelle la fonction lissée est :

$$(6.59) \quad P_{2D}(K) = \frac{K}{\text{ch}^2 K [(\tilde{\omega} + FK \cos \theta)^2 - K \text{th} K]} - \frac{B(K_3) e^{-2K}}{K - K_3} - \frac{B(K_4) e^{-2K}}{K - K_4}$$

avec :

$$(6.60) \quad B(K) = \frac{K(1 + \text{th} K)^2}{\frac{d}{dK} \text{Re} \{D_2(\theta, K, \tilde{\epsilon})\}}$$

6.8.2 - Cas où il n'existe pas de racine réelle, mais où il y a des racines complexes très près de l'axe réel ($\cos \theta_c < \cos \theta < \cos \theta'_c$)

Lorsque $\cos \theta$ est supérieur à $\cos \theta_c$, l'intégrand ne possède pas de pôle réel, mais il admet, à l'instar du problème en profondeur illimité, au moins deux pôles complexes. Quand $\cos \theta$ est peu différent de $\cos \theta_c$, ces deux pôles sont très proches de l'axe réel, ce qui rend difficile l'obtention d'un lissage convenable puisque l'intégrand possède un pic fini mais très localisé. Il est donc souhaitable d'isoler ces pôles complexes et de les intégrer séparément. Leur détermination par une méthode analytique ou numérique simple étant impossible, nous les remplacerons par les racines de l'équation obtenue en linéarisant $K \text{th} K$ au voisinage de K_c . Ce procédé fournira de bons résultats dans la mesure où l'approximation sera d'autant meilleure que $\cos \theta$ sera plus proche de $\cos \theta_c$, et où l'influence des pôles (vrais ou linéarisés) s'estompera quand la différence $\cos \theta - \cos \theta_c$ augmentera.

La linéarisation de $K \operatorname{th} K$ au voisinage de K_c permet d'écrire :

$$(6.61) \quad K \operatorname{th} K \approx K_c \operatorname{th} K_c + \frac{d}{dK} K \operatorname{th} K \Big|_{K_c} [K - K_c] \quad \text{au voisinage de } K_c$$

L'équation linéarisée est alors :

$$(6.62) \quad K^2 (F \cos \theta)^2 - K [\operatorname{th} K_c + K_c (1 - \operatorname{th}^2 K_c) - 2 \tilde{\omega} F \cos \theta] + \tilde{\omega}^2 + K_c^2 (1 - \operatorname{th}^2 K_c) = 0$$

Les coefficients de cette équation peuvent être transformés en remarquant que, lorsque θ et K prennent respectivement les valeurs θ_c et K_c , la partie réelle de $D_2(\theta, K, \hat{\varepsilon})$ et sa dérivée par rapport à K s'annulent. D'où les relations suivantes :

$$(6.63) \quad \operatorname{th} K_c + K_c (1 - \operatorname{th}^2 K_c) - 2 \tilde{\omega} F \cos \theta = 2F [\tilde{\omega} (\cos \theta_c - \cos \theta) + F K_c \cos^2 \theta_c]$$

$$(6.64) \quad K_c^2 (1 - \operatorname{th}^2 K_c) = K_c^2 F^2 \cos^2 \theta_c - \tilde{\omega}^2 = K_c \operatorname{th} K_c \cdot \frac{2K_c}{\operatorname{sh} 2K_c}$$

Ce qui permet de mettre le discriminant de (6.62) sous la forme (6.65) :

$$(6.65) \quad \Delta = -4F^2 K_c \operatorname{th} K_c (\cos \theta - \cos \theta_c) \left(\cos \theta_c + \frac{2K_c}{\operatorname{sh} 2K_c} \cos \theta \right)$$

Cette expression est toujours négative puisque $\cos \theta_c$ est inférieur à $\cos \theta$.

L'équation (6.62) possède donc deux racines complexes qui sont :

$$(6.66) \quad Z'_3 = \frac{\cos \theta_c \sqrt{K_c \operatorname{th} K_c} - \tilde{\omega} \cos \theta - i \sqrt{K_c \operatorname{th} K_c (\cos \theta - \cos \theta_c) \left(\cos \theta_c + \frac{2K_c}{\operatorname{sh} 2K_c} \cos \theta \right)}}{F \cos^2 \theta}$$

$$(6.67) \quad Z'_4 = \frac{\cos \theta_c \sqrt{K_c \operatorname{th} K_c} - \tilde{\omega} \cos \theta + i \sqrt{K_c \operatorname{th} K_c (\cos \theta - \cos \theta_c) \left(\cos \theta_c + \frac{2K_c}{\operatorname{sh} 2K_c} \cos \theta \right)}}{F \cos^2 \theta}$$

Nous pouvons alors décomposer l'intégrand comme précédemment :

$$(6.68) \quad \frac{K}{\operatorname{ch}^2 K [(\tilde{\omega} + FK \cos \theta)^2 - K \operatorname{th} K]} = P_{20}(K) + P_{21}(i\tilde{\omega}) + P_{22}(K)$$

avec :

$$(6.69) \quad \left[\begin{aligned} P_{20}(K) &= \frac{K}{\operatorname{ch}^2 K [(\tilde{\omega} + FK \cos \theta)^2 - K \operatorname{th} K]} - \frac{K [1 + \operatorname{th}(\operatorname{Re} Z'_3)]^2 e^{-2K}}{F^2 \cos^2 \theta [K - Z'_3][K - Z'_4]} \\ P_{21}(K) &= + \frac{[1 + \operatorname{th}(\operatorname{Re} Z'_3)]^2}{F^2 \cos^2 \theta [Z'_3 - Z'_4]} \frac{Z'_3 e^{-2K}}{K - Z'_3} \\ P_{22}(K) &= - \frac{[1 + \operatorname{th}(\operatorname{Re} Z'_3)]^2}{F^2 \cos^2 \theta [Z'_3 - Z'_4]} \frac{Z'_4 e^{-2K}}{K - Z'_4} \end{aligned} \right.$$

En remplaçant $P_{20}(K)$ par une série d'exponentielles, nous sommes ramenés à intégrer l'expression suivante :

$$(6.70) \quad f(\theta, K) = \operatorname{ch} K(z+1) \operatorname{ch} K(z'+1) e^{iK\Omega} \left[\sum_{n=1}^{N'_2} a_n e^{\lambda_n K} + \frac{[1 + \operatorname{th}(\operatorname{Re} Z'_3)]^2}{F^2 \cos^2 \theta [Z'_3 - Z'_4]} \left(\frac{Z'_3 e^{-2K}}{K - Z'_3} - \frac{Z'_4 e^{-2K}}{K - Z'_4} \right) \right]$$

6.8.3 - Cas où il n'existe pas de racine réelle, et où les racines complexes sont loin de l'axe réel ($\cos \theta'_c < \cos \theta$)

Lorsque l'intégrand ne possède pas de pôle réel, et que les pôles complexes sont suffisamment éloignés de l'axe réel, il est possible de le remplacer totalement par une série d'exponentielles.

$$(6.71) \quad \frac{K}{\operatorname{ch}^2 K [(\tilde{\omega} + FK \cos \theta)^2 - K \operatorname{th} K]} = \sum_{n=1}^{N'_2} a_n e^{\lambda_n K}$$

Il suffit alors d'intégrer l'expression suivante :

$$(6.72) \quad f(\theta, K) = \operatorname{ch} K(z+1) \operatorname{ch} K(z'+1) e^{iK\Omega} \sum_{n=1}^{N'_2} a_n e^{\lambda_n K}$$

6.8.4 - Etude particulière au voisinage de θ_c

L'intégration numérique présente au voisinage de θ_c des difficultés analogues à celles que nous avons rencontrées dans le cas où la profondeur est illimitée. Nous devons donc réaliser une intégration analytique locale sur un intervalle $[\theta_c - \alpha_c, \theta_c + \alpha_c]$.

De même qu'au paragraphe 6.8.2, nous isolerons les pôles linéarisés (K'_3 et K'_4 pour $\cos \theta$ inférieur à $\cos \theta_c$, Z'_3 et Z'_4 pour $\cos \theta$ supérieur à $\cos \theta_c$) et remplacerons la partie restante par une série d'exponentielles.

Nous aurons donc à intégrer sur l'intervalle $[\theta_c - \alpha_c, \theta_c]$ la fonction suivante :

$$(6.73) \quad f(\theta, K) = \text{ch}K(z+1)\text{ch}K(z'+1)e^{iK\Omega} \left[\sum_{n=1}^{N_1} a_n e^{\lambda_n K} + \frac{(1+\text{th}K_c)^2}{F^2 \cos^2 \theta (z'_3 - z'_4)} \left(\frac{z'_3 e^{-2K}}{K - z'_3} - \frac{z'_4 e^{-2K}}{K - z'_4} \right) \right]$$

et sur l'intervalle $[\theta_c, \theta_c + \alpha_c]$:

$$(6.74) \quad f(\theta, K) = \text{ch}K(z+1)\text{ch}K(z'+1)e^{iK\Omega} \left[\sum_{n=1}^{M_2} a_n e^{\lambda_n K} + \frac{(1+\text{th}K_c)^2}{F^2 \cos^2 \theta (K'_3 - K'_4)} \left(\frac{K'_3 e^{-2K}}{K - K'_3 - i_3(\theta)} - \frac{K'_4 e^{-2K}}{K - K'_4 + i_4(\theta)} \right) \right]$$

La série d'exponentielles sera intégrée numériquement. Quant à la participation des pôles, elle s'écrit :

$$(6.75) \quad \sqrt{K_c \left[1 - \frac{2K_c}{\text{sh} 2K_c} \right]} \frac{(1+\text{th}K_c)^2 \pi \sqrt{\alpha_c} (1-i)}{4F \cos \theta_c \sqrt{\nu} \sin \theta_c} \left[e^{K_c(\xi_1-2)} + e^{K_c(\xi_2-2)} + e^{K_c \xi_3} + e^{K_c(\xi_4-4)} \right]$$

Dans le cas où $\sin \theta_c$ est nul, nous retrouvons une intégrale divergente, de même qu'au cinquième chapitre.

6.8.5 - Forme générale de $G'_2(M, M'; t)$

La fonction $G'_2(M, M'; t)$ se présente après intégration par rapport à la variable K sous la forme générale suivante (6.76) :

$$\begin{aligned}
 G_2'(M, M'; t) = & -\frac{1}{4\pi h} \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\omega t} \left[\int_{\theta_c}^{\theta_c + d_c} \sum_{n=1}^{N_2'} a_n \left(\frac{1}{\lambda_n + \zeta_1} + \frac{1}{\lambda_n + \zeta_2} + \frac{1}{\lambda_n + 2 + \zeta_3} + \frac{1}{\lambda_n - 2 + \zeta_4} + \frac{1}{\lambda_n + \zeta_1'} + \frac{1}{\lambda_n + \zeta_2'} + \frac{1}{\lambda_n + 2 + \zeta_3'} + \frac{1}{\lambda_n - 2 + \zeta_4'} \right) d\theta \right. \right. \\
 & + \int_{\theta_c}^{\theta_c + d_c} \sum_{n=1}^{N_2'} a_n \left(\frac{1}{\lambda_n + \zeta_1} + \frac{1}{\lambda_n + \zeta_2} + \frac{1}{\lambda_n + 2 + \zeta_3} + \frac{1}{\lambda_n - 2 + \zeta_4} + \frac{1}{\lambda_n + \zeta_1'} + \frac{1}{\lambda_n + \zeta_2'} + \frac{1}{\lambda_n + 2 + \zeta_3'} + \frac{1}{\lambda_n - 2 + \zeta_4'} \right) \\
 & + \frac{[1 + t h (\operatorname{Re} Z_1')]}{F \cos^2 \theta [Z_1' Z_4']} \left(Z_1' \{ G_1[Z_1'(\zeta_1 - 2)] + G_1[Z_1'(\zeta_2 - 2)] + G_1[Z_1' \zeta_3] + G_1[Z_1'(\zeta_4 - 4)] + G_1[Z_1'(\zeta_1' - 2)] + G_1[Z_1'(\zeta_2' - 2)] + G_1[Z_1' \zeta_3'] + G_1[Z_1'(\zeta_4' - 4)] \} \right. \\
 & \left. - Z_4' \{ G_3[Z_4'(\zeta_1 - 2)] + G_3[Z_4'(\zeta_2 - 2)] + G_3[Z_4' \zeta_3] + G_3[Z_4'(\zeta_4 - 4)] + G_3[Z_4'(\zeta_1' - 2)] + G_3[Z_4'(\zeta_2' - 2)] + G_3[Z_4' \zeta_3'] + G_3[Z_4'(\zeta_4' - 4)] \} \right) \\
 & + \int_{\theta_c + d_c}^{\theta_c + d_c} \sum_{n=1}^{N_2'} a_n \left(\frac{1}{\lambda_n + \zeta_1} + \frac{1}{\lambda_n + \zeta_2} + \frac{1}{\lambda_n + 2 + \zeta_3} + \frac{1}{\lambda_n - 2 + \zeta_4} + \frac{1}{\lambda_n + \zeta_1'} + \frac{1}{\lambda_n + \zeta_2'} + \frac{1}{\lambda_n + 2 + \zeta_3'} + \frac{1}{\lambda_n - 2 + \zeta_4'} \right) d\theta \\
 & + \sqrt{k_c \left[1 - \frac{2k_c}{\operatorname{sh} 2k_c} \right]} \frac{(1 + t h k_c)^2 \pi \sqrt{\alpha_c} (1 - i)}{F \cos \theta_c \sqrt{V} \sin \theta_c} \left(e^{\frac{k_c(\zeta_1 - 2)}{}} + e^{\frac{k_c(\zeta_2 - 2)}{}} + e^{\frac{k_c \zeta_3}{}} + e^{\frac{k_c(\zeta_4 - 4)}{}} + e^{\frac{k_c(\zeta_1' - 2)}{}} + e^{\frac{k_c(\zeta_2' - 2)}{}} + e^{\frac{k_c \zeta_3'}{}} + e^{\frac{k_c(\zeta_4' - 4)}{}} \right) \\
 & + \int_{\theta_c + d_c}^{\theta_c + d_c} \sum_{n=1}^{N_2'} a_n \left(\frac{1}{\lambda_n + \zeta_1} + \frac{1}{\lambda_n + \zeta_2} + \frac{1}{\lambda_n + 2 + \zeta_3} + \frac{1}{\lambda_n - 2 + \zeta_4} + \frac{1}{\lambda_n + \zeta_1'} + \frac{1}{\lambda_n + \zeta_2'} + \frac{1}{\lambda_n + 2 + \zeta_3'} + \frac{1}{\lambda_n - 2 + \zeta_4'} \right) \\
 & + B(k_3) \left(G_3[k_3(\zeta_1 - 2)] + G_3[k_3(\zeta_2 - 2)] + G_3[k_3 \zeta_3] + G_3[k_3(\zeta_4 - 4)] + G_3[k_3(\zeta_1' - 2)] + G_3[k_3(\zeta_2' - 2)] + G_3[k_3 \zeta_3'] + G_3[k_3(\zeta_4' - 4)] \right) \\
 & + B(k_4) \left(G_1[k_4(\zeta_1 - 2)] + G_1[k_4(\zeta_2 - 2)] + G_1[k_4 \zeta_3] + G_1[k_4(\zeta_4 - 4)] + G_1[k_4(\zeta_1' - 2)] + G_1[k_4(\zeta_2' - 2)] + G_1[k_4 \zeta_3'] + G_1[k_4(\zeta_4' - 4)] \right) \left. \right] d\theta.
 \end{aligned}$$



Chapitre 7

ÉTUDE ASYMPTOTIQUE DE LA FONCTION DE GREEN ET ANALYSE DU CHAMP DE VAGUES LOINTAIN DANS LE CAS OÙ LA PROFONDEUR EST ILLIMITÉE

Nous avons déterminé la fonction de Green au moyen d'une méthode heuristique, sans pouvoir lui imposer un comportement à l'infini. Il est donc nécessaire de faire une étude asymptotique de $G'(M, M'; t)$ et de vérifier que la fonction obtenue possède, à l'infini, un comportement compatible avec les hypothèses qui ont présidé à l'établissement des équations intégrales.

La fonction de Green représente, à un facteur numérique près, le potentiel des vitesses engendré par une source ponctuelle. Nous pourrions donc déduire de notre analyse la description du champ de vagues lointain engendré par cette dernière.

7.1 - POTENTIEL PROCHE ET POTENTIEL LOINTAIN

Le potentiel des vitesses engendré par une source ponctuelle s'écrit :

$$(7.1) \quad \Phi(M; t) = \Phi_0(M; t) + \Phi_1(M; t) + \Phi_2(M; t)$$

avec :

$$\Phi_0(M; t) = -\frac{Q^*}{4\pi} \left[\frac{1}{|MM'|} - \frac{1}{|MN'|} \right] \cos \omega t$$
$$\Phi_1(M; t) = -\frac{Q^*}{4\pi^2 t} \operatorname{Re} \left\{ e^{i\omega t} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{K_1 G_1(K_1 \xi) - K_2 G_1(K_2 \xi)}{\sqrt{1+4Y \cos \theta}} d\theta \right\}$$

$$\Phi_2(M;t) = -\frac{Q^*}{4\pi^2 l} \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\omega t} \left[\int_{-\pi/2}^{-\theta_c} \frac{K_3 G_3(K_3 \xi) - K_4 G_1(K_4 \xi)}{\sqrt{1-4\nu \cos \theta}} d\theta \right. \right. \\ - \int_{-\theta_c}^{-\theta'_c} i \frac{Z_3 G_1(Z_3 \xi) - Z_4 G_3(Z_4 \xi)}{\sqrt{4\nu \cos \theta - 1}} d\theta \\ - \int_{-\theta'_c}^{-\theta''_c} i \frac{Z_3 G_2(Z_3 \xi) - Z_4 G_2(Z_4 \xi)}{\sqrt{4\nu \cos \theta - 1}} d\theta \\ - \int_{-\theta''_c}^{-\theta_c} i \frac{Z_3 G_1(Z_3 \xi) - Z_4 G_3(Z_4 \xi)}{\sqrt{4\nu \cos \theta - 1}} d\theta \\ \left. \left. + \int_{+\theta_c}^{+\pi/2} \frac{K_3 G_3(K_3 \xi) - K_4 G_1(K_4 \xi)}{\sqrt{1-4\nu \cos \theta}} d\theta \right] \right\}$$

Les comportements asymptotiques des fonctions G1, G2 et G3 (Annexe 3) permettent de séparer les termes qui décroissent, a priori, au moins comme $\frac{1}{|MM'|}$, des autres. Les premiers sont généralement appelés potentiel proche et les seconds potentiel lointain (1). Dans le cas où ν est supérieur à ν_c , nous écrivons le potentiel proche sous la forme suivante :

$$(7.2) \quad \Phi_p(M;t) = \Phi_0(M;t) - \frac{Q^*}{4\pi^2 l} \operatorname{Re} \left\{ e^{i\omega t} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{K_3 G_2(K_3 \xi) - K_4 G_2(K_4 \xi)}{\sqrt{1+4\nu \cos \theta}} d\theta \right\} \\ - \frac{Q^*}{4\pi^2 l} \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\omega t} \left[\int_{-\pi/2}^{-\theta_c} \frac{K_3 G_2(K_3 \xi) - K_4 G_2(K_4 \xi)}{\sqrt{1-4\nu \cos \theta}} d\theta \right. \right. \\ - \int_{-\theta_c}^{+\theta_c} \frac{Z_3 G_2(Z_3 \xi) - Z_4 G_2(Z_4 \xi)}{\sqrt{4\nu \cos \theta - 1}} d\theta \\ \left. \left. + \int_{+\theta_c}^{+\pi/2} \frac{K_3 G_2(K_3 \xi) - K_4 G_2(K_4 \xi)}{\sqrt{1-4\nu \cos \theta}} d\theta \right] \right\}$$

(1) Notons toutefois qu'ainsi défini le potentiel lointain peut encore contenir des termes dont la décroissance est en $\frac{1}{|MM'|}$.

Dans le cas où v est inférieur à v_c , les deux derniers termes n'existent pas, et $-\theta_c$ est remplacé par $\pi/2$ dans la deuxième intégrale.

Quant au potentiel lointain, nous aurons :

$$(7.3) \quad \Phi_e(M;t) = \Phi_{1e}(M;t) + \Phi_{2e}(M;t)$$

avec, en désignant par β l'angle pour lequel $\Omega = (X-X') \cos \theta + (Y-Y') \sin \theta$ s'annule (1) :

$$(7.4) \quad \Phi_{1e}(M;t) = \frac{Q^*}{2\eta l} \operatorname{Re} \left\{ i e^{i\omega t} \left[\int_{-\pi/2}^{\beta} \frac{K_1 e^{K_1^* z} d\theta}{\sqrt{1-4v \cos \theta}} - \int_{-\pi/2}^{\beta} \frac{K_2 e^{K_2^* z} d\theta}{\sqrt{1-4v \cos \theta}} \right] \right\} \quad v > v_c$$

$$(7.5) \quad \Phi_{2e}(M;t) = -\frac{Q^*}{2\eta l} \operatorname{Re} \left\{ i e^{-i\omega t} \left[\int_{\beta}^{+\pi/2} \frac{K_3 e^{K_3^* z} d\theta}{\sqrt{1-4v \cos \theta}} + \int_{-\pi/2}^{\beta} \frac{K_4 e^{K_4^* z} d\theta}{\sqrt{1-4v \cos \theta}} \right] \right\} \quad v < v_c$$

Dans le cas où v est supérieur à v_c , l'expression de $\Phi_{2e}(M;t)$ dépend essentiellement de β . Il vient, en effet :

$$(7.6) \quad \begin{aligned} \Phi_{2e}(M;t) &= -\frac{Q^*}{2\eta l} \operatorname{Re} \left\{ i e^{-i\omega t} \left[\int_{\beta}^{-\theta_c} \frac{K_3 e^{K_3^* z} d\theta}{\sqrt{1-4v \cos \theta}} + \int_{+\theta_c}^{+\pi/2} \frac{K_3 e^{K_3^* z} d\theta}{\sqrt{1-4v \cos \theta}} + \int_{-\pi/2}^{\beta} \frac{K_4 e^{K_4^* z} d\theta}{\sqrt{1-4v \cos \theta}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_{-\theta_c}^{-\theta_c'} \frac{Z_3 e^{Z_3^* z} d\theta}{\sqrt{4v \cos \theta - 1}} + \int_{+\theta_c}^{+\theta_c'} \frac{Z_3 e^{Z_3^* z} d\theta}{\sqrt{4v \cos \theta - 1}} \right] \right\} \quad \beta \in [-\frac{\pi}{2}, -\theta_c] \\ \Phi_{2e}(M;t) &= -\frac{Q^*}{2\eta l} \operatorname{Re} \left\{ i e^{-i\omega t} \left[\int_{-\theta_c}^{\beta} \frac{Z_3 e^{Z_3^* z} d\theta}{\sqrt{4v \cos \theta - 1}} + \int_{+\theta_c}^{+\pi/2} \frac{K_3 e^{K_3^* z} d\theta}{\sqrt{1-4v \cos \theta}} + \int_{-\pi/2}^{-\theta_c} \frac{K_4 e^{K_4^* z} d\theta}{\sqrt{1-4v \cos \theta}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_{-\theta_c}^{-\theta_c'} \frac{Z_4 e^{Z_4^* z} d\theta}{\sqrt{4v \cos \theta - 1}} + \int_{+\theta_c}^{+\theta_c'} \frac{Z_4 e^{Z_4^* z} d\theta}{\sqrt{4v \cos \theta - 1}} \right] \right\} \quad \beta \in [-\theta_c, -\theta_c'] \\ \Phi_{2e}(M;t) &= -\frac{Q^*}{2\eta l} \operatorname{Re} \left\{ i e^{-i\omega t} \left[\int_{-\theta_c}^{-\theta_c'} \frac{Z_3 e^{Z_3^* z} d\theta}{\sqrt{4v \cos \theta - 1}} + \int_{+\theta_c}^{+\pi/2} \frac{K_3 e^{K_3^* z} d\theta}{\sqrt{1-4v \cos \theta}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_{-\pi/2}^{-\theta_c} \frac{K_4 e^{K_4^* z} d\theta}{\sqrt{1-4v \cos \theta}} + \int_{+\theta_c}^{+\theta_c'} \frac{Z_4 e^{Z_4^* z} d\theta}{\sqrt{4v \cos \theta - 1}} \right] \right\} \quad \beta \in [-\theta_c', +\theta_c'] \end{aligned}$$

(1) Par la suite, il sera plus aisé d'écrire $\Omega = R \sin(\theta - \beta)$ en posant alors :

$$R = \sqrt{(X-X')^2 + (Y-Y')^2}, \quad \cos \beta = \frac{Y-Y'}{R} \quad \text{et} \quad \sin \beta = -\frac{X-X'}{R}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{12}(M;t) &= -\frac{Q^*}{2\pi l} \operatorname{Re} \left\{ i e^{-i\omega t} \left[\int_{-\theta_c}^{-\theta_c'} \frac{z_3 e^{z_3^5} d\theta}{\sqrt{4\nu \cos \theta - 1}} + \int_{\theta_c'}^{\beta} \frac{z_3 e^{z_3^5} d\theta}{\sqrt{4\nu \cos \theta - 1}} + \int_{+\theta_c}^{+\pi/2} \frac{k_2 e^{k_2^5} d\theta}{\sqrt{1-4\nu \cos \theta}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_{-\theta_c}^{-\theta_c'} \frac{k_4 e^{k_4^5} d\theta}{\sqrt{1-4\nu \cos \theta}} + \int_{\theta_c'}^{\beta} \frac{z_4 e^{z_4^5} d\theta}{\sqrt{4\nu \cos \theta - 1}} \right] \right\} \quad \beta \in [\theta_c', +\theta_c] \\ \Phi_{22}(M;t) &= -\frac{Q^*}{2\pi l} \operatorname{Re} \left\{ i e^{-i\omega t} \left[\int_{-\theta_c}^{-\theta_c'} \frac{z_3 e^{z_3^5} d\theta}{\sqrt{4\nu \cos \theta - 1}} + \int_{\theta_c'}^{\beta} \frac{z_3 e^{z_3^5} d\theta}{\sqrt{4\nu \cos \theta - 1}} + \int_{\beta}^{+\pi/2} \frac{k_2 e^{k_2^5} d\theta}{\sqrt{1-4\nu \cos \theta}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_{-\theta_c}^{-\theta_c'} \frac{k_4 e^{k_4^5} d\theta}{\sqrt{1-4\nu \cos \theta}} + \int_{\theta_c'}^{\beta} \frac{k_4 e^{k_4^5} d\theta}{\sqrt{1-4\nu \cos \theta}} \right] \right\} \quad \beta \in [\theta_c', +\frac{\pi}{2}] \end{aligned}$$

Le comportement des vagues proches étant connu par définition, seule la deuxième partie relative au comportement des vagues lointaines nécessite une étude approfondie. Puisqu'il s'agit d'analyser les termes qui décroissent moins vite que la fonction $\frac{1}{|MM'|}$, nous pouvons réaliser un développement asymptotique par la méthode de la phase stationnaire de Cauchy et Kelvin dont nous avons rappelé les principaux résultats dans l'annexe 4.

7.2 - DEVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE DE $\Phi_{12}(M;t)$

La fonction $\Phi_{12}(M;t)$ peut être mise sous la forme suivante qui est bien adaptée à l'application du principe de la phase stationnaire :

$$(7.7) \quad \Phi_{12}(M;t) = \frac{Q^*}{2\pi l} \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\omega t} \left[\int_{-\pi/2}^{\beta} f_1(\theta) e^{iR_{g_1}(\theta)} d\theta + \int_{-\pi/2}^{\beta} f_2(\theta) e^{iR_{g_2}(\theta)} d\theta \right] \right\}$$

avec :

$$\begin{aligned} f_1(\theta) &= i \frac{K_1 e^{K_1(z+z')}}{\sqrt{1+4\nu \cos \theta}} & ; & \quad g_1(\theta) = K_1 \sin(\theta-\beta) \\ f_2(\theta) &= -i \frac{K_2 e^{K_2(z+z')}}{\sqrt{1+4\nu \cos \theta}} & ; & \quad g_2(\theta) = K_2 \sin(\theta-\beta) \end{aligned}$$

Suivant les valeurs des paramètres β et ν , les fonctions $g_1(\theta)$ et $g_2(\theta)$ possèdent ou non des maxima, minima, ou des points d'inflexion à tangente horizontale qui déterminent le comportement de $\Phi_{12}(M;t)$ et de ses dérivées à l'infini. Nous devons donc étudier les conditions d'existence de zéros

des fonctions $g_1'(\theta)$ et $g_2'(\theta)$, ainsi que les signes de leurs dérivées en ces points.

7.2.1 - Etude des zéros de $g_1'(\theta)$

La fonction $g_1(\theta)$ s'écrit sous sa forme développée :

$$(7.8) \quad g_1(\theta) = \frac{1+2\gamma\cos\theta - \sqrt{1+4\gamma\cos\theta}}{2F^2\cos^2\theta} \sin(\theta-\beta)$$

et admet pour dérivée :

$$(7.9) \quad g_1'(\theta) = \frac{-1}{2F^2\cos^3\theta\sqrt{1+4\gamma\cos\theta}} \left\{ 2\sin\theta\sin(\theta-\beta) \left[(1+3\gamma\cos\theta) - \sqrt{1+4\gamma\cos\theta} (1+\gamma\cos\theta) \right] + \cos\theta\cos(\theta-\beta) \left[(1+4\gamma\cos\theta) - \sqrt{1+4\gamma\cos\theta} (1+2\gamma\cos\theta) \right] \right\}$$

Cette expression peut être transformée en utilisant les identités suivantes :

$$\operatorname{tg}(\theta-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\theta \operatorname{tg}\beta} \quad ; \quad \frac{1 + \operatorname{tg}\theta \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}^2\theta} - 1 = \frac{1}{2} \left[\frac{\cos(2\theta-\beta)}{\cos\beta} - 1 \right]$$

et devient alors :

$$(7.10) \quad g_1'(\theta) = \frac{2\gamma^2\cos\beta}{F^2[1+4\gamma\cos\theta + (1+2\gamma\cos\theta)\sqrt{1+4\gamma\cos\theta}]\cos\theta} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\cos(2\theta-\beta)}{\cos\beta} - 1 \right] + \sqrt{1+4\gamma\cos\theta} \right\}$$

Le premier facteur ne s'annule jamais quand β est différent de $\pm \pi/2$. L'étude des zéros de $g_1'(\theta)$ se ramène donc à celle des zéros du terme entre parenthèses, sauf pour les deux bornes du domaine d'intégration pour lesquelles une étude locale est nécessaire.

Quand θ tend vers $-\pi/2$, $g_1'(\theta)$ possède un développement limité en fonction de $(\theta + \frac{\pi}{2})$. Ce dernier s'écrit au deuxième ordre près dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} + \varepsilon[$:

$$(7.11) \quad g_1'(\theta) = \tilde{\omega}^2 [2\gamma\cos\beta - \sin\beta] + \tilde{\omega}^2 [(1-2\gamma^2)\cos\beta + 4\gamma\sin\beta] (\theta + \frac{\pi}{2}) + o(\theta + \frac{\pi}{2})^2$$

La dérivée de la fonction $g_1(\theta)$ a donc pour valeur lorsque θ est égal à $-\pi/2$:

$$(7.12) \quad g_1'(-\frac{\pi}{2}) = \tilde{\omega}^2 [2\nu \cos \beta - \sin \beta]$$

et ne s'annule que lorsque β prend la valeur β_1 définie par la relation $\text{tg} \beta_1 = 2\nu$.

La dérivée seconde de $g_1(\theta)$ est en ce même point :

$$(7.13) \quad g_1''(-\frac{\pi}{2}) = \tilde{\omega}^2 [(1-4\nu^2) \cos \beta + 4\nu \sin \beta]$$

et ne s'annule que lorsque $\text{tg} \beta$ prend la valeur $\frac{10\nu^2-1}{4\nu}$. Il convient de remarquer que cet angle et β_1 coïncident quand ν est égal à $1/\sqrt{2}$.

Quand θ tend vers β , $g_1'(\theta)$ admet pour limite strictement positive $K_1(\beta)$, quel que soit β appartenant à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$.

En ce qui concerne les zéros de $g_1'(\theta)$ dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \beta[$, nous devons étudier l'équation (7.14).

$$(7.14) \quad h_1(\theta) = h_2(\theta)$$

$$\text{avec : } \left\{ \begin{array}{ll} h_1(\theta) = \frac{1}{2} \left[\frac{\cos(2\theta - \beta)}{\cos \beta} - 1 \right] & ; \quad h_1'(\theta) = -\frac{\sin(2\theta - \beta)}{\cos \beta} \\ h_2(\theta) = -\sqrt{1 + 4\nu \cos \theta} & ; \quad h_2'(\theta) = \frac{2\nu \sin \theta}{\sqrt{1 + 4\nu \cos \theta}} \end{array} \right.$$

Puisque nous ne nous intéressons ici qu'à l'existence de solutions en fonction des paramètres β et ν , une étude graphique nous permettra de conclure. La mise en oeuvre d'une telle méthode est aisée dans la mesure où $h_1(\theta)$ ne dépend que de β et $h_2(\theta)$ ne dépend que de ν . Les différents cas rencontrés sont mis en évidence sur la figure 7.a. Il est clair, en particulier, que pour ν supérieur à $1/\sqrt{2}$, il existe un angle β_1' appartenant à l'intervalle ouvert $]-\frac{\pi}{2}, 0[$ tel que $g_1'(\theta)$ possède un zéro double.

La figure 7.c montre l'évolution de β_1 et β_1' en fonction du nombre de Strouhal.

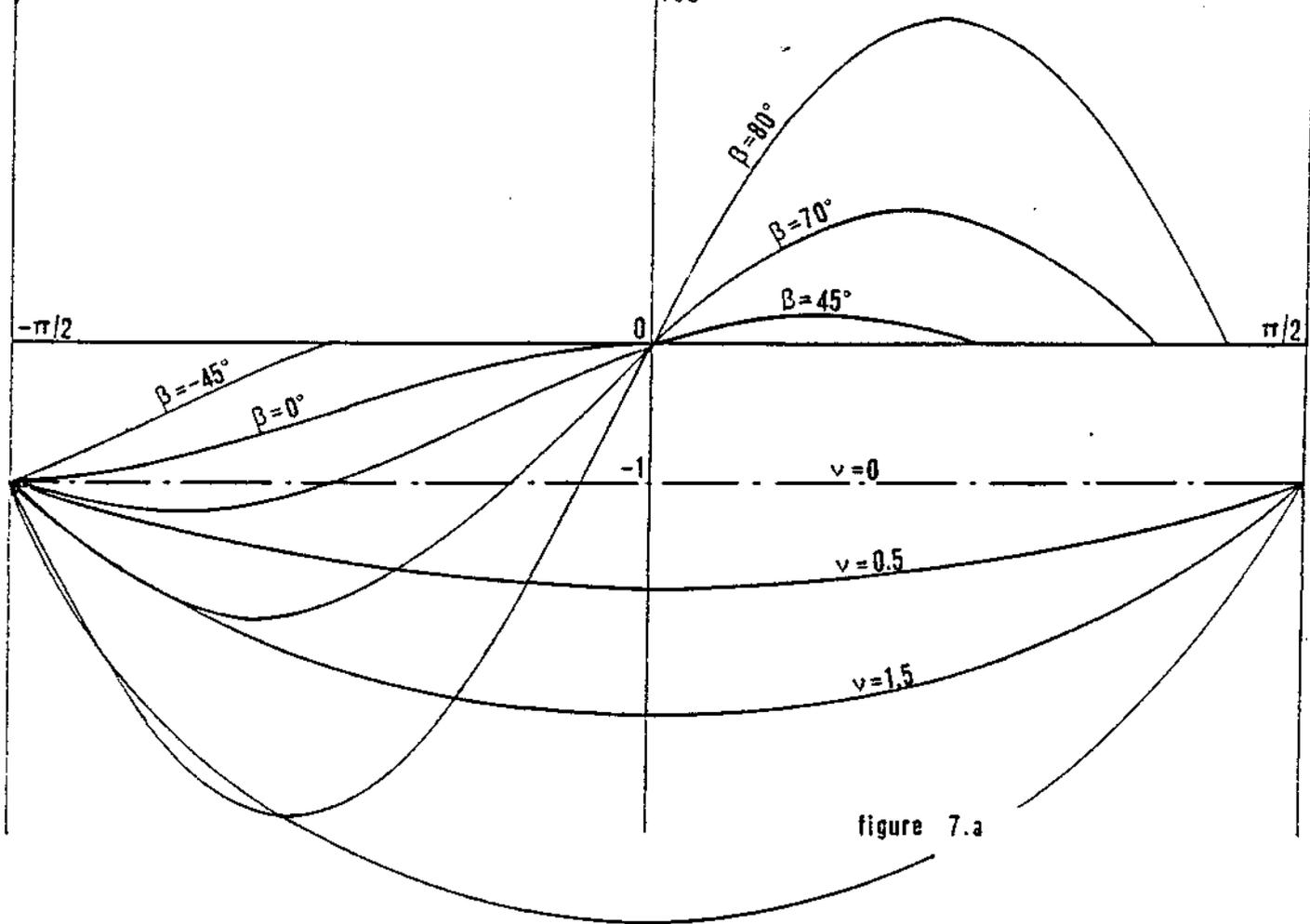


figure 7.a

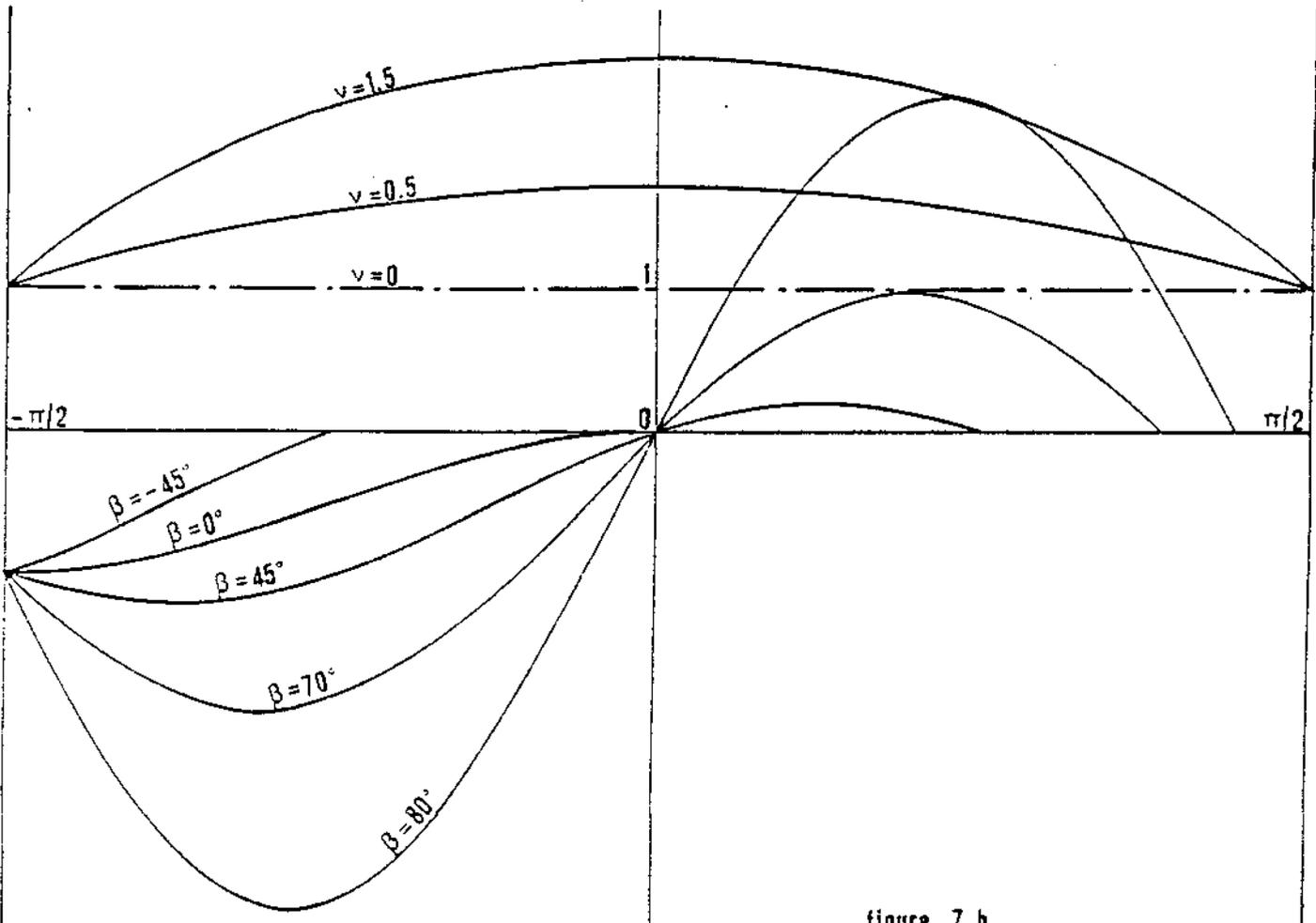


figure 7.b

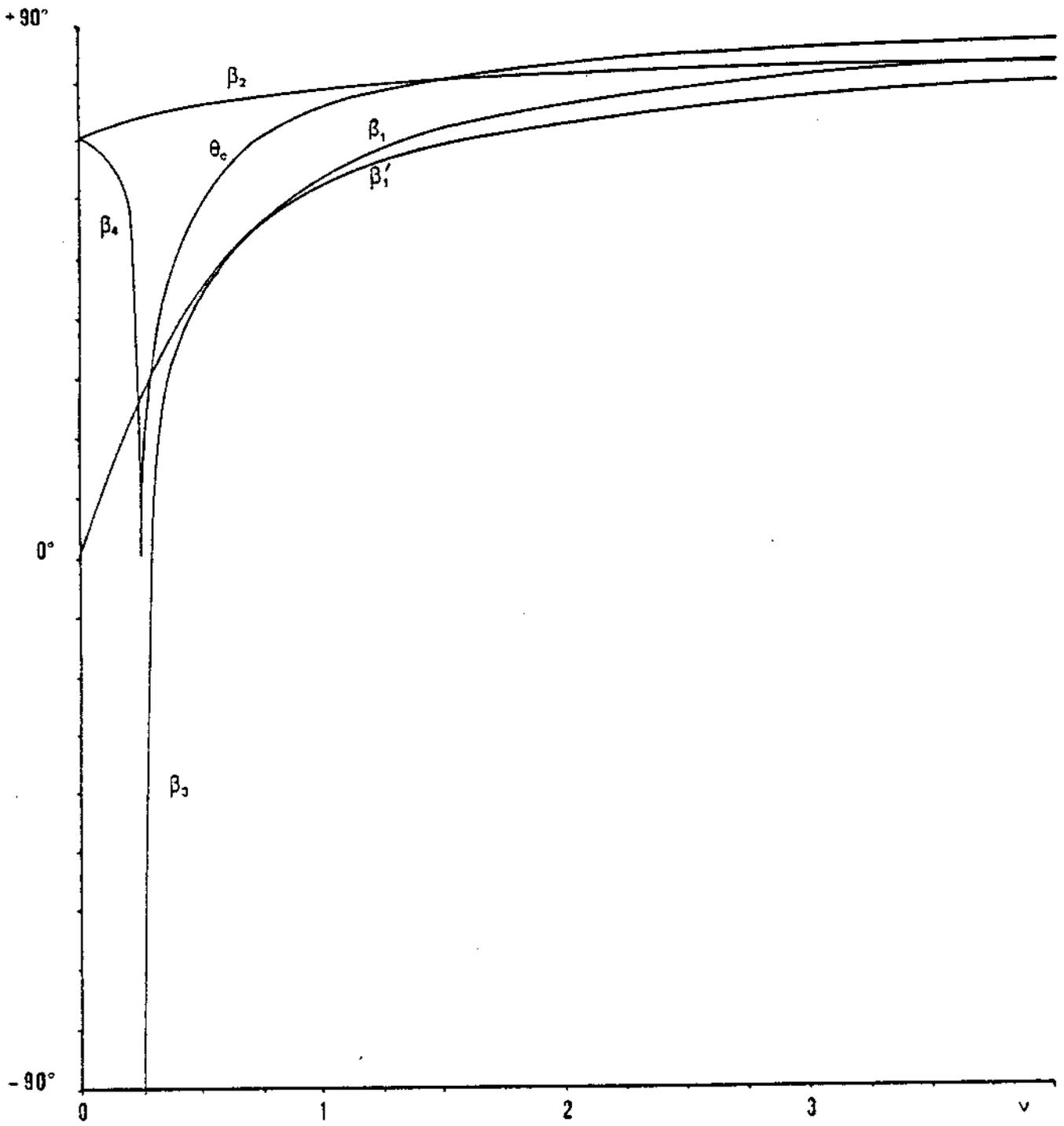


figure 7.c

L'ensemble des résultats obtenus est consigné sur la figure 7.h.

7.2.2 - Etude des zéros de $g_2'(\theta)$

La fonction $g_2(\theta)$ se présente sous la forme développée suivante :

$$(7.15) \quad g_2(\theta) = \frac{1 + 2V \cos \theta + \sqrt{1 + 4V \cos \theta}}{2F^2 \cos^2 \theta} \sin(\theta - \beta)$$

La dérivée de $g_2(\theta)$ par rapport à θ se déduit de celle de $g_1(\theta)$ en changeant le signe qui précède les termes sous radicaux. Il vient alors :

$$(7.16) \quad g_2'(\theta) = \frac{2V^2 \cos \beta}{F^2 [1 + 4V \cos \theta - (1 + 2V \cos \theta) \sqrt{1 + 4V \cos \theta}] \cos \theta} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\cos(2\theta - \beta)}{\cos \beta} - 1 \right] - \sqrt{1 + 4V \cos \theta} \right\}$$

De même que précédemment, le premier facteur ne s'annule que pour β égal à $\pm \pi/2$, et ne présente d'infinitude que lorsque θ est égal à $\pm \pi/2$. L'étude des zéros est donc réduite à celle des zéros du second facteur, sauf pour les deux bornes du domaine d'intégration pour lesquelles une étude locale demeure indispensable.

Quand θ tend vers $-\pi/2$, $g_2'(\theta)$ possède un développement limité en fonction de $(\theta + \frac{\pi}{2})$ qui s'écrit dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} + \epsilon[$:

$$(7.17) \quad g_2'(\theta) = \frac{1}{F^2 (\theta + \frac{\pi}{2})^3} \left[2 \cos \beta + (\sin \beta + 2V \cos \beta) (\theta + \frac{\pi}{2}) + o \left((\theta + \frac{\pi}{2})^2 \right) \right]$$

$g_2'(\theta)$ n'a donc pas de limite finie quand θ tend vers $-\pi/2$, et n'est donc jamais nulle en ce point.

Quand θ tend vers β (différent de $\pm \pi/2$), $g_2'(\theta)$ admet pour limite $K_2(\beta)$ qui est toujours strictement positif. Si β est égal à $\pm \pi/2$, $g_2'(\theta)$ ne possède pas de limite finie.

En ce qui concerne les zéros de $g_2'(\theta)$ dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \beta[$, nous devons étudier l'équation suivante :

$$(7.18) \quad h_1(\theta) = -h_2(\theta)$$

Nous aurons à nouveau recours à une étude graphique. La figure 7.b montre que l'équation (7.18) n'admet de solution dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \beta[$

que si β est supérieur ou égal à l'angle β_2 pour lequel il existe θ_2 vérifiant :

$$\left| \begin{array}{l} h_1(\theta_2) = -h_2(\theta_2) \\ h'_1(\theta_2) = -h'_2(\theta_2) \end{array} \right.$$

En particulier, quand ν tend vers zéro, la valeur limite de $\text{tg}\beta_2$ est $\sqrt{8}$, c'est-à-dire que β_2 tend vers l'angle de Kelvin β_K . Quand ν est strictement positif, β_2 est supérieur à β_K . La figure 7.c montre l'évolution de β_2 .

Les résultats obtenus sont rassemblés sur la figure 7.h.

7.3 - DEVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE DE $\phi_{2L}(M;t)$

La fonction $\phi_{2L}(M;t)$ a une formulation qui dépend de la valeur du nombre de Strouhal. Nous étudierons donc séparément les différents cas.

7.3.1 - Cas où ν est inférieur à 1/4

Quand ν est inférieur à ν_c , $\phi_{2L}(M;t)$ peut s'écrire sous la forme suivante, adaptée à l'application de la phase stationnaire.

$$(7.19) \quad \phi_{2L}(M;t) = -\frac{Q^*}{2\pi L} \text{Re} \left\{ e^{-i\omega t} \left[\int_{\beta}^{+\pi/2} f_3(\theta) e^{iRg_3(\theta)} d\theta + \int_{-\pi/2}^{\beta} f_4(\theta) e^{iRg_4(\theta)} d\theta \right] \right\}$$

avec :

$$f_3(\theta) = i \frac{K_3 e^{K_3(z+z')}}{\sqrt{1-4\nu \cos \theta}} \quad ; \quad g_3(\theta) = K_3 \sin(\theta - \beta)$$

$$f_4(\theta) = i \frac{K_4 e^{K_4(z+z')}}{\sqrt{1-4\nu \cos \theta}} \quad ; \quad g_4(\theta) = K_4 \sin(\theta - \beta)$$

De même que précédemment, nous devons étudier l'existence de zéros de $g_3'(\theta)$ et $g_4'(\theta)$ en fonction des paramètres β et ν .

7.3.1.1 - Etude des zéros de $g_3'(\theta)$

La fonction $g_3(\theta)$ s'écrit sous la forme développée suivante :

$$(7.20) \quad g_3'(\theta) = \frac{1 - 2\nu \cos \theta - \sqrt{1 - 4\nu \cos \theta}}{2F^2 \cos^2 \theta} \sin(\theta - \beta)$$

La dérivée de $g_3(\theta)$ par rapport à θ se déduit de celle de $g_1(\theta)$ en changeant le signe qui précède les termes contenant v . Il vient alors :

$$(7.21) \quad g_3'(\theta) = \frac{2v^2 \cos \beta}{F^2 [1 - 4v \cos \theta + (1 - 2v \cos \theta) \sqrt{1 - 4v \cos \theta}] \cos \theta} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\cos(2\theta - \beta)}{\cos \beta} - 1 \right] + \sqrt{1 - 4v \cos \theta} \right\}$$

Le premier facteur ne s'annule jamais quand β est différent de $\pm \pi/2$. L'étude des zéros de $g_3'(\theta)$ se ramène donc à celle des zéros du terme entre parenthèses, sauf pour les deux bornes du domaine d'intégration pour lesquelles une étude locale est nécessaire.

Quand θ tend vers β , $g_3'(\theta)$ admet pour limite strictement positive $K_3(\beta)$, quel que soit β appartenant à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$.

Quand θ tend vers $\pi/2$, $g_3'(\theta)$ possède un développement limité en fonction de $(\frac{\pi}{2} - \theta)$ qui s'écrit dans l'intervalle $]\frac{\pi}{2} - \epsilon, \frac{\pi}{2}]$:

$$(7.22) \quad g_3'(\theta) = -\tilde{\omega}^2 [2v \cos \beta - \sin \beta] + \tilde{\omega}^2 [(1 - 4v^2) \cos \beta + 4v \sin \beta] (\frac{\pi}{2} - \theta) + o(\frac{\pi}{2} - \theta)^2$$

La dérivée de la fonction $g_3(\theta)$ a donc pour valeur lorsque θ est égal à $\pi/2$:

$$(7.23) \quad g_3'(\frac{\pi}{2}) = -\tilde{\omega}^2 [2v \cos \beta - \sin \beta]$$

et ne s'annule que lorsque β prend la valeur β_1 précédemment définie. La dérivée seconde de $g_3(\theta)$ est en ce même point :

$$(7.24) \quad g_3''(\frac{\pi}{2}) = -\tilde{\omega}^2 [(1 - 4v^2) \cos \beta + 4v \sin \beta]$$

et reste strictement négative pour tout v inférieur à $1/4$.

En ce qui concerne les zéros de $g_3'(\theta)$ dans l'intervalle ouvert $]\beta, \frac{\pi}{2}[$, nous devons étudier les solutions de l'expression (7.25).

$$(7.25) \quad h_1(\theta) = h_2(\theta)$$

avec :

$$h_1(\theta) = -\sqrt{1 - 4v \cos \theta} \quad ; \quad h_2'(\theta) = -\frac{2v \sin \theta}{\sqrt{1 - 4v \cos \theta}}$$

Les différents cas rencontrés lors de l'étude graphique sont mis en évidence sur la figure 7.d.

L'ensemble des résultats obtenus ont été rassemblés sur la figure 7.h.

7.3.1.2 - Etude des zéros de $g_4'(\theta)$

La fonction $g_4(\theta)$ se présente sous la forme développée suivante :

$$(7.26) \quad g_4(\theta) = \frac{1 - 2\nu \cos \theta + \sqrt{1 - 4\nu \cos \theta}}{2F^2 \cos^2 \theta} \sin(\theta - \beta)$$

La dérivée de $g_4(\theta)$ se déduit de celle de $g_1(\theta)$ en changeant les signes qui précèdent les termes contenant ν et les termes sous radicaux. Il vient alors :

$$(7.27) \quad g_4'(\theta) = \frac{2\nu^2 \cos \beta}{F^2 [1 - 4\nu \cos \theta - (1 - 2\nu \cos \theta) \sqrt{1 - 4\nu \cos \theta}] \cos \theta} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\cos(2\theta - \beta)}{\cos \beta} - 1 \right] - \sqrt{1 - 4\nu \cos \theta} \right\}$$

De même que précédemment, le premier facteur ne s'annule que pour β égal à $\pm \pi/2$, et ne présente d'infinitude que lorsque θ est égal à $\pm \pi/2$. L'étude des zéros est donc réduite à celles des zéros du second facteur, sauf pour les bornes du domaine d'intégration pour lesquelles une étude locale demeure indispensable.

Quand θ tend vers $-\pi/2$, $g_4'(\theta)$ possède un développement limité en fonction de $(\theta + \frac{\pi}{2})$ qui s'écrit dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} + \varepsilon[$:

$$(7.28) \quad g_4'(\theta) = \frac{1}{F^2 (\theta + \frac{\pi}{2})^3} \left[2 \cos \beta + (\sin \beta - 2 \cos \beta) (\theta + \frac{\pi}{2}) + o \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right)^2 \right]$$

$g_4'(\theta)$ n'a donc pas de limite finie quand θ tend vers $-\pi/2$, et n'est donc jamais nulle en ce point.

Quand θ tend vers β (différent de $\pm \pi/2$), $g_4'(\theta)$ admet pour limite $K_4(\beta)$ qui est toujours strictement positif. Si β est égal à $\pm \pi/2$, $g_4'(\theta)$ ne possède pas de limite finie.

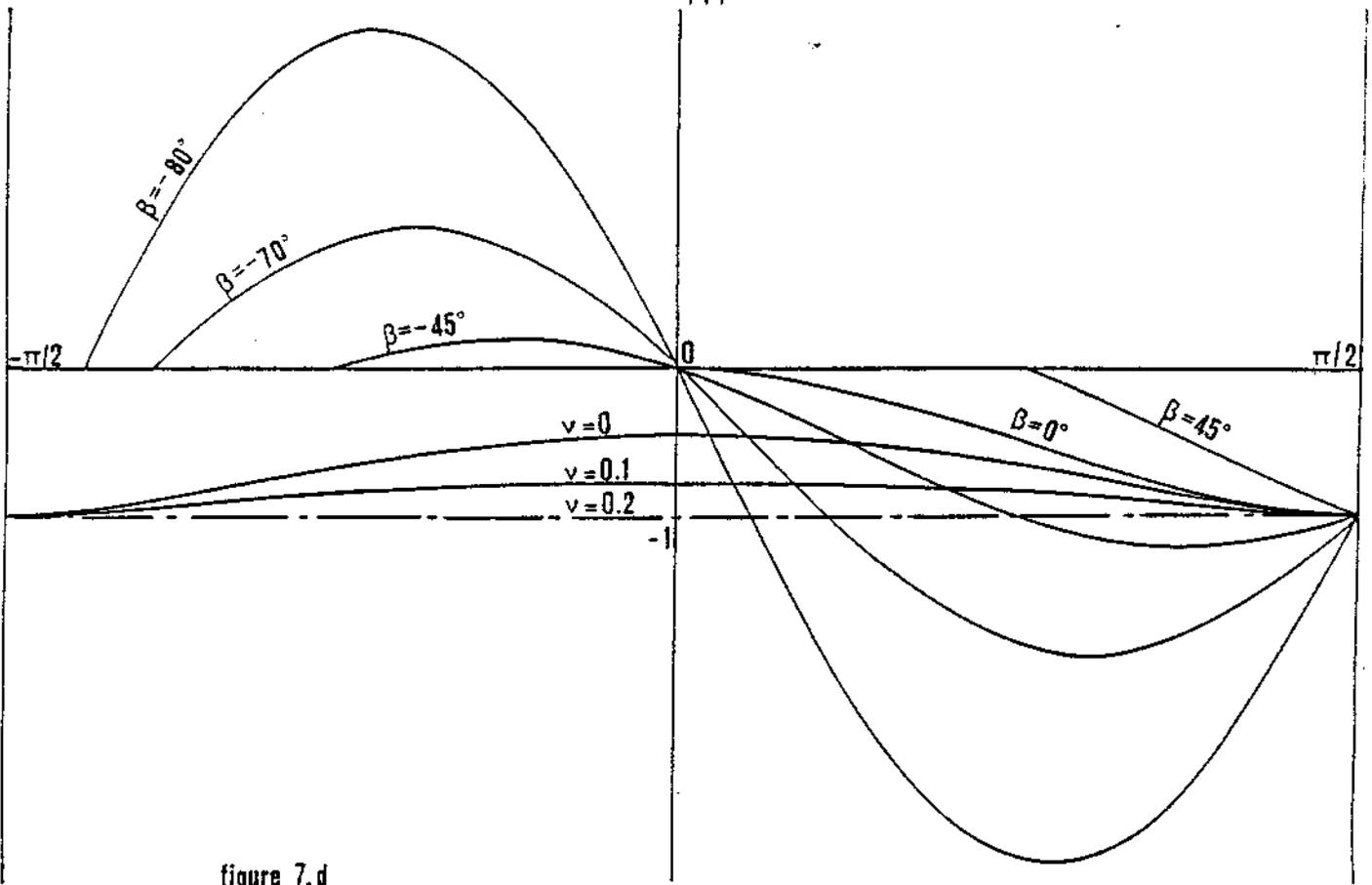


figure 7.d

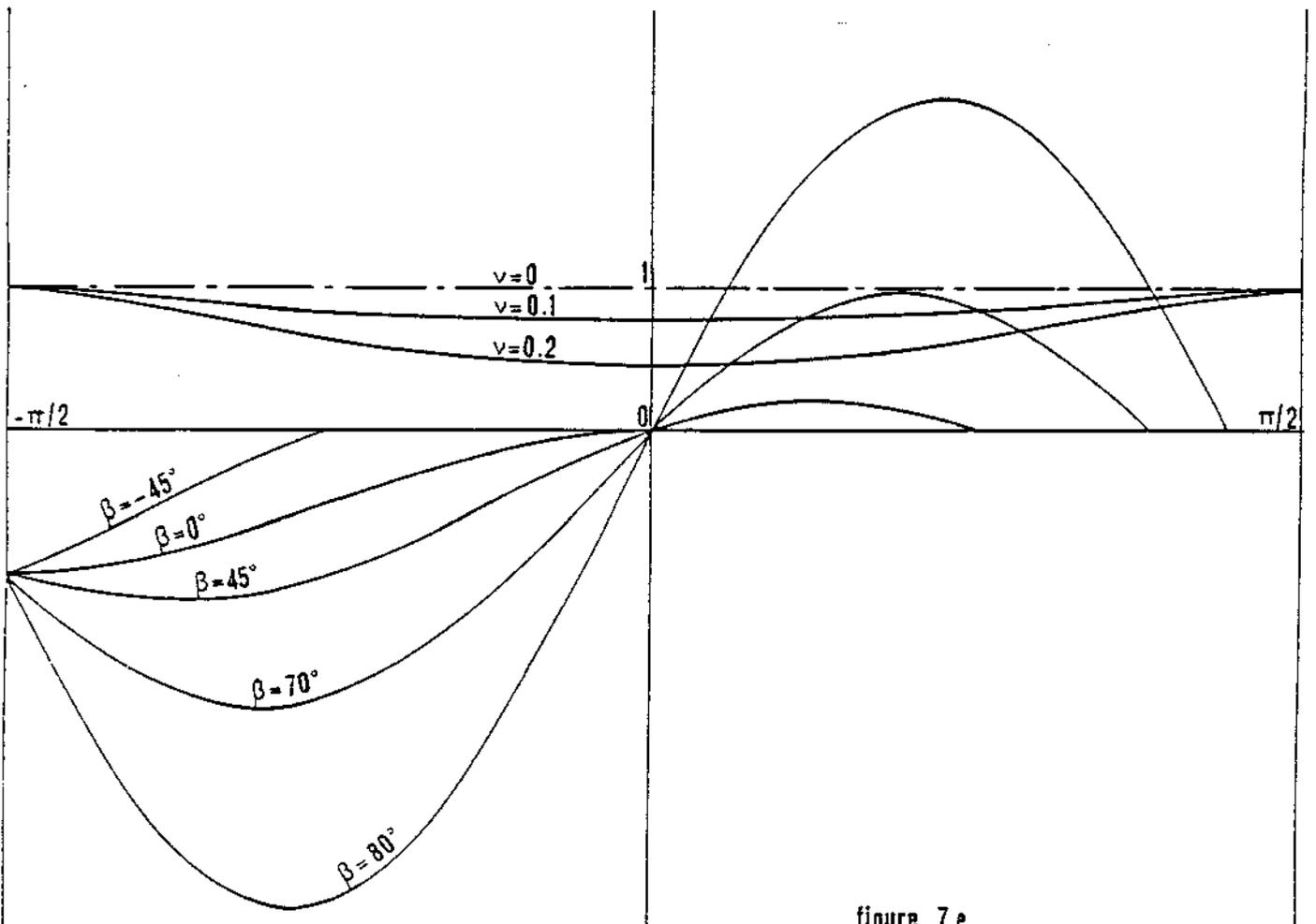


figure 7.e

En ce qui concerne les zéros de $g'_4(\theta)$ dans l'intervalle $] -\frac{\pi}{2}, \beta[$, nous devons étudier l'équation suivante :

$$(7.29) \quad h_4(\theta) = -h_3(\theta)$$

La figure 7.e montre que cette équation n'admet de solution dans l'intervalle $] -\frac{\pi}{2}, \beta[$ que si β est supérieur ou égal à un angle β_4 pour lequel il existe θ_4 tel que :

$$\left| \begin{array}{l} h_4(\theta_4) = -h_3(\theta_4) \\ h'_4(\theta_4) = -h'_3(\theta_4) \end{array} \right.$$

Quand ν tend vers zéro, la valeur limite de $\text{tg}\beta_4$ est $\sqrt{8}$, c'est-à-dire que β_4 tend vers l'angle de Kelvin β_K . Quand ν est strictement positif, β_4 est inférieur à β_K . La figure 7.c rend compte de l'évolution de β_4 en fonction de ν .

L'ensemble des résultats obtenus est décrit par la figure 7.h.

7.3.2 - Cas où ν est compris entre 1/4 et 1/2

Dans le cas où ν est compris entre les valeurs 1/4 et 1/2, la fonction $\phi_{22}(M;t)$ peut s'écrire sous la forme suivante en fonction de β :

$$(7.50) \quad \Phi_{z_1'}(M;t) = -\frac{Q^*}{2\eta l} \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\omega t} \left[\int_{\beta}^{-\theta_0} f_{31}(\theta) e^{iR\sigma_{31}(\theta)} d\theta + \int_{+\theta_c}^{+\pi/2} f_{31}(\theta) e^{iR\sigma_{31}(\theta)} d\theta \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{-\pi/2}^{\beta} f_{41}(\theta) e^{iR\sigma_{41}(\theta)} d\theta + \int_{-\theta_c}^{+\theta_c} f_{42}(\theta) e^{iR\sigma_{42}(\theta)} d\theta \right] \right\} \quad \beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\theta_c\right]$$

$$\Phi_{z_2'}(M;t) = -\frac{Q^*}{2\eta l} \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\omega t} \left[\int_{-\theta_0}^{\beta} f_{32}(\theta) e^{iR\sigma_{32}(\theta)} d\theta + \int_{+\theta_c}^{+\pi/2} f_{31}(\theta) e^{iR\sigma_{31}(\theta)} d\theta \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{-\pi/2}^{-\theta_c} f_{41}(\theta) e^{iR\sigma_{41}(\theta)} d\theta + \int_{-\theta_c}^{+\theta_c} f_{42}(\theta) e^{iR\sigma_{42}(\theta)} d\theta \right] \right\} \quad \beta \in [-\theta_c, +\theta_c]$$

$$\Phi_{z_2'}(M;t) = -\frac{Q^*}{2\eta l} \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\omega t} \left[\int_{-\theta_c}^{+\theta_c} f_{32}(\theta) e^{iR\sigma_{32}(\theta)} d\theta + \int_{+\theta_c}^{+\pi/2} f_{31}(\theta) e^{iR\sigma_{31}(\theta)} d\theta \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{-\pi/2}^{-\theta_c} f_{41}(\theta) e^{iR\sigma_{41}(\theta)} d\theta + \int_{+\theta_c}^{\beta} f_{41}(\theta) e^{iR\sigma_{41}(\theta)} d\theta \right] \right\} \quad \beta \in [+\theta_c, +\frac{\pi}{2}]$$

avec :

$$f_{31}(\theta) = i \frac{K_3 e^{K_3(z+z')}}{\sqrt{1-4\gamma \cos \theta}} \quad ; \quad \sigma_{31}(\theta) = K_3 \sin(\theta - \beta)$$

$$f_{32}(\theta) = -\frac{Z_3 e^{\operatorname{Re}(Z_3 \zeta)}}{\sqrt{4\gamma \cos \theta - 1}} \quad ; \quad \sigma_{32}(\theta) = -\frac{z+z'}{R} \frac{\sqrt{4\gamma \cos \theta - 1}}{2F^2 \cos^2 \theta} + \frac{1-2\gamma \cos \theta}{2F^2 \cos^2 \theta} \sin(\theta - \beta)$$

$$f_{41}(\theta) = i \frac{K_4 e^{K_4(z+z')}}{\sqrt{1-4\gamma \cos \theta}} \quad ; \quad \sigma_{41}(\theta) = K_4 \sin(\theta - \beta)$$

$$f_{42}(\theta) = -\frac{Z_4 e^{\operatorname{Re}(Z_4 \zeta)}}{\sqrt{4\gamma \cos \theta - 1}} \quad ; \quad \sigma_{42}(\theta) = \frac{z+z'}{R} \frac{\sqrt{4\gamma \cos \theta - 1}}{2F^2 \cos^2 \theta} + \frac{1-2\gamma \cos \theta}{2F^2 \cos^2 \theta} \sin(\theta - \beta)$$

7.3.2.1 - Etude des zéros de $g'_{31}(\theta)$

La fonction $g'_{31}(\theta)$ est identique à la fonction $g'_3(\theta)$ du paragraphe précédent et l'étude que nous en avons faite reste valable moyennant quelques précautions au sujet des bornes d'intégration $-\theta_c$ et $+\theta_c$ pour lesquelles une étude locale s'impose.

Au voisinage de $-\theta_c$, $g'_{31}(\theta)$ admet un développement limité en fonction de la variable $(-\theta_c - \theta)$ qui s'écrit sur l'intervalle $]-\theta_c - \varepsilon, -\theta_c[$:

$$(7.31) \quad g'_{31}(\theta) = 4\tilde{\omega}^2 \left[1 - \frac{\text{tg}\theta_c}{2\sqrt{\nu} \sin\theta_c} \sqrt{-\theta_c - \theta} \right] + o(-\theta_c - \theta)$$

Lorsque θ tend vers $-\theta_c$, $g'_{31}(\theta)$ possède une limite non nulle indépendante des deux paramètres ν et β .

Au voisinage de $+\theta_c$, $g'_{31}(\theta)$ admet un développement limité en fonction de la variable $(\theta - \theta_c)$ qui s'écrit sur l'intervalle $[\theta_c, \theta_c + \varepsilon[$:

$$(7.32) \quad g'_{31}(\theta) = 4\tilde{\omega}^2 \left[1 + \frac{\text{tg}\theta_c}{2\sqrt{\nu} \sin\theta_c} \sqrt{\theta - \theta_c} \right] + o(\theta - \theta_c)$$

Lorsque θ tend vers $+\theta_c$, $g'_{31}(\theta)$ possède une limite non nulle indépendante des deux paramètres ν et β .

La figure 7.f met en évidence l'existence d'un angle β_3 pour lequel $g'_{31}(\theta)$ admet un zéro double, et montre que pour $\nu = 1/2\sqrt{3}$ les angles β_1 et θ_c sont égaux à $\pi/6$, ce qu'il est facile de vérifier en écrivant l'égalité entre $\text{tg}\beta_1 = 2\nu$ et $\text{tg}\theta_c = \sqrt{16\nu^2 - 1}$. Il convient également de noter que lorsque ν est égal à $1/2$, β_3 prend la valeur $\pi/4$, et θ_c est égal à $\pi/3$. Par ailleurs, β_3 s'annule quand ν est égal à $\sqrt{2/27}$.

Le détail des résultats obtenus est donné par la figure 7.h.

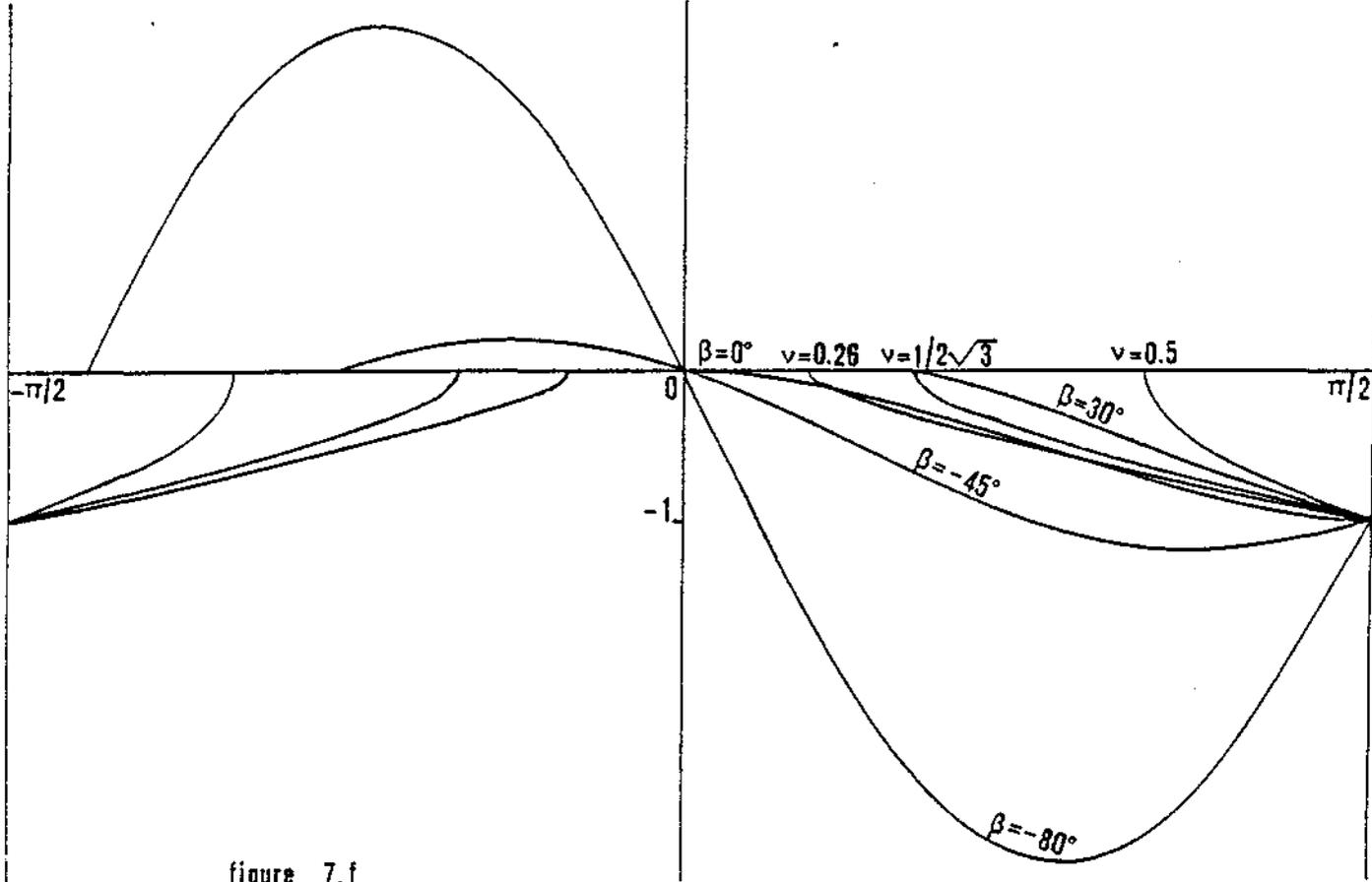


figure 7.f

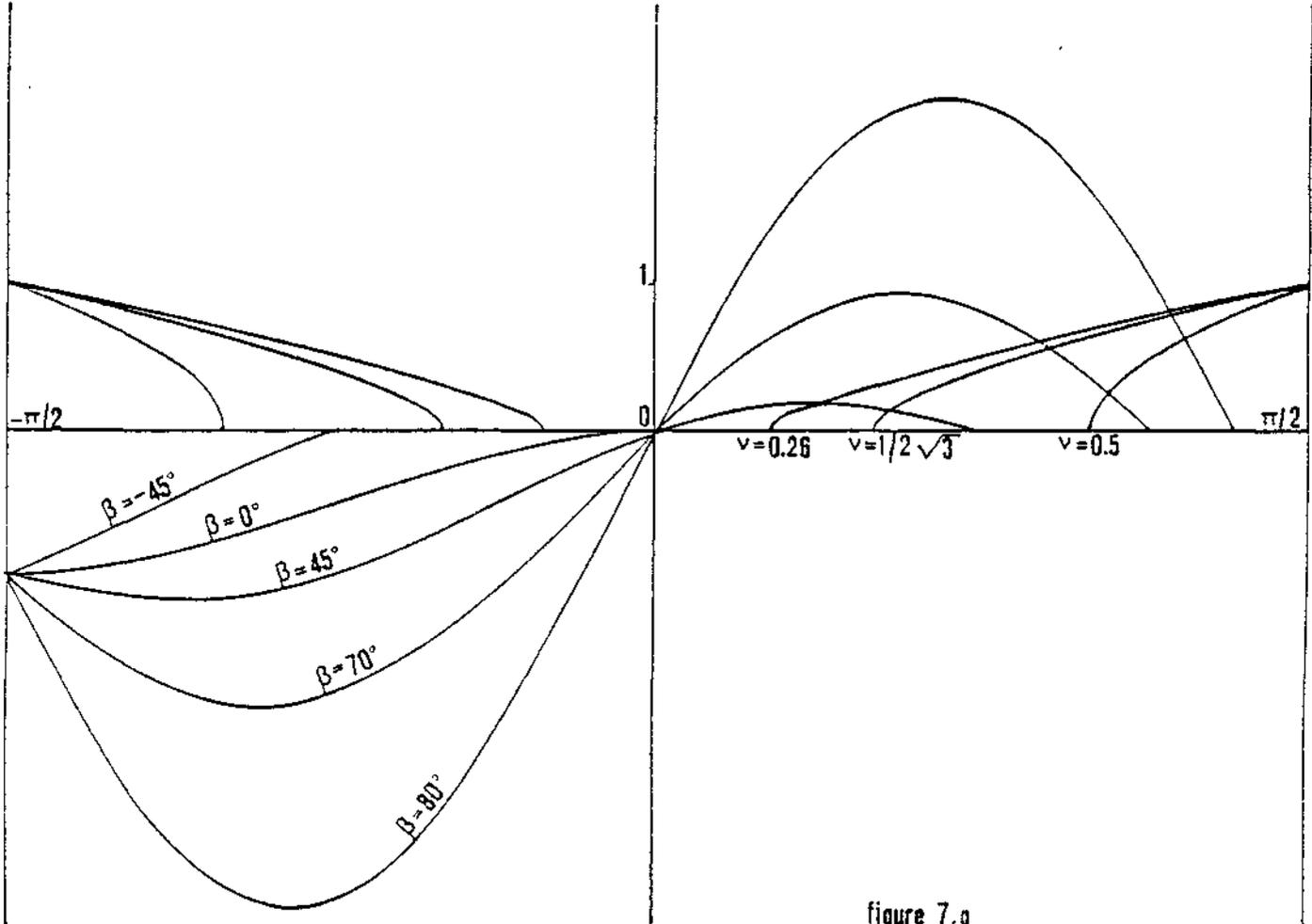


figure 7.g

7.3.2.2 - Etude des zéros de $g'_{41}(\theta)$

La fonction $g'_{41}(\theta)$ est identique à la fonction $g'_4(\theta)$ du paragraphe 7.3.1, et l'étude que nous en avons faite reste valable, sauf pour les bornes d'intégration $-\theta_c$ et $+\theta_c$ au sujet desquelles une étude locale est nécessaire.

Au voisinage de $-\theta_c$, $g'_{41}(\theta)$ admet un développement limité en fonction de la variable $(-\theta_c - \theta)$ qui s'écrit sur l'intervalle $]-\theta_c - \epsilon, -\theta_c]$:

$$(7.33) \quad g'_{41}(\theta) = 4\tilde{\omega}^2 \left[1 - \frac{t_g \theta_c}{2\sqrt{\nu} \sin \theta_c} \sqrt{-\theta_c - \theta} \right] + o(-\theta_c - \theta)$$

Lorsque θ tend vers $-\theta_c$, $g'_{41}(\theta)$ possède une limite non nulle indépendante des deux paramètres ν et β .

Au voisinage de $+\theta_c$, $g'_{41}(\theta)$ admet un développement limité en fonction de la variable $\theta - \theta_c$ qui s'écrit sur l'intervalle $[\theta_c, \theta_c + \epsilon[$:

$$(7.34) \quad g'_{41}(\theta) = 4\tilde{\omega}^2 \left[1 + \frac{t_g \theta_c}{2\sqrt{\nu} \sin \theta_c} \sqrt{\theta - \theta_c} \right] + o(\theta - \theta_c)$$

Lorsque θ tend vers $+\theta_c$, $g'_{41}(\theta)$ possède une limite non nulle indépendante des paramètres ν et β .

La figure 7.g montre que $g'_{41}(\theta)$ n'admet pas de zéro quand β est inférieur à θ_c , et admet un seul zéro qui correspond à un minimum de $g_{41}(\theta)$ quand β est supérieur à θ_c .

7.3.2.3 - Contribution des pôles complexes

Les pôles complexes n'apparaissent que dans des intégrales dont le support est inclus dans l'intervalle $[-\theta_c, +\theta_c]$, c'est-à-dire qu'alors les fonctions $f_{32}(\theta)$ et $f_{42}(\theta)$ possèdent des facteurs exponentiels dont les parties réelles s'écrivent respectivement :

$$(7.35) \quad (Z+Z') \frac{1-2\sqrt{\cos \theta}}{2F^2 \cos^2 \theta} + R \frac{\sqrt{4\sqrt{\cos \theta}-1}}{2F^2 \cos^2 \theta} \sin(\theta-\beta)$$

$$(7.36) \quad (Z+Z') \frac{1-2\sqrt{\cos \theta}}{2F^2 \cos^2 \theta} - R \frac{\sqrt{4\sqrt{\cos \theta}-1}}{2F^2 \cos^2 \theta} \sin(\theta-\beta)$$

Or Z_3 n'intervient que dans le cas où θ est inférieur à β , c'est-à-dire quand $\sin(\theta - \beta)$ est négatif, et Z_4 n'intervient que dans le cas où θ est supérieur à β , c'est-à-dire quand $\sin(\theta - \beta)$ est positif. Il s'ensuit que les intégrales sur les supports inclus dans les intervalles $[-\theta_c, +\theta_c]$ ont un comportement asymptotique exponentiel décroissant, et ne participent pas à la représentation du champ de vague lointain.

7.3.3 - Cas où ν est supérieur à 1/2

Quand ν est supérieur à 1/2, $\Phi_{2\ell}(M;t)$ a alors sa forme la plus générale donnée par la formule (7.6). L'étude réalisée aux paragraphes 7.3.1 et 7.3.2 demeure valable puisque le nouvel intervalle $[-\theta'_c, +\theta'_c]$ n'apporte aucune contribution au potentiel lointain.

Nous devons cependant étudier les cas particuliers qui sont susceptibles de se présenter.

7.3.3.1 - Etude des zéros de $g'_{31}(\theta)$

Nous avons vu au paragraphe 7.3.2.1 qu'il existe un angle β_3 , correspondant à un zéro double, dont on peut remarquer sur la figure 7.f qu'il varie en fonction de ν en se déplaçant vers β_1 . La valeur de ν pour laquelle β_3 et β_1 sont égaux peut être déterminée analytiquement puisqu'alors les dérivées d'ordre deux et trois du second facteur de (7.21) doivent être nulles pour θ égal à $\pi/2$ (la fonction $g'_{31}(\frac{\pi}{2})$ étant différente de zéro).

Les dérivées secondes de $h'_1(\theta)$ et $h'_3(\theta)$ sont :

$$(7.37) \quad h''_1(\theta) = -2 \frac{\cos(2\theta - \beta)}{\cos\beta} \quad ; \quad h''_3(\theta) = -\frac{2\nu}{(1-4\nu\cos\theta)^{3/2}} \left[\cos\theta(1-4\nu\cos\theta) - 2\nu\sin^2\theta \right]$$

leur égalité quand θ est égal à $\pi/2$ impose la relation suivante :

$$(7.38) \quad 2\nu^2 = 1$$

ce qui implique que ν est égal à $1/\sqrt{2}$. Puisque l'égalité des dérivées premières impose la relation $\operatorname{tg}\beta = 2\nu$, alors $\beta_1 = \beta_3 = \operatorname{arctg}(\sqrt{2})$.

▨ minimum

○ maximum

▨ inflexion à tangente horizontale

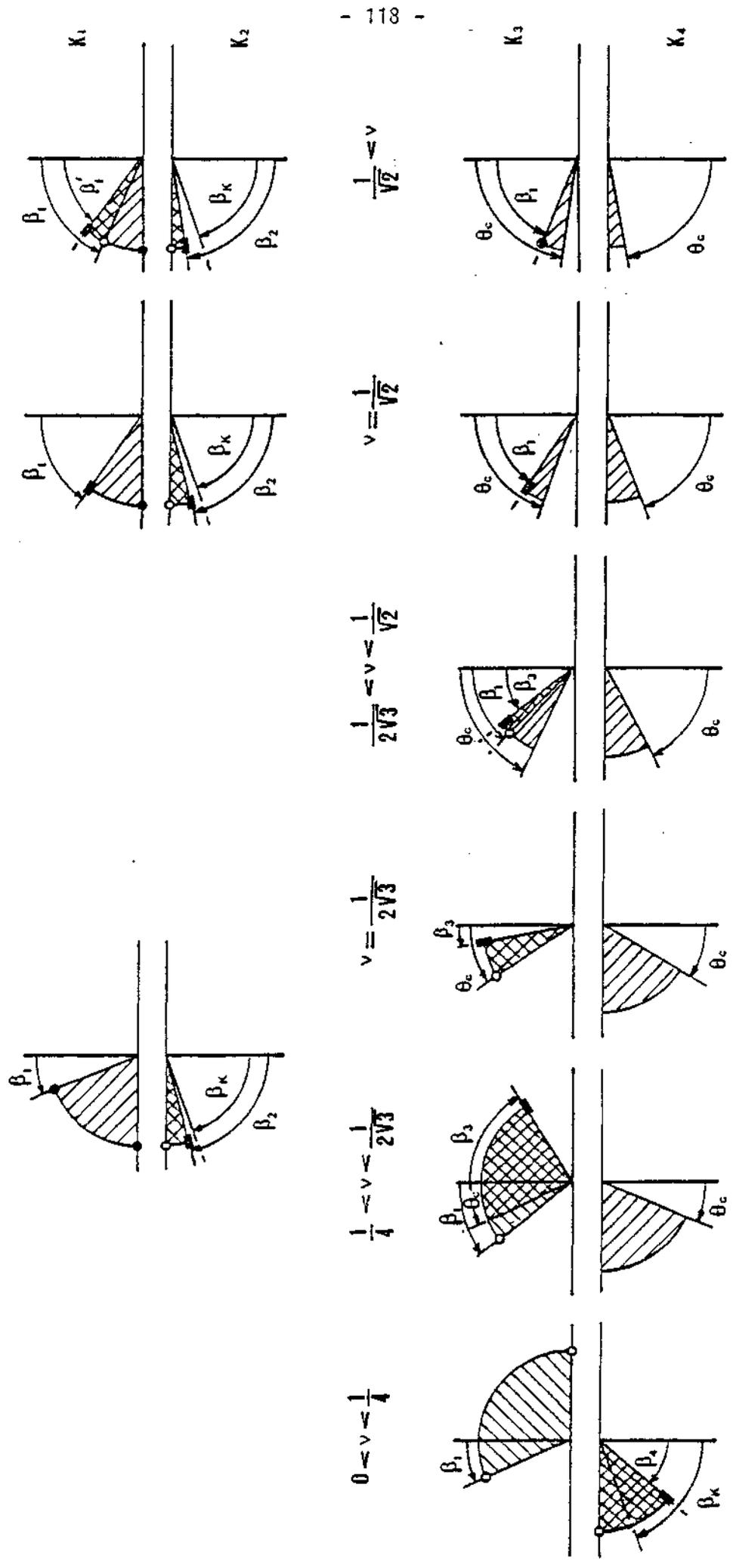


figure 7.h

7.3.3.2 - Etude des zéros de $g'_{41}(\theta)$

L'étude de $g'_{41}(\theta)$ est nettement plus simple que celle de $g'_{31}(\theta)$, et aucun changement n'intervient quand ν est supérieur à 1/2. L'étude du paragraphe 7.3.2.2 s'applique donc sans modification au cas présent.

7.3.3.3 - Contribution des pôles complexes

L'introduction d'un nouvel intervalle $[-\theta'_c, +\theta'_c]$ ne participant pas à la représentation du champ de vagues lointain ne modifie pas les résultats du paragraphe 7.3.2.3 qui doivent alors être appliqués aux intervalles $[-\theta_c, -\theta'_c]$ et $[\theta'_c, \theta_c]$.

7.4 - DESCRIPTION DU CHAMP DE VAGUES LOINTAIN

L'étude que nous venons d'effectuer et les résultats de la quatrième annexe nous permettent de déterminer la partie principale de la fonction potentiel de vitesse en analysant successivement la contribution de chaque pôle suivant les valeurs de ν et de β .

7.4.1 - Contribution du pôle K_1

7.4.1.1 - Cas où ν est inférieur $1/\sqrt{2}$

Quand β appartient à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \beta_1[$, la partie principale de la contribution de K_1 au potentiel des vitesses décroît comme R^{-1} .

Quand β appartient à l'intervalle $[\beta_1, +\frac{\pi}{2}]$, la contribution de K_1 au potentiel des vitesses a pour partie principale (1) :

$$(7.39) \quad \Phi(K_1) = \frac{Q^*}{2\pi l} \operatorname{Re} \left\{ A_1 e^{-i[-RK_1(\theta'_1)\sin(\theta_1-\beta) - \omega t - \frac{\pi}{4}]} \right\}$$

avec :

$$A_1 = f_1(\theta'_1) \sqrt{\frac{2\pi}{|g'_1(\theta'_1)|}} R^{-1/2} [1 + O(R^{-1/2})]$$

(1) Nous désignerons respectivement par θ_i , θ'_i et θ''_i les zéros de $g_i(\theta)$ suivant qu'il s'agit d'un point d'inflexion à tangente horizontale, un minima ou un maxima.

L'expression (7.39) caractérise une onde progressive se dirigeant, par rapport au repère relatif, dans la direction définie par $\theta'_1 + \pi$ lorsqu'on l'observe dans la direction β . Dans le repère absolu, la pulsation de cette houle est dans la direction β :

$$(7.40) \quad \tilde{\omega}'_1 = \tilde{\omega} + FK_1(\theta'_1) \cos(\theta'_1 + \eta)$$

La célérité de l'onde est alors :

$$(7.41) \quad C'_1 = V \cos \theta'_1 \left[\frac{\tilde{\omega}}{FK_1(\theta'_1) \cos \theta'_1} - 1 \right] = \frac{g}{2\omega} \left[1 + \sqrt{1 + 4\gamma \cos \theta'_1} \right] > 0$$

La figure 7.i montre l'allure et le sens de propagation du champ de vagues lointain lié à K_1 .

7.4.1.2 - Cas où v est égal à $1/\sqrt{2}$

Quand v prend la valeur $1/\sqrt{2}$, les résultats précédents restent valables quand β appartient aux intervalles $[-\frac{\pi}{2}, \beta_1[$ et $]\beta_1, +\frac{\pi}{2}]$, mais $\Phi(K_1)$ devient quand β est égal à β_1 ($= 54^\circ 44'$) :

$$(7.42) \quad \Phi(K_1) = \frac{a^*}{2\lambda l} \operatorname{Re} \left\{ A_1 e^{-i[R\tilde{\omega}^2 \cos \beta_1 - \omega t]} \right\}$$

avec :

$$A_1 = f_1\left(-\frac{3}{2}\right) \frac{\Gamma(1/3)}{\sqrt{3}} \left[\frac{6}{|g_1^{**}(-\frac{3}{2})|} \right]^{1/3} R^{-1/3} [1 + O(R^{-1/3})]$$

La configuration du champ de vagues lointain donnée par la figure 7.i n'est pas modifiée.

7.4.1.3 - Cas où v est supérieur à $1/\sqrt{2}$

Quand β appartient à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \beta_1[$, la partie principale de la contribution de K_1 au potentiel des vitesses décroît comme R^{-1} .

Quand β est égal à β_1 , la contribution de K_1 est donnée par la formule (7.42) en y remplaçant β_1 par β'_1 .

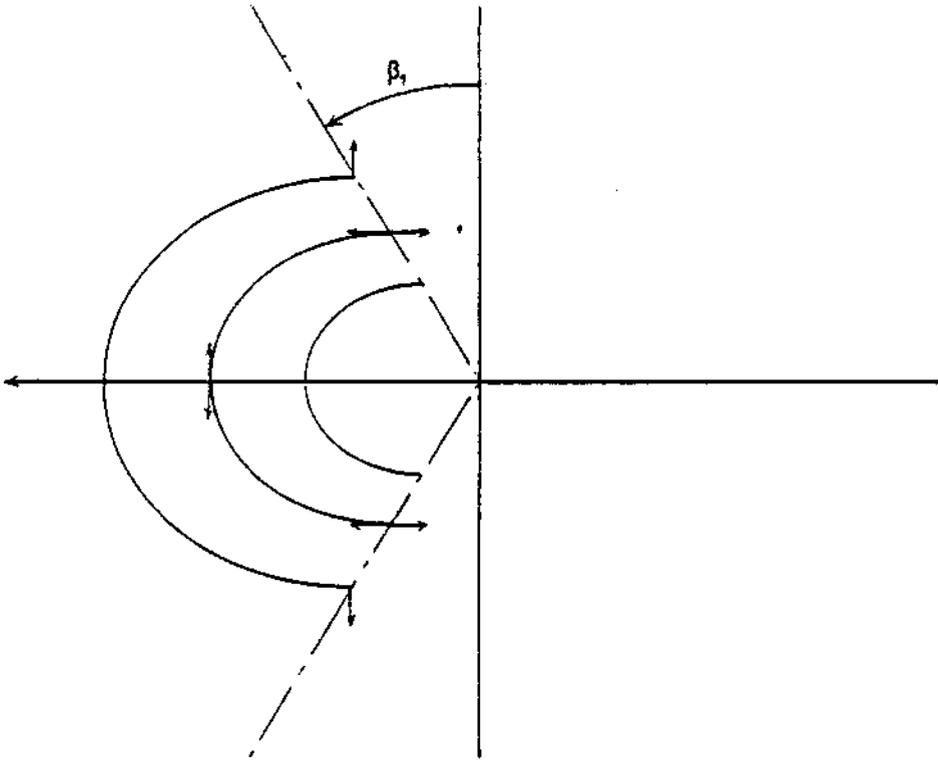


figure 7.i

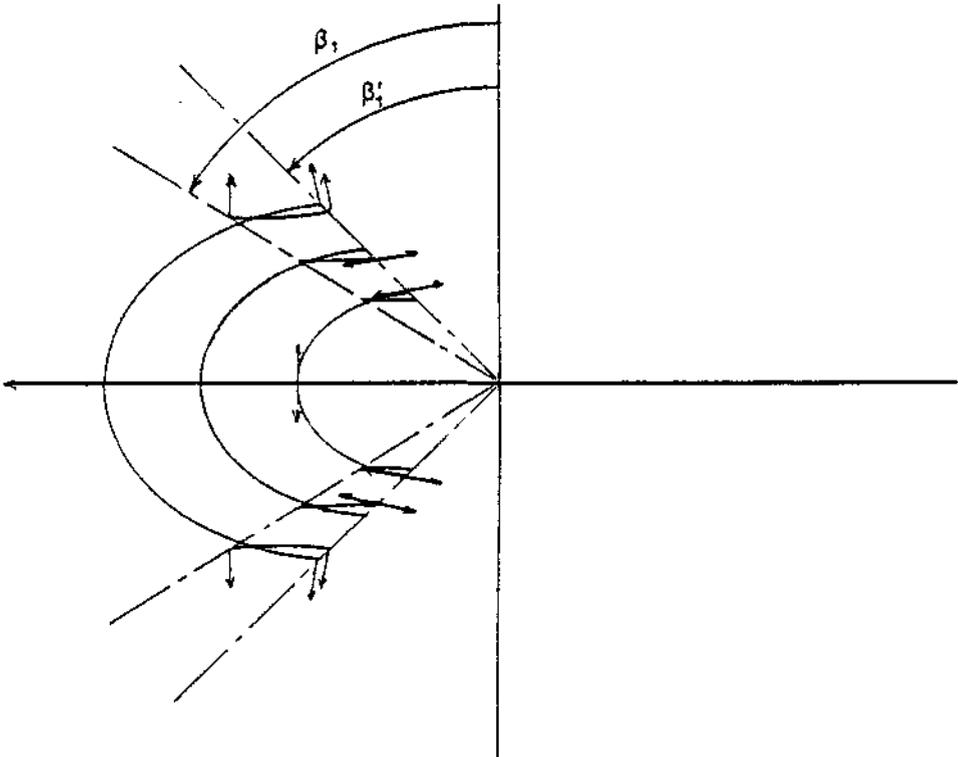


figure 7.j

Quand β appartient à l'intervalle $]\beta'_1, \beta_1]$, la partie principale de la contribution de K_1 est :

$$(7.43) \quad \Phi(K_1) = \frac{Q^*}{2\pi\ell} \operatorname{Re} \left\{ A'_1 e^{-i[-RK_1(\theta'_1)\sin(\theta'_1-\beta)-\omega t-\frac{\pi}{4}]} + A''_1 e^{-i[-RK_1(\theta''_1)\sin(\theta''_1-\beta)-\omega t+\frac{\pi}{4}]} \right\}$$

avec :

$$A'_1 = f_1(\theta'_1) \sqrt{\frac{2\eta}{|S''_1(\theta'_1)|}} R^{-1/2} [1 + O(R^{-1/2})]$$

$$A''_1 = f_1(\theta''_1) \sqrt{\frac{2\eta}{|S''_1(\theta''_1)|}} R^{-1/2} [1 + O(R^{-1/2})]$$

Nous nous trouvons donc ici en présence de deux systèmes d'ondes dont les directions de propagation observées dans la direction β sont définies par les angles $\theta'_1 + \pi$ et $\theta''_1 + \pi$. En particulier, quand β est égal à β'_1 , ces directions sont confondues et égales à $\theta_1 + \pi$, les deux systèmes sont alors en quadrature. Dans le repère absolu, les pulsations de ces houles sont respectivement :

$$(7.44) \quad \begin{cases} \tilde{\sigma}'_1 = \tilde{\omega} + FK_1(\theta'_1) \cos(\theta'_1 + \eta) \\ \tilde{\sigma}''_1 = \tilde{\omega} + FK_1(\theta''_1) \cos(\theta''_1 + \eta) \end{cases}$$

et leurs célérités sont :

$$(7.45) \quad \begin{cases} \mathcal{C}'_1 = U \cos \theta'_1 \left[\frac{\tilde{\omega}}{FK_1(\theta'_1) \cos \theta'_1} - 1 \right] = \frac{g}{2\omega} \left[1 + \sqrt{1 + 4V \cos \theta'_1} \right] > 0 \\ \mathcal{C}''_1 = U \cos \theta''_1 \left[\frac{\tilde{\omega}}{FK_1(\theta''_1) \cos \theta''_1} - 1 \right] = \frac{g}{2\omega} \left[1 + \sqrt{1 + 4V \cos \theta''_1} \right] > 0 \end{cases}$$

Quand β appartient à l'intervalle $]\beta_1, \frac{\pi}{2}]$, la contribution de K_1 est donnée par la formule (7.39).

La figure 7.j montre l'allure et le sens de propagation de chacun des champs de vagues lointains liés à K_1 .

7.4.2 - Contribution du pôle K_2

Quand β appartient à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \beta_2[$, la partie principale de la contribution de K_2 au potentiel des vitesses décroît comme R^{-1} .

Quand β est égal à β_2 , la contribution de K_2 au potentiel des vitesses a pour partie principale :

$$(7.46) \quad \Phi(K_2) = \frac{Q^*}{2\pi l} \operatorname{Re} \left\{ A_2 e^{-i[-RK_2(\theta_2)\sin(\theta_2-\beta_2)-\omega t]} \right\}$$

avec :

$$A_2 = f_2(\theta_2) \frac{\Gamma(1/3)}{\sqrt{3}} \left[\frac{c}{|g''(\theta_2)|} \right]^{1/3} R^{-1/3} [1 + \theta(R^{-1/3})]$$

Quand β appartient à l'intervalle $]\beta_2, \frac{\pi}{2}[$, la partie principale de la contribution de K_2 s'écrit :

$$(7.47) \quad \Phi(K_2) = \frac{Q^*}{2\pi l} \operatorname{Re} \left\{ A'_2 e^{-i[-RK_2(\theta'_2)\sin(\theta'_2-\beta)-\omega t - \frac{\pi}{4}]} \right. \\ \left. + A''_2 e^{-i[-RK_2(\theta''_2)\sin(\theta''_2-\beta)-\omega t + \frac{\pi}{4}]} \right\}$$

avec :

$$A'_2 = f'_2(\theta'_2) \sqrt{\frac{2\pi}{|g''(\theta'_2)|}} R^{-1/2} [1 + \theta(R^{-1/2})]$$

$$A''_2 = f''_2(\theta''_2) \sqrt{\frac{2\pi}{|g''(\theta''_2)|}} R^{-1/2} [1 + \theta(R^{-1/2})]$$

Il existe donc deux systèmes d'ondes dont les directions de propagation observées dans la direction β sont définies par les angles $\theta'_2 + \pi$ et $\theta''_2 + \pi$. Dans le repère absolu, les pulsations de ces houles sont respectivement :

$$(7.48) \quad \left[\begin{array}{l} \tilde{\sigma}'_2 = \tilde{\omega} + FK_2(\theta'_2) \cos(\theta'_2 + \pi) \\ \tilde{\sigma}''_2 = \tilde{\omega} + FK_2(\theta''_2) \cos(\theta''_2 + \pi) \end{array} \right.$$

et leurs célérités sont :

$$(7.49) \quad \left[\begin{array}{l} c_2' = U \cos \theta_2' \left[\frac{\tilde{\omega}}{FK_1(\theta_2') \cos \theta_2'} - 1 \right] = \frac{g}{2\omega} \left[1 - \sqrt{1 + 4\nu \cos \theta_2'} \right] \\ c_2'' = U \cos \theta_2'' \left[\frac{\tilde{\omega}}{FK_2(\theta_2'') \cos \theta_2''} - 1 \right] = \frac{g}{2\omega} \left[1 - \sqrt{1 + 4\nu \cos \theta_2''} \right] \end{array} \right]$$

Quand β est égal à $\pi/2$, la contribution de K_2 se réduit aux seuls termes contenant θ_2'' .

Il convient de noter que, lorsque β est égal à β_2 , les directions des deux systèmes de vagues se confondent en une seule définie par $\theta_2 + \pi$, et qu'alors les deux champs de vagues sont en quadrature.

La figure 7.k donne l'allure et le sens de propagation de chaque champ de vagues lointain lié à K_2 .

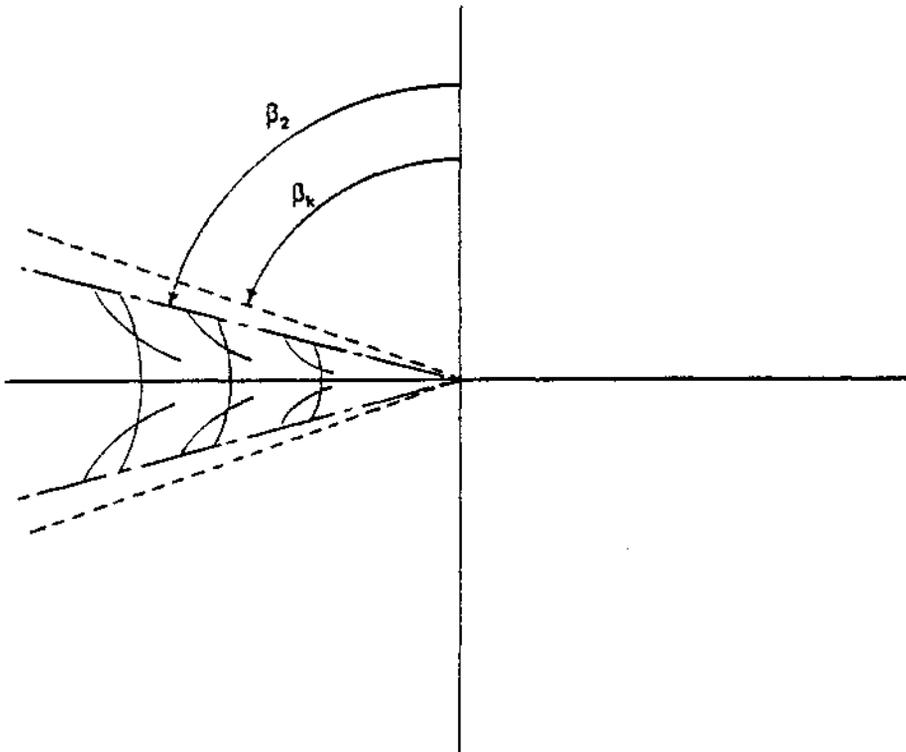


figure 7.k

7.4.3 - Contribution du pôle K_3

7.4.3.1 - Cas où v est inférieur à $1/4$

Quand β appartient à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \beta_1]$, la contribution de K_3 au potentiel des vitesses a pour partie principale :

$$(7.50) \quad \Phi(K_3) = -\frac{Q^*}{2\pi l} \operatorname{Re} \left\{ A_3' e^{i[K_3(\theta_3') \sin(\theta_3' - \beta) - \omega t - \frac{\pi}{4}]} \right\}$$

avec :

$$A_3' = f_3(\theta_3') \sqrt{\frac{2\pi}{|\sigma_3'(\theta_3')|}} \bar{R}^{-1/2} [1 + O(\bar{R}^{-1/2})]$$

Cette expression caractérise une onde progressive se dirigeant, par rapport au repère relatif, dans la direction définie par θ_3 lorsqu'on l'observe dans la direction β . Dans le repère absolu, la pulsation de cette houle est dans la direction β :

$$(7.51) \quad \tilde{\omega}_3 = \tilde{\omega} + FK_3(\theta_3'') \cos \theta_3'$$

et la célérité de l'onde s'écrit :

$$(7.52) \quad c_3 = U \cos \theta_3' \left[\frac{\tilde{\omega}}{FK_3(\theta_3'') \cos \theta_3'} - 1 \right] = \frac{g'}{2\omega} \left[1 + \sqrt{1 - 4\gamma \cos \theta_3'} \right] > 0$$

Quand β appartient à l'intervalle $[\beta_1, +\frac{\pi}{2}]$, la partie principale de la contribution de K_3 au potentiel des vitesses décroît comme R^{-1} .

La figure 7.1 montre l'allure et le sens de propagation du champ de vagues asymptotique lié à K_3 .

7.4.3.2 - Cas où v appartient à l'intervalle $]1/4, 1/2\sqrt{3}]$

Quand β appartient à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \beta_3[$, la partie principale de la contribution de K_3 au potentiel des vitesses décroît comme R^{-1} .

Quand β est égal à β_3 , la contribution de K_3 à la fonction potentiel des vitesses s'écrit :

$$(7.53) \quad \Phi(K_3) = -\frac{Q^*}{2\pi l} \operatorname{Re} \left\{ A_3 e^{i[RK_3(\theta_3) \sin(\theta_3 - \beta) - \omega t]} \right\}$$

avec :

$$A_3 = f_{21}(\theta_3) \frac{\Gamma(1/3)}{\sqrt{3}} \left[\frac{6}{|\delta_{21}''(\theta_3)|} \right]^{1/3} \bar{R}^{-1/3} [1 + O(\bar{R}^{-1/3})]$$

Quand β appartient à l'intervalle $]\beta_3, \theta_c[$, la contribution de K_3 au champ de vagues asymptotique est donnée par l'expression suivante :

$$(7.54) \quad \Phi(K_3) = -\frac{Q^*}{2\pi l} \operatorname{Re} \left\{ A_3' e^{i[RK_3(\theta_3') \sin(\theta_3' - \beta) - \omega t + \frac{\pi}{4}]} + A_3'' e^{i[RK_3(\theta_3'') \sin(\theta_3'' - \beta) - \omega t - \frac{\pi}{4}]} \right\}$$

avec :

$$A_3' = f_{21}(\theta_3') \sqrt{\frac{2\pi}{|\delta_{21}''(\theta_3')|}} \bar{R}^{-1/2} [1 + O(\bar{R}^{-1/2})]$$

$$A_3'' = f_{21}(\theta_3'') \sqrt{\frac{2\pi}{|\delta_{21}''(\theta_3'')|}} \bar{R}^{-1/2} [1 + O(\bar{R}^{-1/2})]$$

Nous avons alors deux systèmes de vagues dont les directions de propagation observées dans la direction β sont définies par les angles θ_3' et θ_3'' . En particulier, quand β est égal à β_3 , ces directions sont confondues et égales à θ_3 , les deux systèmes sont alors en quadrature. Dans le repère absolu, les pulsations de ces houles sont respectivement :

$$(7.55) \quad \left[\begin{array}{l} \tilde{\sigma}_3' = \tilde{\omega} + FK_3(\theta_3') \cos \theta_3' \\ \tilde{\sigma}_3'' = \tilde{\omega} + FK_3(\theta_3'') \cos \theta_3'' \end{array} \right.$$

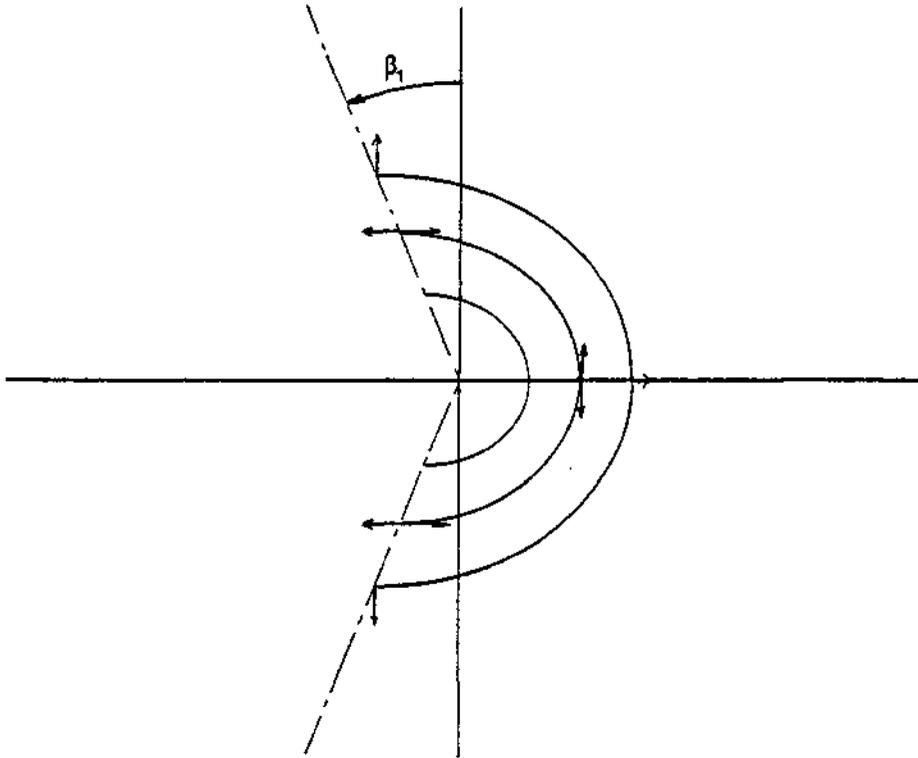


figure 7.1

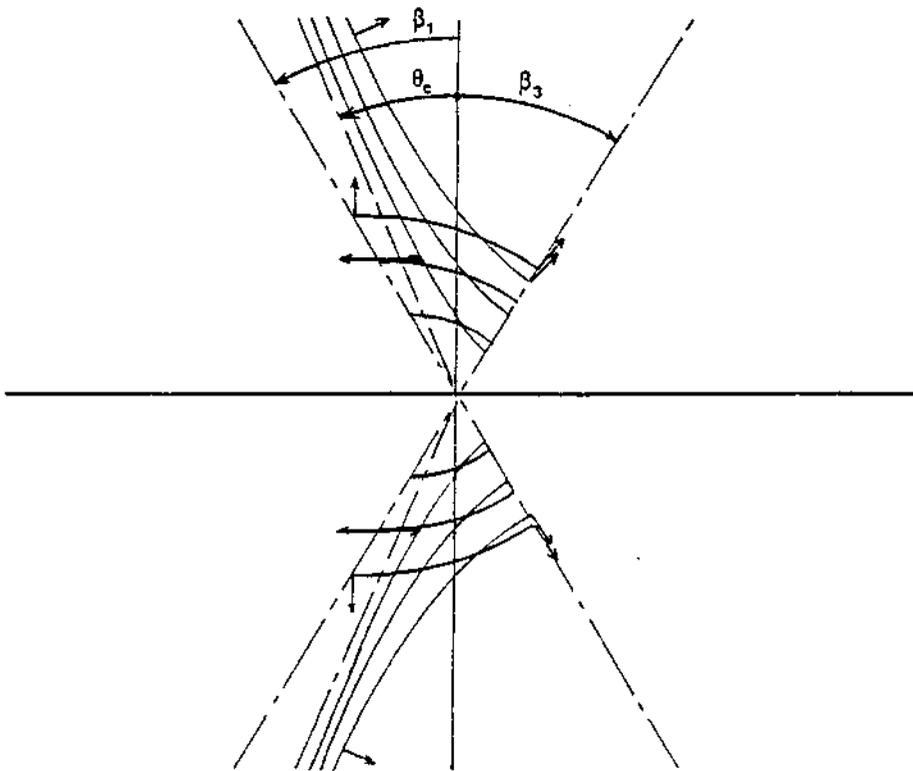


figure 7.m

et leurs célérités sont :

$$(7.56) \quad \left[\begin{array}{l} \mathcal{C}'_3 = U \cos \theta'_3 \left[\frac{\tilde{\omega}}{EK_3(\theta'_3) \cos \theta'_3} - 1 \right] = \frac{\mathcal{E}}{2\omega} \left[1 + \sqrt{1 - 4\nu \cos \theta'_3} \right] \\ \mathcal{C}''_3 = U \cos \theta''_3 \left[\frac{\tilde{\omega}}{FK_3(\theta''_3) \cos \theta''_3} - 1 \right] = \frac{\mathcal{E}}{2\omega} \left[1 + \sqrt{1 - 4\nu \cos \theta''_3} \right] \end{array} \right.$$

Quand β appartient à l'intervalle $[\theta_c, \beta_1]$, la contribution du pôle K_3 est donnée par les formules précédentes réduites aux seuls termes contenant θ'_3 .

Quand β appartient à l'intervalle $[\beta_1, +\frac{\pi}{2}]$, la partie principale de la contribution de K_3 au potentiel des vitesses décroît comme R^{-1} .

La figure 7.m montre l'allure et le sens de propagation du champ de vagues asymptotique lié au pôle K_3 .

La figure 7.n représente le cas particulier où ν est égal à $1/2\sqrt{3}$ pour lequel l'intervalle $[\theta_c, \beta_1]$ est réduit à un seul point puisqu'alors θ_c et β_1 sont égaux.

7.4.3.3 - Cas où ν appartient à l'intervalle $]1/2\sqrt{3}, 1/\sqrt{2}]$

Quand β appartient à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \beta_3[$, la partie principale de la contribution de K_3 au potentiel des vitesses décroît comme R^{-1} .

Quand β est égal à β_3 , la contribution de K_3 à la fonction potentiel des vitesses est donnée par la formule (7.53).

Quand β appartient à l'intervalle $[\beta_3, \beta_1]$, la contribution de K_3 au champ de vagues asymptotique est donnée par l'expression (7.54).

Quand β appartient à l'intervalle $[\beta_1, \theta_c[$, la contribution de K_3 est donnée par les formules suivantes :

$$(7.57) \quad \Phi(K_3) = -\frac{Q^*}{2\pi l} \operatorname{Re} \left\{ A'_3 e^{i[KK_3(\theta'_3) \sin(\theta_3 - \beta) - \omega t + \frac{\pi}{4}]} \right\}$$

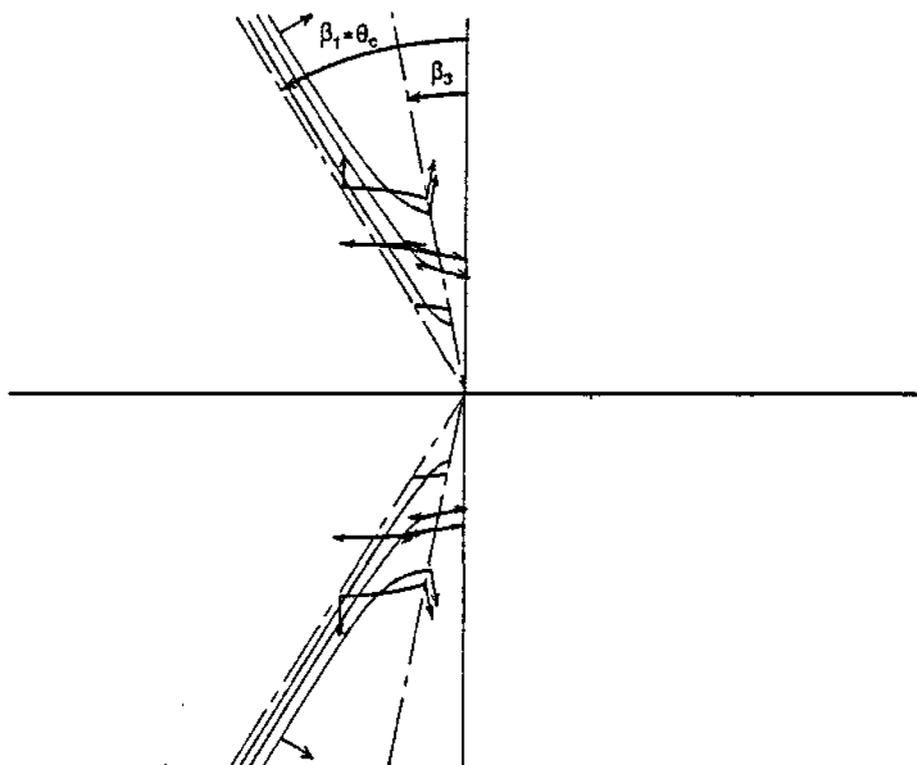


figure 7.n

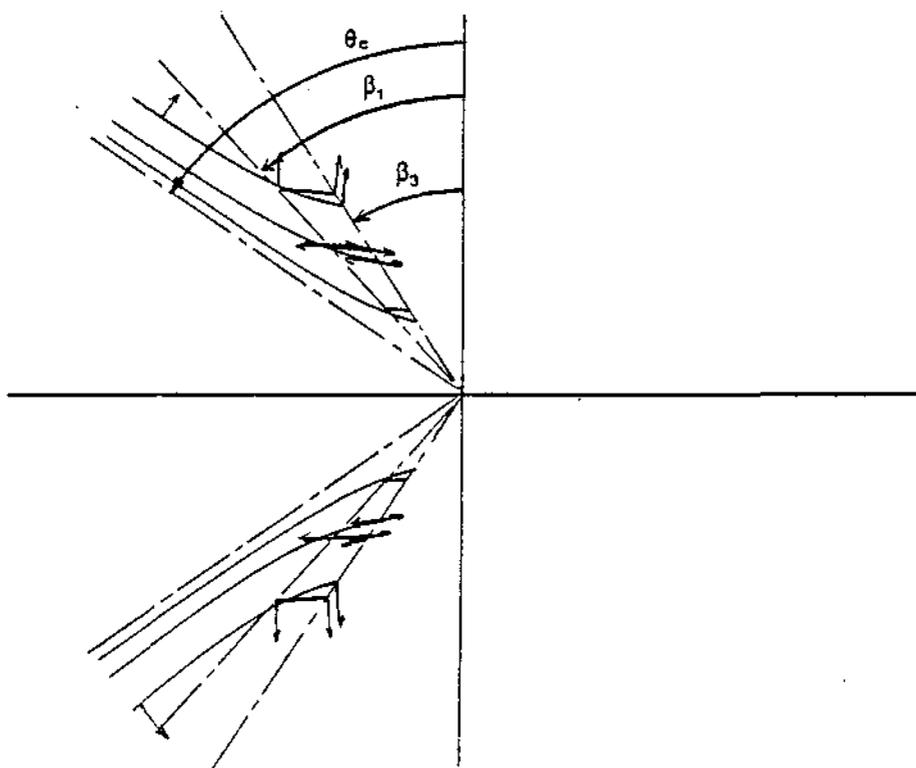


figure 7.o

avec :

$$A'_3 = f_{\beta_3}(\theta'_3) \sqrt{\frac{2\pi}{|\beta''_3(\theta'_3)|}} \bar{R}^{-1/2} [1 + O(\bar{R}^{-1/2})]$$

La pulsation et la célérité de ce système d'onde sont données par les formules (7.55) et (7.56).

Quand β appartient à l'intervalle $[\theta_c, +\frac{\pi}{2}]$, la contribution de K_3 au potentiel des vitesses a une partie principale qui décroît comme R^{-1} .

La figure 7.o montre l'allure et le sens de propagation du champ de vagues asymptotique lié au pôle K_3 .

La figure 7.p représente le cas particulier où ν est égal à $1/\sqrt{2}$ pour lequel l'intervalle $[\beta_3, \beta_1]$ est réduit à un seul point puisqu'alors β_3 et β_1 sont égaux.

7.4.3.4 - Cas où ν est supérieur à $1/\sqrt{2}$

Quand β appartient aux intervalles $[-\frac{\pi}{2}, \beta_1[$ et $[\theta_c, +\frac{\pi}{2}]$, la contribution du pôle K_3 à la fonction potentiel des vitesses a une partie principale qui décroît comme R^{-1} .

Quand β appartient à l'intervalle $[\beta_1, \theta_c[$, la contribution de K_3 est donnée par la formule (7.57).

La figure 7.q montre l'allure et le sens de propagation du champ de vagues lointain pris en compte par K_3 .

7.4.4 - Contribution du pôle K_4

7.4.4.1 - Cas où ν est inférieur à $1/4$

Quand β appartient à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \beta_4[$, le terme principal de la fonction $\phi(K_4)$ décroît comme R^{-1} .

Quand β est égal à β_4 , la contribution de K_4 au potentiel des vitesses a pour partie principale :

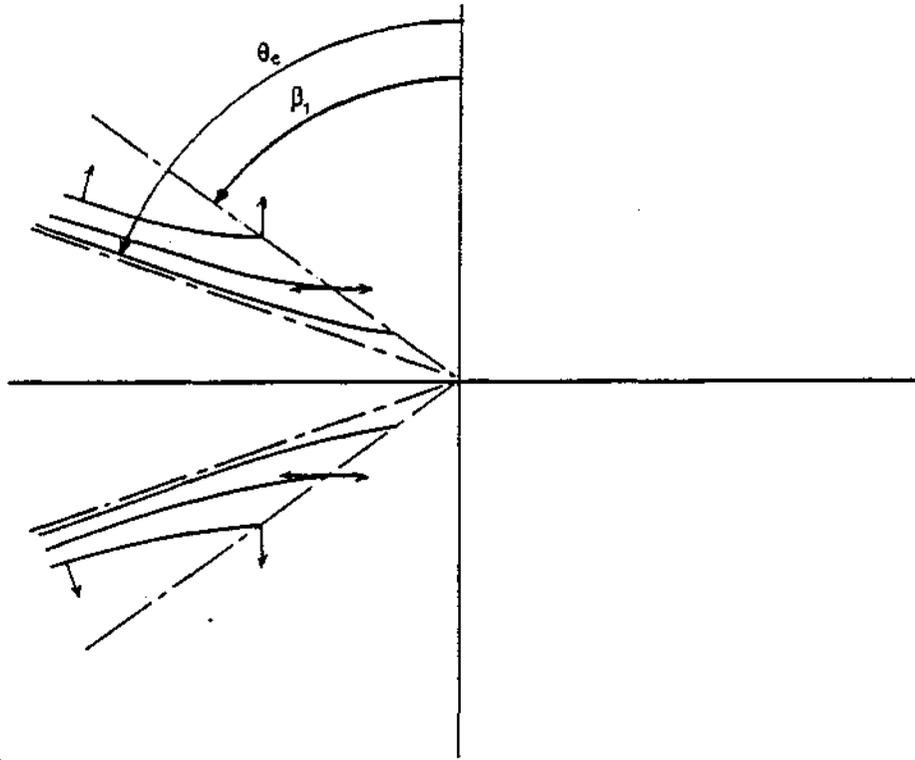


figure 7.p

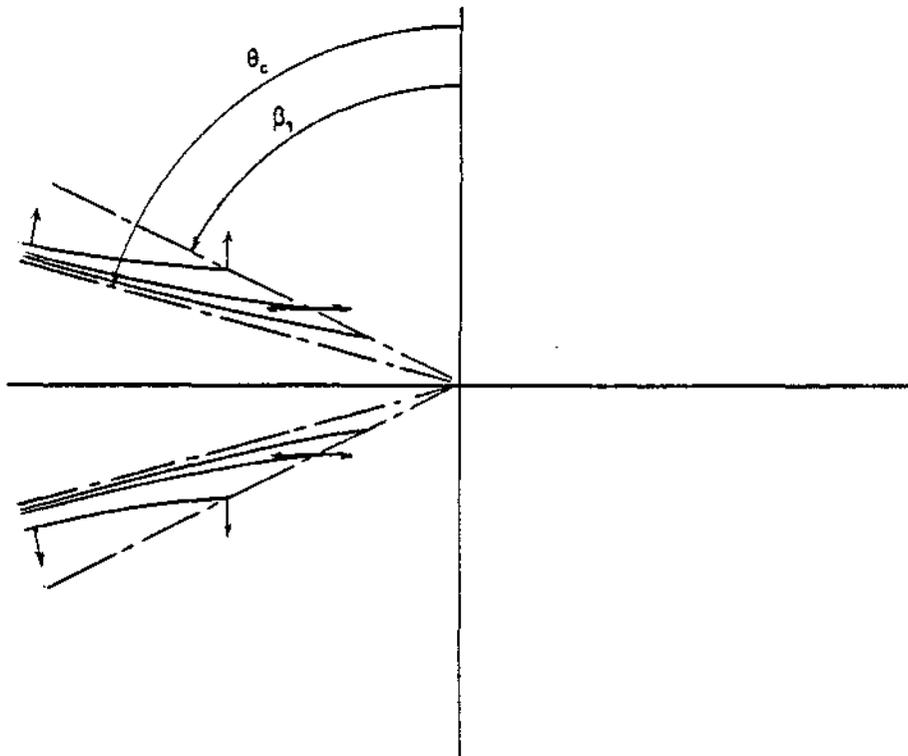


figure 7.q

$$(7.58) \quad \Phi(K_4) = -\frac{Q^*}{2\eta l} \operatorname{Re} \left\{ A_4 e^{i[RK_4(\theta_4) \sin(\theta_4 - \beta) - \omega t]} \right\}$$

$$\text{avec :} \quad A_4 = f_4(\theta_4) \frac{\Gamma(1/3)}{\sqrt{3}} \left[\frac{6}{|S_4''(\theta_4)|} \right]^{1/3} R^{-1/3} [1 + O(R^{-1/3})]$$

Quand β appartient à l'intervalle $]\beta_4, \frac{\pi}{2}[$, la partie principale de la contribution de K_4 s'écrit :

$$(7.59) \quad \Phi(K_4) = -\frac{Q^*}{2\eta l} \operatorname{Re} \left\{ A_4' e^{i[RK_4(\theta_4') \sin(\theta_4' - \beta) - \omega t + \frac{\pi}{4}]} \right. \\ \left. + A_4'' e^{i[RK_4(\theta_4'') \sin(\theta_4'' - \beta) - \omega t - \frac{\pi}{4}]} \right\}$$

$$\text{avec :} \quad A_4' = f_4(\theta_4') \sqrt{\frac{2\eta}{|S_4''(\theta_4')|}} R^{-1/2} [1 + O(R^{-1/2})]$$

$$A_4'' = f_4(\theta_4'') \sqrt{\frac{2\eta}{|S_4''(\theta_4'')|}} R^{-1/2} [1 + O(R^{-1/2})]$$

Nous avons ici encore deux systèmes d'ondes dont les directions de propagation, observées suivant la direction β , sont définies par les angles θ_4' et θ_4'' . Quand β est égal à β_4 , ces deux systèmes sont en quadrature. Les pulsations de ces houles sont respectivement dans le repère absolu :

$$(7.60) \quad \left[\begin{array}{l} \tilde{\omega}'_4 = \tilde{\omega} + FK_4(\theta_4') \cos \theta_4' \\ \tilde{\omega}''_4 = \tilde{\omega} + FK_4(\theta_4'') \cos \theta_4'' \end{array} \right.$$

et leurs célérités sont :

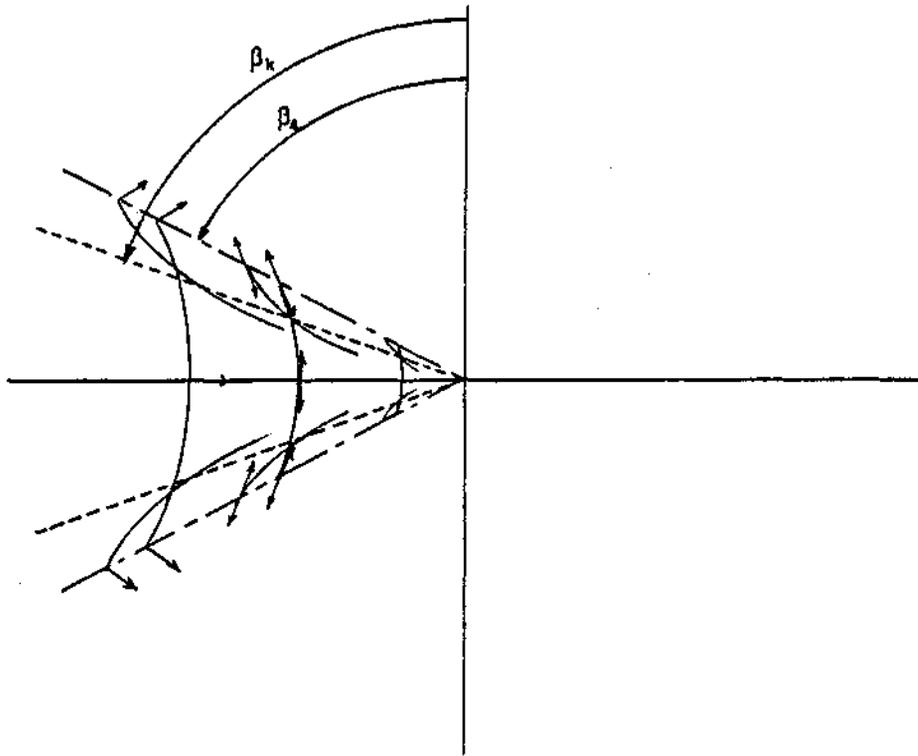


figure 7.r

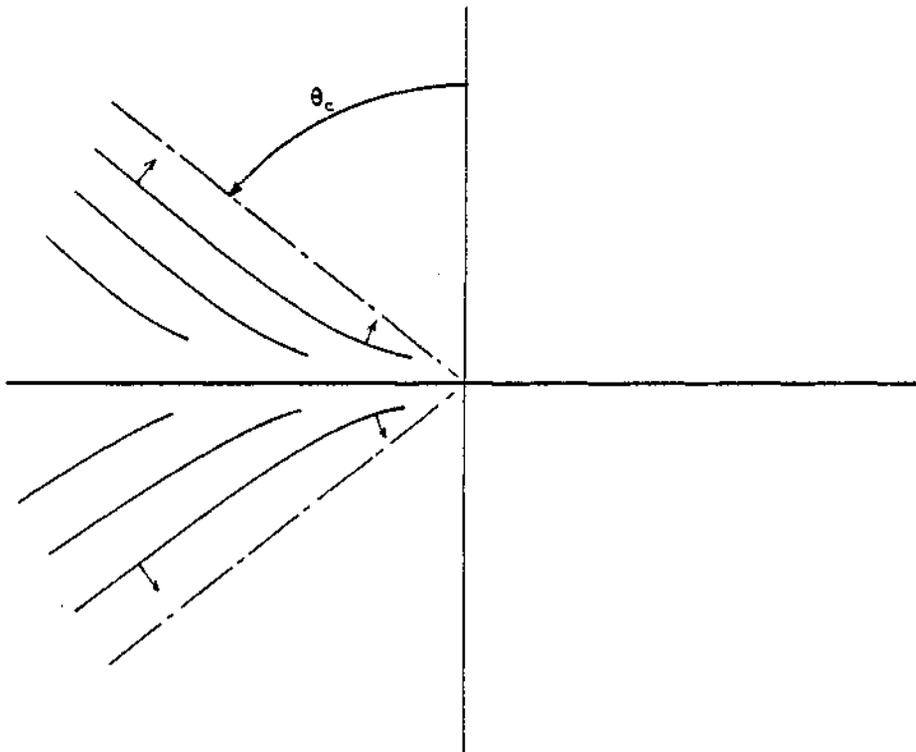


figure 7.s

$$(7.61) \quad \left[\begin{array}{l} \mathcal{G}'_4 = U \cos \theta'_4 \left[\frac{\tilde{\omega}}{FK_4(\theta'_4) \cos \theta'_4} - 1 \right] = \frac{g}{2\omega} \left[1 - \sqrt{1 - 4\gamma \cos \theta'_4} \right] > 0 \\ \mathcal{G}''_4 = U \cos \theta''_4 \left[\frac{\tilde{\omega}}{FK_4(\theta''_4) \cos \theta''_4} - 1 \right] = \frac{g}{2\omega} \left[1 - \sqrt{1 - 4\gamma \cos \theta''_4} \right] > 0 \end{array} \right.$$

Quand β est égal à $\frac{\pi}{2}$, seuls les termes contenant θ''_4 subsistent.

La figure 7.r montre l'allure et le sens de propagation de chaque champ de vagues lointain lié à K_4 .

7.4.4.2 - Cas où v est supérieur à $1/4$

Quand β appartient à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \theta_c]$, la contribution de K_4 au potentiel des vitesses a une partie principale qui décroît comme R^{-1} .

Quand β appartient à l'intervalle $]\theta_c, +\frac{\pi}{2}[$, la contribution de K_4 est donnée par l'expression suivante :

$$(7.62) \quad \Phi(K_4) = -\frac{Q^*}{2\pi l} \operatorname{Re} \left\{ A'_4 e^{i[KK_4(\theta'_4)\sin(\theta'_4-\beta) - \omega t + \frac{\pi}{4}]} \right\}$$

avec :

$$A'_4 = f'_{41}(\theta'_4) \sqrt{\frac{2\eta}{|g'_{41}(\theta'_4)|}} R^{-1/2} [1 + O(R^{-1/2})]$$

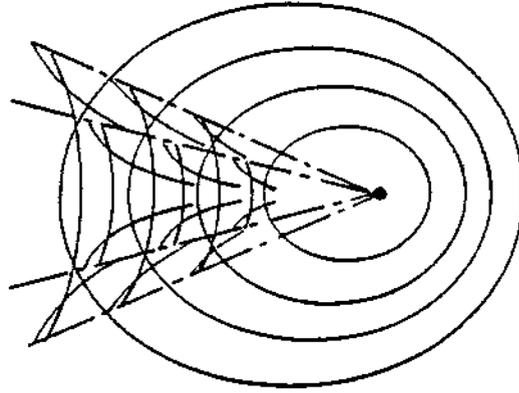
La pulsation et la célérité sont données par les formules (7.60) et (7.61).

Quand β est égal à $\frac{\pi}{2}$, $\Phi(K_4)$ décroît comme R^{-1} .

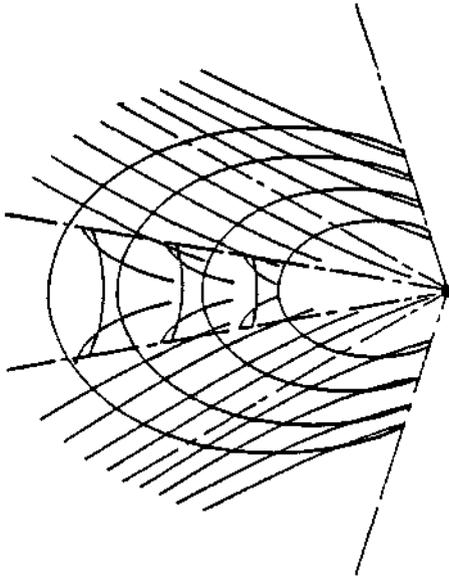
La figure 7.s montre l'allure et le sens de propagation du champ de vagues asymptotique lié à K_4 .

7.4.5 - Conclusion

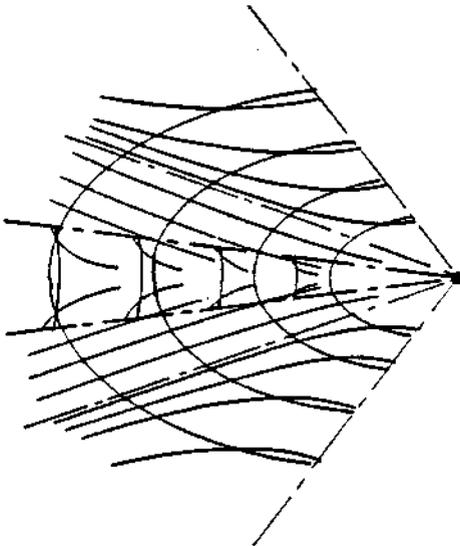
L'analyse que nous venons d'achever nous permet désormais d'avoir une idée précise du champ de vagues asymptotique. La figure 7.t mon-



$$0 < v < 1/4$$



$$1/4 < v < 1/\sqrt{2}$$



$$1/\sqrt{2} = v$$

figure 7.t

tre son évolution en fonction de v .

Il est à noter que nous obtenons ici de manière précise les allures générales données par E. BECKER /HY-2/.

7.5 - CONDITION DE RADIATION A L'INFINI

L'analyse du champ de vagues asymptotique, et plus particulièrement la détermination des célérités des différentes ondes, nous fournit les moyens d'énoncer de manière simple la condition de radiation à l'infini qui porte sur deux points.

"Aucun système d'onde ayant, ou pouvant avoir en fonction de F et ω , dans le repère absolu, une vitesse de groupe supérieure ou égale à la vitesse du solide ne peut converger vers celui-ci.

Aucun système d'onde ayant, dans le repère absolu, une vitesse de groupe inférieure ou égale à la vitesse moyenne de la carène ne peut se propager en avant de celle-ci."

Il est possible de condenser les deux parties de l'énoncé en écrivant :

"L'énergie de tous les systèmes de vagues engendrés par le solide s'éloigne de ce dernier".

Cette condition générale englobe bien évidemment les deux cas particuliers de la diffraction-radiation à vitesse nulle et du problème de Neumann - Kelvin.

Quand la vitesse moyenne est nulle, la première partie du premier énoncé et le deuxième énoncé s'identifient à la condition de Sommerfeld usuelle, la seconde partie du premier énoncé n'impose alors aucune contrainte.

Quand la pulsation est nulle, la première partie du premier énoncé n'est plus contraignante, mais la seconde indique, comme le deuxième énoncé, que le plan d'eau n'est pas perturbé à l'infini amont puisqu'alors la vitesse de groupe est la moitié de la vitesse du navire.

Il est aisé de voir que le champ de vagues obtenu au moyen du modèle du fluide presque parfait vérifie la condition de radiation, et que, si nous changeons le signe de ε , nous obtenons un champ de vagues lointain symétrique du précédent par rapport à l'axe oy qui serait en contradiction formelle avec

elle. La solution obtenue au moyen du modèle mathématique du fluide parfait étant une combinaison linéaire des deux précédentes, la condition de radiation que nous avons déterminée permet de trier les solutions mathématiques pour ne garder que celle qui correspond à la réalité physique.

7.6 - ETUDE DU CAS PARTICULIER $\nu = 1/4$

Quand ν prend la valeur $\nu_c = 1/4$, la fonction de Green n'est pas définie puisqu'alors la deuxième intégrale n'est pas convergente. La question se pose donc de savoir à quel phénomène physique correspond cette discontinuité du modèle mathématique, et ce qu'il en résulte pour l'allure du champ de vague asymptotique.

Lorsque ν est égal à ν_c , la célérité des vagues engendrées sur l'axe du déplacement, vers l'avant ($\beta = -\pi/2$), est :

$$(7.63) \quad \mathcal{C}_3 \cdot \frac{g}{2\omega} = \frac{U}{2\nu} = 2U$$

Ainsi, la vitesse de groupe est égale, dans le repère absolu, à la vitesse de route U .

Dans le repère relatif, la célérité des ondes est alors égale à U et la vitesse de groupe est nulle ; on observe donc un effet de bourrage énergétique.

Lorsque ν est supérieur à ν_c , un cône de demi angle $(\frac{\pi}{2} + \beta_3)$ axé sur ox , dans lequel aucun système de vagues lointaines ne peut se propager, apparaît.

Les figures 7.u présentent l'allure des configurations limites quand ν tend vers $1/4$ par valeurs inférieures et par valeurs supérieures.

7.7 - ETUDE DE L'INTEGRALE A L'INFINI

Il nous reste désormais à montrer que les intégrales à l'infini sont nulles. Remarquons tout d'abord que l'intégrale de contour issue de l'application du théorème de Stokes a le même comportement que l'intégrale sur Σ . Il résulte, en effet, de l'étude asymptotique précédente que la fonction potentiel des vitesses, la fonction de Green et leurs dérivées ont le même compor-

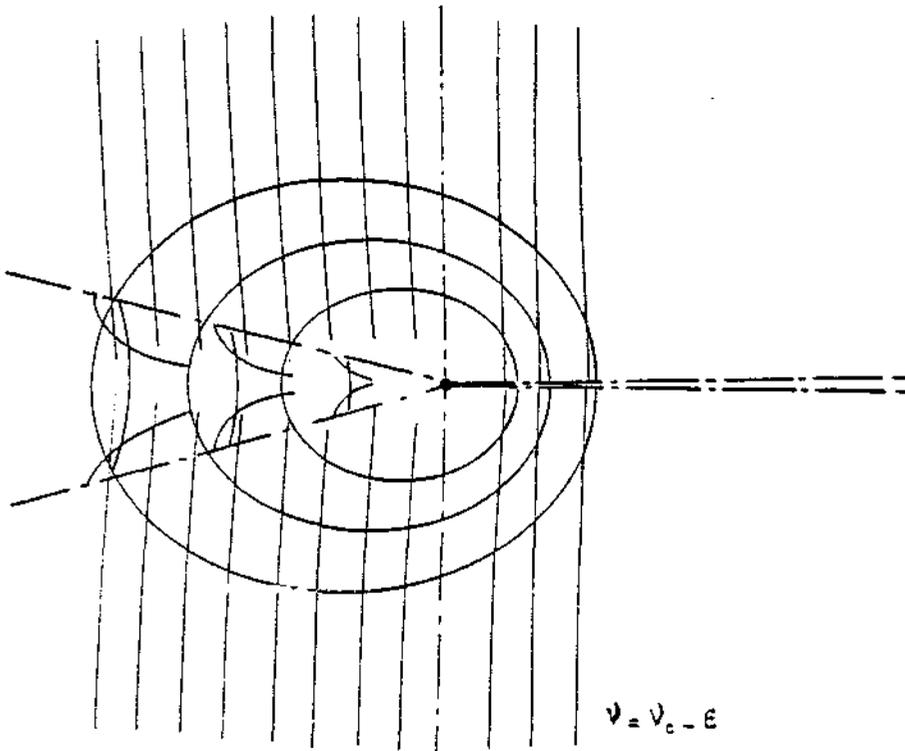
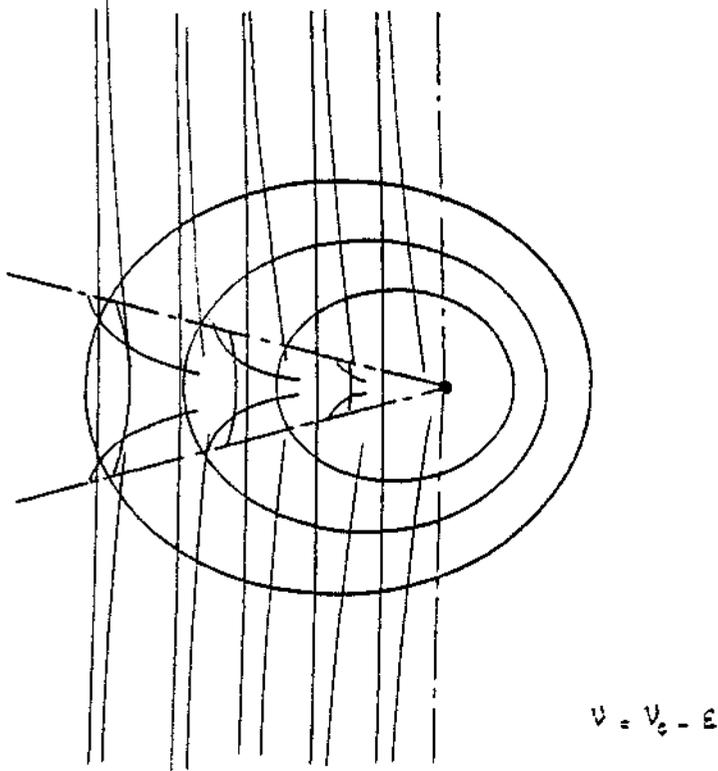


figure 7.u

tement à l'infini, et tous les intégrands sont le produit de deux au moins de ces quantités.

Soit D le domaine fluide limité par la carène C , la surface libre SL et la surface de contrôle Σ qui se compose d'un tronc de cylindre Σ_1 de rayon R , de hauteur h , dont l'axe vertical est centré en O_1 et d'un disque Σ_2 parallèle à SL et situé à la côte $-h$

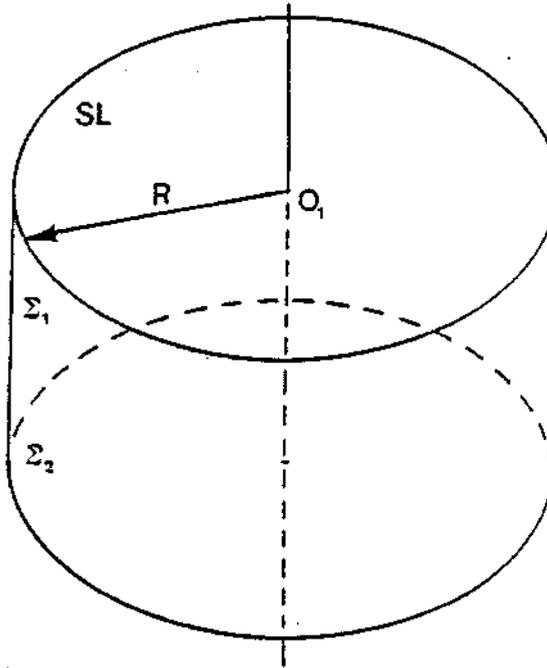


figure 7.v

Le problème à résoudre, après l'introduction de la fonction de Green, consiste à déterminer la solution $\Phi(M;t)$ de l'équation intégrale issue de la représentation suivante :

$$(7.64) \quad \Phi(M;t) = I_C[\Phi, G'](M;t) + I_\Sigma[\Phi, G'](M;t) \quad \forall M \in D$$

où I_C et I_Σ symbolisent les intégrales sur les supports C et Σ .

Nous avons en fait déterminé une fonction $\Psi(M;t)$ qui est solution de l'équation issue de la représentation (7.65).

$$(7.65) \quad \Psi(M;t) = I_C[\Psi, G'](M;t)$$

Il est clair que $\Psi(M;t)$ et $\Phi(M;t)$ coïncideront en tout point de D si, et seulement si, $I_{\Sigma}[\Psi, G'](M;t)$ est identiquement nulle en tout point M de D .

La représentation (7.64) ayant été obtenue par application de la formule de Green, $\Phi(M;t)$ est indépendante de Σ et donc de R et h . Ainsi, puisque $I_C[\Phi; G'](M;t)$ n'est pas fonction de Σ , $I_{\Sigma}[\Phi, G'](M;t)$ est également indépendante de Σ pour tout point appartenant à D .

L'analyse asymptotique de la solution $\Psi(M;t)$ permet d'écrire que pour R suffisamment grand :

$$(7.66) \quad \Psi(M;t) = \sum_I \operatorname{Re} \left\{ A'_i(c, \beta', z') e^{i[\beta'_i(\beta')R' + C'_i + D'_i \omega t]} \right\} R'^{-n_i(\beta')} [1 + O(R'^{-n_i(\beta')})]$$

$$(7.67) \quad G'(M, M; t) = \sum_j \operatorname{Re} \left\{ A_j(M', \beta, z) e^{i[\beta_j(\beta)R + C_j + D_j \omega t]} \right\} R^{-n_j(\beta)} [1 + O(R^{-n_j(\beta)})]$$

expressions dans lesquelles $n_i(\beta)$ désigne l'une des valeurs de l'ensemble $\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\}$, où C_i peut prendre les valeurs $\{-\pi/4, 0, +\pi/4\}$ et où D_i vaut ± 1 .

Soit alors une surface Σ définie par un rayon R' suffisamment grand pour que les formules (7.66) et (7.67) soient utilisables. Nous avons alors la relation suivante entre R , R' et d si M est suffisamment loin de Σ (par exemple, $M \in D_1$ limité par Σ_1 de rayon R'_1 inférieur à R').

$$(7.68) \quad R = R' \cos(\beta' - \beta) - d \cos(\alpha - \beta')$$

Expression dans laquelle les paramètres sont définis par la figure 7.w.

$$(7.71) \quad \sqrt{\frac{2\pi}{|\mathcal{B}'_i(\theta_i)|}} = \sqrt{\frac{2\pi}{[K'_i(\theta_i) - K_i(\theta_i)] \sin(\theta_i - \beta') + 2K'_i(\theta_i) \cos(\theta_i - \beta')}}$$

Ainsi, l'intégration suivant β' sera convergente et permettra de majorer $I_{\Sigma_1}[\Psi, G'](M; t)$ alors que l'intégrand ne saurait être majoré uniformément. Nous avons donc :

$$(7.72) \quad I_{\Sigma_1}[\Psi, G'](M; t) \leq \iint_{\Sigma_1} \sum_{ij} \left| \operatorname{Re} \left\{ A'_i(c, \beta', z') \right\} \right| \left| \operatorname{Re} \left\{ A_j(M', \beta, z) \right\} \right| \left[\cos(\beta' - \beta) \right]^{-n_j(\beta')} R'^{1 - (n_i(\beta') + n_j(\beta))} [1 + O(R'^{1 - (n_i(\beta') + n_j(\beta))})] d\beta'$$

Si $n_i(\beta') + n_j(\beta)$ est différent de l'unité, le majorant tend vers zéro quand R' tend vers l'infini et $I_{\Sigma_1}[\Psi, G'](M; t)$ est nul quand Σ_1 est à l'infini, ce qui implique que I_{Σ_1} est nul quel que soit Σ_1 . Si $n_i(\beta') + n_j(\beta)$ est égal à l'unité, I_{Σ_1} s'écrit :

$$(7.73) \quad I_{\Sigma_1}[\Psi, G'](M; t) = \iint_{\Sigma_1} \sum_{ij} \operatorname{Re} \left\{ A'_i(c, \beta', z') e^{i[\mathcal{A}'_i(\beta)R' + c_i + \mathcal{D}'_i \omega t]} \right\} \operatorname{Re} \left\{ A_j(M', \beta, z) e^{i[\mathcal{A}_j(\beta)R + C_j + \mathcal{D}_j \omega t]} \right\} \times [\cos(\beta' - \beta)]^{-n_j(\beta')} d\beta' dh$$

Or, cette expression est une combinaison linéaire de fonctions sinusoidales de l'argument R' , et ne sera donc indépendant de R' que si elle est nulle.

Un raisonnement analogue s'applique aisément pour Σ_2 puisque $I_{\Sigma_2}[\Psi, G'](M; t)$ doit être indépendant de R' et de h , mais cette fois h n'intervenant que par l'intermédiaire de la fonction e^{-h} , ce qui permet de conclure immédiatement.

Nous avons ainsi montré que, pour tout point M appartenant à D_1 , $I_{\Sigma}[\Psi, G'](M; t)$ est nul. Puisque nous sommes libres de fixer arbitrairement Σ_1 , nous pouvons choisir D_1 aussi grand que nous le voulons (en maintenant un rapport convenable entre R' et R'_1), il s'ensuit que $I_{\Sigma}[\Psi, G'](M, t)$ est nulle en tout point M de côte négative.



Chapitre 8

ETUDE ASYMPTOTIQUE DE LA FONCTION DE GREEN ET ANALYSE DU CHAMP DE VAGUES LOINTAIN DANS LE CAS OÙ LA PROFONDEUR EST FINIE



Lorsque la profondeur est limitée, l'étude asymptotique est considérablement plus compliquée puisqu'alors les pôles ne sont plus connus analytiquement en fonction de θ et qu'il n'est, a priori, plus possible d'appliquer le principe de la phase stationnaire.

Il est à prévoir que les conclusions obtenues précédemment au sujet de l'intégrale à l'infini ne seront pas modifiées; par contre, il est plus délicat de se faire à l'avance une idée du champ de vagues asymptotique.

8.1 - POTENTIEL PROCHE ET POTENTIEL LOINTAIN

Le potentiel des vitesses engendré par une source ponctuelle s'écrit :

$$(8.1) \quad \Phi(M; t) = \Phi_0(M; t) + \Phi_1(M; t) + \Phi_2(M; t)$$

avec :

$$\begin{aligned} \Phi_0(M; t) &= -\frac{Q^*}{4\pi} \left[\frac{1}{|MM'|} + \frac{1}{|MN'|} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_0} a_n \left(\frac{1}{|MM'_{n1}|} + \frac{1}{|MM'_{n2}|} + \frac{1}{|MM'_{n3}|} + \frac{1}{|MM'_{n4}|} \right) \right] \cos \omega t \\ \Phi_1(M; t) &= -\frac{Q^*}{16\pi^2 h} \operatorname{Re} \left\{ e^{i\omega t} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \left[\sum_{n=1}^{N_1} a_n \left(\frac{1}{\lambda_n + \xi_1} + \frac{1}{\lambda_n + \xi_2} + \frac{1}{\lambda_n + 2 + \xi_3} + \frac{1}{\lambda_n - 2 + \xi_4} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - A(k_1) \left(G_1[k_1(\xi_1 - 2)] + G_1[k_1(\xi_2 - 2)] + G_1[k_1 \xi_3] + G_1[k_1(\xi_4 - 4)] \right) \right] \right. \\ &\quad \left. - A(k_2) \left(G_1[k_2(\xi_1 - 2)] + G_1[k_2(\xi_2 - 2)] + G_1[k_2 \xi_3] + G_1[k_2(\xi_4 - 4)] \right) \right] d\theta \left. \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(M;t) = & -\frac{Q^+}{16\pi^2 h} \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\omega t} \left[\int_{-i/2}^{+i/2} \sum_{n=1}^{K_1} a_n \left(\frac{1}{\lambda_n + \xi_1} + \frac{1}{\lambda_n + \xi_2} + \frac{1}{\lambda_n + 2 + \xi_3} + \frac{1}{\lambda_n - 2 + \xi_4} \right) d\theta \right. \right. \\ & - \int_{-i/2}^{+i/2} \left(B(K_3) \left(G3[K_3(\xi_1-2)] + G3[K_3(\xi_2-2)] + G3[K_3\xi_3] + G3[K_3(\xi_4-4)] \right) \right. \\ & \left. \left. + B(K_4) \left(G4[K_4(\xi_1-2)] + G4[K_4(\xi_2-2)] + G4[K_4\xi_3] + G4[K_4(\xi_4-4)] \right) \right) d\theta \right. \\ & \left. - \int_{+i/2}^{+i/2} \left(B(K_3) \left(G3[K_3(\xi_1-2)] + G3[K_3(\xi_2-2)] + G3[K_3\xi_3] + G3[K_3(\xi_4-4)] \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + B(K_4) \left(G4[K_4(\xi_1-2)] + G4[K_4(\xi_2-2)] + G4[K_4\xi_3] + G4[K_4(\xi_4-4)] \right) \right) d\theta \right\} \end{aligned}$$

La connaissance du comportement asymptotique des fonctions G1, G2 et G3 permet de séparer les termes qui composent, a priori, le potentiel proche des autres, de même qu'au septième chapitre.

Le potentiel proche inclut l'ensemble des formules précédentes dans lesquelles les fonctions G1 et G3 sont remplacées par G2.

La contribution de $\Phi_1(M;t)$ au potentiel lointain est alors :

$$(8.2) \quad \Phi_{1c}(M;t) = -\frac{Q^+}{8\pi h} \operatorname{Re} \left\{ i e^{i\omega t} \int_{-i/2}^{+i/2} \left[A(K_1) \left(e^{K_1(\xi_1-2)} + e^{K_1(\xi_2-2)} + e^{K_1\xi_3} + e^{K_1(\xi_4-4)} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + A(K_2) \left(e^{K_2(\xi_1-2)} + e^{K_2(\xi_2-2)} + e^{K_2\xi_3} + e^{K_2(\xi_4-4)} \right) \right] d\theta \right\}$$

ce qui peut se mettre sous la forme suivante :

$$(8.3) \quad \Phi_{1c}(M;t) = -\frac{Q^+}{2\pi h} \operatorname{Re} \left\{ i e^{i\omega t} \left[\int_{-i/2}^{+i/2} \operatorname{ch} K_1(z+1) \operatorname{ch} K_1(z'+1) A(K_1) e^{-2K_1} e^{iK_1\Omega} d\theta \right. \right. \\ \left. \left. \int_{-i/2}^{+i/2} \operatorname{ch} K_2(z+1) \operatorname{ch} K_2(z'+1) A(K_2) e^{-2K_2} e^{iK_2\Omega} d\theta \right] \right\}$$

La contribution de $\Phi_2(M;t)$ au potentiel lointain s'écrit de même si v est inférieur à v_c :

$$(8.4) \quad \Phi_{2t}(M;t) = + \frac{Q^*}{2\pi h} \operatorname{Re} \left\{ i e^{-i\omega t} \left[\int_{\beta}^{+\pi/2} \operatorname{ch} K_3(z+1) \operatorname{ch} K_3(z'+1) B(K_3) e^{-2K_3} e^{iK_3\Omega} d\theta \right. \right. \\ \left. \left. - \int_{-\pi/2}^{\beta} \operatorname{ch} K_4(z+1) \operatorname{ch} K_4(z'+1) B(K_4) e^{-2K_4} e^{iK_4\Omega} d\theta \right] \right\}$$

Dans le cas où v est supérieur à v_c , l'expression de $\Phi_{2t}(M;t)$ dépend de la valeur de β . Nous avons alors :

$$(8.5) \quad \Phi_{2t}(M;t) = + \frac{Q^*}{2\pi h} \operatorname{Re} \left\{ i e^{-i\omega t} \left[\int_{\beta}^{-\theta_c} \operatorname{ch} K_3(z+1) \operatorname{ch} K_3(z'+1) B(K_3) e^{-2K_3} e^{iK_3\Omega} d\theta \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{\theta_c}^{+\pi/2} \operatorname{ch} K_3(z+1) \operatorname{ch} K_3(z'+1) B(K_3) e^{-2K_3} e^{iK_3\Omega} d\theta \right. \right. \\ \left. \left. - \int_{-\pi/2}^{\beta} \operatorname{ch} K_4(z+1) \operatorname{ch} K_4(z'+1) B(K_4) e^{-2K_4} e^{iK_4\Omega} d\theta \right] \right\} \quad \beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\theta_c\right]$$

$$\Phi_{2t}(M;t) = + \frac{Q^*}{2\pi h} \operatorname{Re} \left\{ i e^{-i\omega t} \left[\int_{\beta}^{+\pi/2} \operatorname{ch} K_3(z+1) \operatorname{ch} K_3(z'+1) B(K_3) e^{-2K_3} e^{iK_3\Omega} d\theta \right. \right. \\ \left. \left. - \int_{-\theta_c}^{-\pi/2} \operatorname{ch} K_4(z+1) \operatorname{ch} K_4(z'+1) B(K_4) e^{-2K_4} e^{iK_4\Omega} d\theta \right] \right\} \quad \beta \in \left[-\theta_c, +\theta_c\right]$$

$$\Phi_{2t}(M;t) = + \frac{Q^*}{2\pi h} \operatorname{Re} \left\{ i e^{-i\omega t} \left[\int_{\beta}^{+\pi/2} \operatorname{ch} K_3(z+1) \operatorname{ch} K_3(z'+1) B(K_3) e^{-2K_3} e^{iK_3\Omega} d\theta \right. \right. \\ \left. \left. - \int_{-\pi/2}^{-\theta_c} \operatorname{ch} K_4(z+1) \operatorname{ch} K_4(z'+1) B(K_4) e^{-2K_4} e^{iK_4\Omega} d\theta \right. \right. \\ \left. \left. - \int_{\theta_c}^{\beta} \operatorname{ch} K_4(z+1) \operatorname{ch} K_4(z'+1) B(K_4) e^{-2K_4} e^{iK_4\Omega} d\theta \right] \right\} \quad \beta \in \left[+\theta_c, +\frac{\pi}{2}\right]$$

De même que précédemment, nous nous intéresserons exclusivement au potentiel lointain qui conditionne la contribution de l'intégrale à l'infini, et le champ des vagues lointaines.

8.2 - APPROXIMATION ANALYTIQUE DES PÔLES

Nous avons su ramener l'expression du potentiel lointain à une forme analogue à celle du septième chapitre. La seule difficulté supplémentaire est due à l'impossibilité d'appliquer le principe de la phase stationnaire à des fonctions dont nous ne possédons pas de formulation analytique.

Il est donc logique de rechercher une approximation analytique possédant les mêmes caractères fondamentaux que les solutions exactes. Nous obtiendrons alors une information qui ne sera plus quantitative, mais qui permettra tout de même d'apporter une réponse qualitative aux questions que nous nous sommes posées.

8.2.1 - Choix du type d'approximation

Nous ne pourrions exprimer simplement les pôles que s'ils sont les solutions d'équations algébriques du premier ou du deuxième degré.

Le degré un ne semble pas réaliste puisque les équations exactes dont les pôles sont solutions contiennent des termes des deux premiers degrés.

Nous nous attacherons donc à approximer la fonction $\sqrt{K \operatorname{th} K}$ par une fonction algébrique de la forme suivante :

$$(8.6) \quad y(K) = \frac{aK^2 + bK + c}{K + d}$$

puisque les premiers membres des équations à résoudre sont :

$$(8.7) \quad f(K) = \pm (\tilde{\omega} \pm FK \cos \theta)$$

La fonction $y(K)$ passe par l'origine, ce qui entraîne que le coefficient c est nul. De plus, la tangente à l'origine est égale à l'unité, ce qui impose aux coefficients b et d d'être égaux. $y(K)$ s'écrit alors :

$$(8.8) \quad y(K) = \frac{aK^2 + bK}{K + b}$$

En imposant à $y(K)$ de se raccorder tangentiuellement à la fonction \sqrt{K} en un point d'abscisse K_0 , nous obtenons les deux équations suivantes :

$$(8.9) \quad \left[\begin{array}{l} y(K_0) = \frac{2K_0^2 + bK_0}{K_0 + b} = \sqrt{K_0} \\ y'(K_0) = \frac{(22K_0 + b)(K_0 + b) - (2K_0^2 + bK_0)}{(K_0 + b)^2} = \frac{1}{2\sqrt{K_0}} \end{array} \right.$$

Ce système est équivalent aux équations (8.10).

$$(8.10) \quad \left[\begin{array}{l} 2K_0^2 + b(K_0 - \sqrt{K_0}) - K_0\sqrt{K_0} = 0 \\ 22K_0^2\sqrt{K_0} + b^2(2\sqrt{K_0} - 1) + 42bK_0\sqrt{K_0} - 2bK_0 - K_0^2 = 0 \end{array} \right.$$

Il vient donc en remplaçant a par son expression en fonction de b , puis en factorisant :

$$(8.11) \quad \left[\begin{array}{l} a = \frac{K_0\sqrt{K_0} - b(K_0 - \sqrt{K_0})}{K_0^2} \\ [b + K_0][(2\sqrt{K_0} - 3)b - K_0] = 0 \end{array} \right.$$

Il est clair que la solution $b = -K_0$ ne saurait convenir puisqu'alors la fonction $y(K)$ cesserait d'être définie. De même, $b + K$ ne doit pas s'annuler dans l'intervalle $[0, K_0]$. La seule solution convenable est donc :

$$(8.12) \quad \left[\begin{array}{l} a = -\frac{1}{K_0} \left[\frac{2\sqrt{K_0} - K_0}{2\sqrt{K_0} - 3} \right] \\ b = \frac{K_0}{2\sqrt{K_0} - 3} \end{array} \right. \quad K_0 > 1 ; \quad K_0 \neq \frac{9}{4}$$

La figure 8.a représente l'approximation obtenue pour K_0 égal à 2.2. Son intérêt est de montrer que la représentation de $\sqrt{K \operatorname{th} K}$ par une fonction de la forme $y(K)$ conduit à un résultat qualitativement acceptable.

La figure 8.b met en évidence l'évolution des coefficients a et b en fonction de K_0 . Il est clair que nous pouvons les choisir aussi grands, en valeurs absolues, que nous le voulons.

8.2.2 - Approximation des pôles

Les pôles approximatés sont solutions des équations (8.13) :

$$(8.13) \quad \tilde{\omega} \pm K F \cos \theta = \pm \frac{a K^2 + b K}{K + b}$$

c'est-à-dire respectivement :

$$(8.14) \quad \left[\begin{array}{l} K^2 [a + F \cos \theta] + K [b (1 + F \cos \theta) - \tilde{\omega}] - b \tilde{\omega} = 0 \quad K_1 \\ K^2 [a - F \cos \theta] + K [b (1 - F \cos \theta) + \tilde{\omega}] + b \tilde{\omega} = 0 \quad K_2 \\ K^2 [a - F \cos \theta] + K [b (1 - F \cos \theta) - \tilde{\omega}] - b \tilde{\omega} = 0 \quad K_3, K_4 \end{array} \right.$$

Il est clair que seules conviendront les solutions coïncidant avec celles obtenues en profondeur illimitée au point de raccordement K_0 . Les solutions sont donc sur l'intervalle $[0, K_0]$, et pour K_3 et K_4 réels :

$$(8.15) \quad \left[\begin{array}{l} K_1 = \frac{b(1+F \cos \theta) - \tilde{\omega} + \sqrt{[b(1+F \cos \theta) - \tilde{\omega}]^2 + 4(a+F \cos \theta)b \tilde{\omega}}}{2(a+F \cos \theta)} \\ K_2 = -\frac{b(1-F \cos \theta) + \tilde{\omega} - \sqrt{[b(1-F \cos \theta) + \tilde{\omega}]^2 - 4(a-F \cos \theta)b \tilde{\omega}}}{2(a-F \cos \theta)} \\ K_3 = -\frac{b(1-F \cos \theta) - \tilde{\omega} + \sqrt{[b(1-F \cos \theta) - \tilde{\omega}]^2 + 4(a-F \cos \theta)b \tilde{\omega}}}{2(a-F \cos \theta)} \\ K_4 = -\frac{b(1-F \cos \theta) - \tilde{\omega} - \sqrt{[b(1-F \cos \theta) - \tilde{\omega}]^2 + 4(a-F \cos \theta)b \tilde{\omega}}}{2(a-F \cos \theta)} \end{array} \right.$$

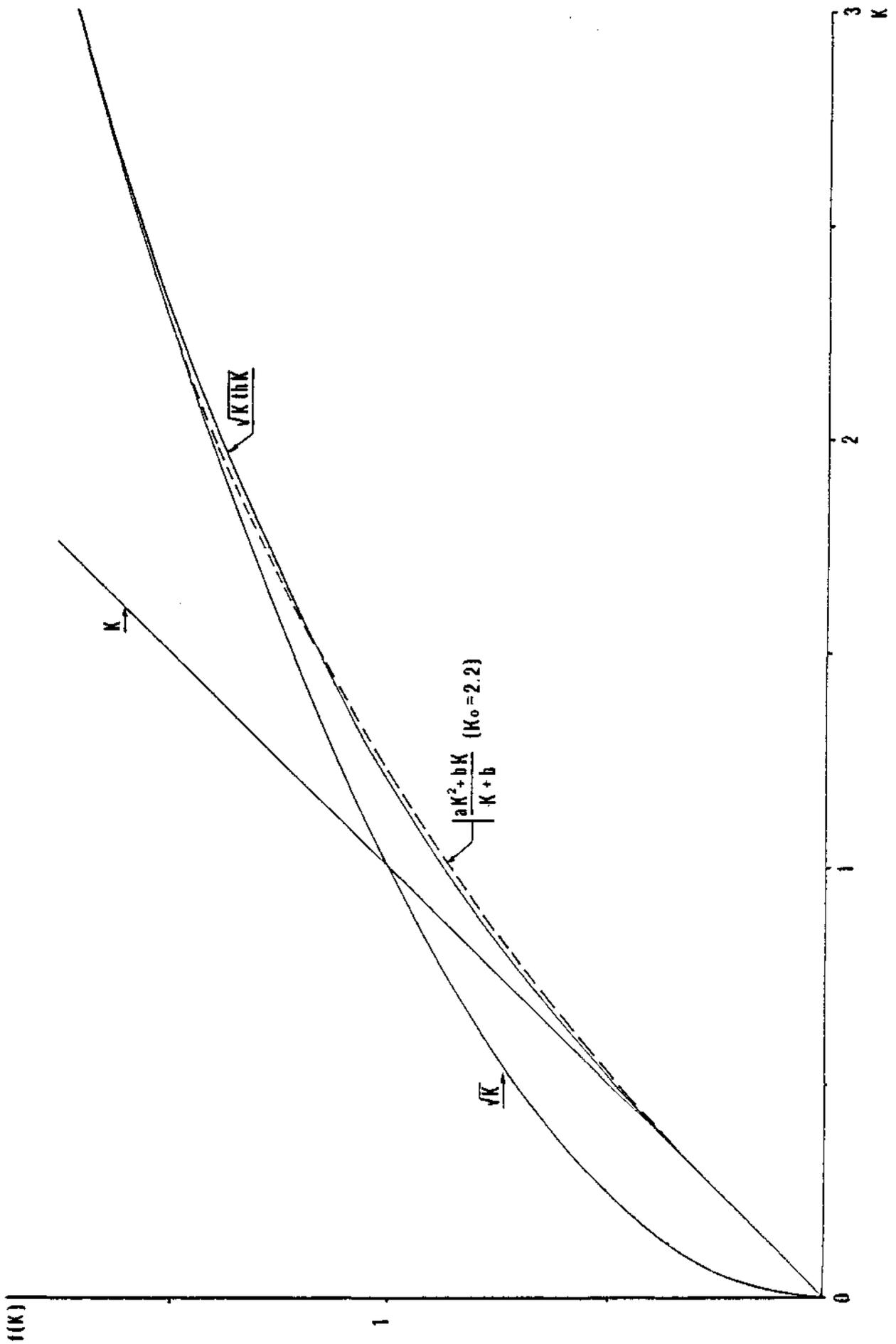


figure 8.a

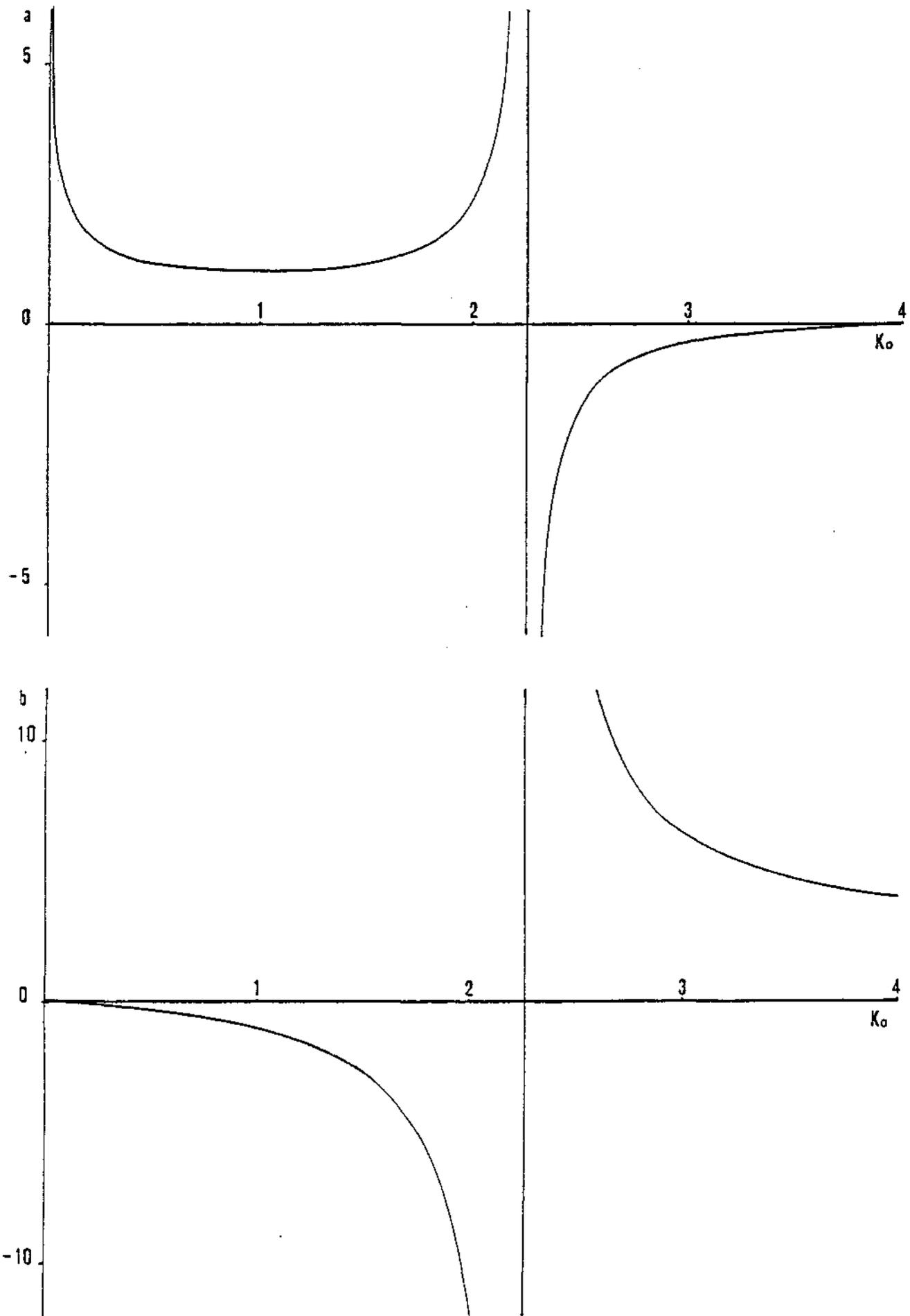


figure 8.b

8.3 - DEVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE DE $\phi_{1\ell}(M;t)$

La fonction $\phi_{1\ell}(M;t)$ peut s'écrire sous la forme suivante, bien adaptée à l'application du principe de la phase stationnaire :

$$(8.16) \quad \Phi_{1\ell}(M;t) = -\frac{Q^*}{2\pi h} \operatorname{Re} \left\{ e^{i\omega t} \left[\int_{-\pi/2}^{\beta} f_1(\theta) e^{iRg_1(\theta)} d\theta + \int_{-\pi/2}^{\beta} f_2(\theta) e^{iRg_2(\theta)} d\theta \right] \right\}$$

avec : $f_1(\theta) = i \operatorname{ch} K_1(z+1) \operatorname{ch} K_1(z'+1) e^{-2K_1}$; $g_1(\theta) = K_1 \sin(\theta - \beta)$

$f_2(\theta) = i \operatorname{ch} K_2(z+1) \operatorname{ch} K_2(z'+1) e^{-2K_2}$; $g_2(\theta) = K_2 \sin(\theta - \beta)$

Une nouvelle difficulté se manifeste ici dans la mesure où il n'est plus possible de discuter en fonction des deux seuls paramètres β et ν , puisque les expressions (8.15) font intervenir $\tilde{\omega}$ et F séparément. Ceci était prévisible car la vitesse critique en présence d'un fond est égale à \sqrt{gh} et correspond donc à un nombre de Froude unitaire indépendamment de la pulsation de rencontre.

8.3.1 - Etude des zéros de $g_1'(\theta)$

La fonction $g_1(\theta)$ s'écrit sous sa forme développée :

$$(8.17) \quad g_1(\theta) = -\frac{b(1+F\cos\theta) - \tilde{\omega} + \sqrt{[b(1+F\cos\theta) - \tilde{\omega}]^2 + 4(2+F\cos\theta)b\tilde{\omega}}}{2(2+F\cos\theta)} \sin(\theta - \beta)$$

et admet pour dérivée :

$$(8.18) \quad g_1'(\theta) = K_1 \left\{ \cos(\theta - \beta) - \sin(\theta - \beta) \left[\frac{bF\sin\theta}{\sqrt{[b(1+F\cos\theta) - \tilde{\omega}]^2 + 4(2+F\cos\theta)b\tilde{\omega}}} \left(1 + \frac{\tilde{\omega}}{K_1(2+F\cos\theta)} \right) + \frac{F\sin\theta}{2+F\cos\theta} \right] \right\}$$

Puisque K_1 est un réel positif, quel que soit θ tel que $\cos\theta$ appartienne à l'intervalle $\left[\frac{\tilde{\omega} - \sqrt{K_0}}{K_0 F}, 1 \right]$, il suffit d'étudier les zéros du facteur entre pa-

renthèses, c'est-à-dire les solutions de l'équation (8.19).

$$(8.19) \quad \cot \gamma(\theta - \beta) = \frac{bF \sin \theta}{\sqrt{[b(1+F \cos \theta) - \tilde{\omega}]^2 + 4(a+F \cos \theta)b\tilde{\omega}}} \left[1 + \frac{\tilde{\omega}}{K_1(a+F \cos \theta)} + \frac{\sqrt{[b(1+F \cos \theta) - \tilde{\omega}]^2 + 4(a+F \cos \theta)b\tilde{\omega}}}{b(a+F \cos \theta)} \right]$$

La figure 8.c montre qu'il existe un couple $(\tilde{\omega}, F)$ et donc un nombre de Strouhal v''_c tel que sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \beta]$:

- Si v est inférieur à v''_c , $g'_1(\theta)$ ne possède aucun zéro quand β est inférieur à un angle β_1 strictement positif, et possède un seul zéro $\theta'_1 \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$ correspondant à un minimum de $g_1(\theta)$ quand β est supérieur ou égal à β_1 .

- Si v est égal à v''_c , $g'_1(\theta)$ ne possède aucun zéro quand β est inférieur à un angle β_1 strictement positif, possède un zéro double $\theta_1 = -\pi/2$ correspondant à une inflexion à tangente horizontale de $g_1(\theta)$ quand β est égal à β_1 , et possède un seul zéro $\theta'_1 \in]-\frac{\pi}{2}, 0]$ correspondant à un minimum de $g_1(\theta)$ quand β est supérieur à β_1 .

- Si v est supérieur à v''_c , $g'_1(\theta)$ ne possède aucun zéro quand β est inférieur à un angle β'_1 strictement positif, possède un zéro double $\theta_1 \in]-\frac{\pi}{2}, 0]$ correspondant à une inflexion à tangente horizontale de $g_1(\theta)$ quand β est égal à β'_1 , possède deux zéros $\theta'_1 \in]\theta_1, 0]$ et $\theta''_1 \in [-\frac{\pi}{2}, \theta_1[$ correspondant respectivement à un minimum et à un maximum de $g_1(\theta)$ quand β appartient à l'intervalle $[\beta'_1, \beta_1]$, et possède un seul zéro $\theta'_1 \in]\theta_1, 0]$ correspondant à un minimum de $g_1(\theta)$ quand β appartient à l'intervalle $[\beta_1, +\frac{\pi}{2}]$.

Ainsi, $g_1(\theta)$ admet des minima, maxima et inflexions à tangente horizontale dans les mêmes conditions qu'au septième chapitre (figure 7.h).

8.3.2 - Etude des zéros de $g'_2(\theta)$

La fonction $g_2(\theta)$ s'écrit sous sa forme développée :

$$(8.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} g'_2(\theta) = -\frac{b(1-F \cos \theta) + \tilde{\omega} - \sqrt{[b(1-F \cos \theta) + \tilde{\omega}]^2 - 4(2-F \cos \theta)b\tilde{\omega}}}{2(2-F \cos \theta)} \sin(\theta - \beta) \quad ; \quad \cos \theta \geq \frac{\tilde{\omega} + \sqrt{K_2}}{FK_0} \\ g'_2(\theta) = \frac{1 + 2\sqrt{\cos \theta} + \sqrt{1 + 4\sqrt{\cos \theta}}}{2F^2 \cos^2 \theta} \sin(\theta - \beta) \quad ; \quad \cos \theta \leq \frac{\tilde{\omega} + \sqrt{K_2}}{FK_0} \end{array} \right.$$

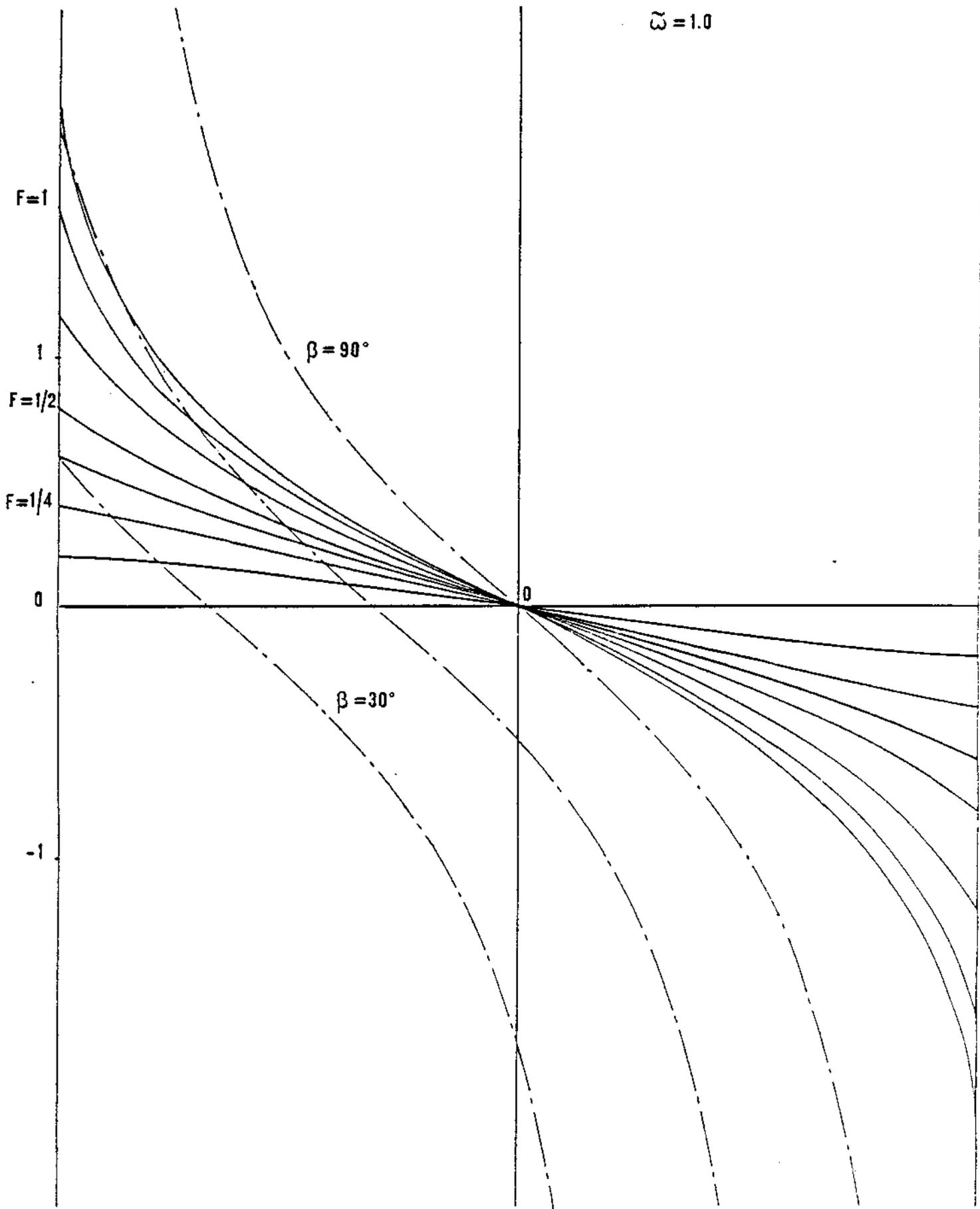


figure 8.c

et admet pour dérivée :

$$(8.21) \quad \left[\begin{array}{l} g_2'(\theta) = K_2 \left\{ \cos(\theta-\beta) - \sin(\theta-\beta) \left[\frac{bF \sin \theta}{\sqrt{[b(1-F \cos \theta) + \tilde{\omega}]^2 - 4(a-F \cos \theta)b\tilde{\omega}}} \left(1 - \frac{\tilde{\omega}}{K_2(a-F \cos \theta)} \right) - \frac{F \sin \theta}{a-F \cos \theta} \right] \right\} \\ g_2'(\theta) = K_2 \left\{ \cos(\theta-\beta) - \sin(\theta-\beta) \left[\frac{2\gamma \sin \theta (1 + \sqrt{1+4\gamma \cos \theta})}{(1+2\gamma \cos \theta)\sqrt{1+4\gamma \cos \theta} + (1+4\gamma \cos \theta)} - 2 \operatorname{tg} \theta \right] \right\} \end{array} \right.$$

Puisque K_2 est un réel positif quel que soit θ , nous sommes ainsi ramenés à étudier les zéros du deuxième facteur, c'est-à-dire les solutions des équations (8.22).

$$(8.22) \quad \left[\begin{array}{l} \operatorname{cotg}(\theta-\beta) = \frac{bF \sin \theta}{\sqrt{[b(1-F \cos \theta) + \tilde{\omega}]^2 - 4(a-F \cos \theta)b\tilde{\omega}}} \left[1 - \frac{\tilde{\omega}}{K_2(a-F \cos \theta)} - \frac{\sqrt{[b(1-F \cos \theta) + \tilde{\omega}]^2 - 4(a-F \cos \theta)b\tilde{\omega}}}{b(a-F \cos \theta)} \right] \\ \operatorname{cotg}(\theta-\beta) = \frac{2\gamma \sin \theta (1 + \sqrt{1+4\gamma \cos \theta})}{(1+2\gamma \cos \theta)\sqrt{1+4\gamma \cos \theta} + (1+4\gamma \cos \theta)} - 2 \operatorname{tg} \theta \end{array} \right.$$

La figure 8.d montre qu'il existe un angle β_2 strictement positif (mais inférieur à l'angle β_2 du chapitre précédent) tel que : si β est inférieur à β_2 , la fonction $g_2'(\theta)$ ne s'annule jamais dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \beta]$, si β est égal à β_2 , la fonction $g_2'(\theta)$ admet un zéro double θ_2 qui correspond à une inflexion à tangente horizontale de $g_2(\theta)$, et si β est supérieur à β_2 , la fonction $g_2'(\theta)$ admet deux zéros $\theta_2' \in]\theta_2, +\frac{\pi}{2}]$ et $\theta_2'' \in [0, \theta_2[$ correspondant respectivement à un minimum et à un maximum de $g_2(\theta)$.

Nous retrouvons donc pour $g_2(\theta)$ la même configuration qu'au paragraphe précédent (figure 7.h).

8.4 - DEVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE DE $\phi_{2l}(M;t)$

Dans le cas où ν est inférieur à ν_c , la fonction $\phi_{2l}(M;t)$ peut s'écrire sous la forme suivante, bien adaptée à l'application du principe de la phase stationnaire :

$$(8.23) \quad \Phi_{2l}(M;t) = \frac{Q^*}{2\pi h} \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\omega t} \left[\int_{\beta}^{+\pi/2} f_3(\theta) e^{iR_{g_3}(\theta)} d\theta + \int_{-\pi/2}^{\beta} f_4(\theta) e^{iR_{g_4}(\theta)} d\theta \right] \right\}$$

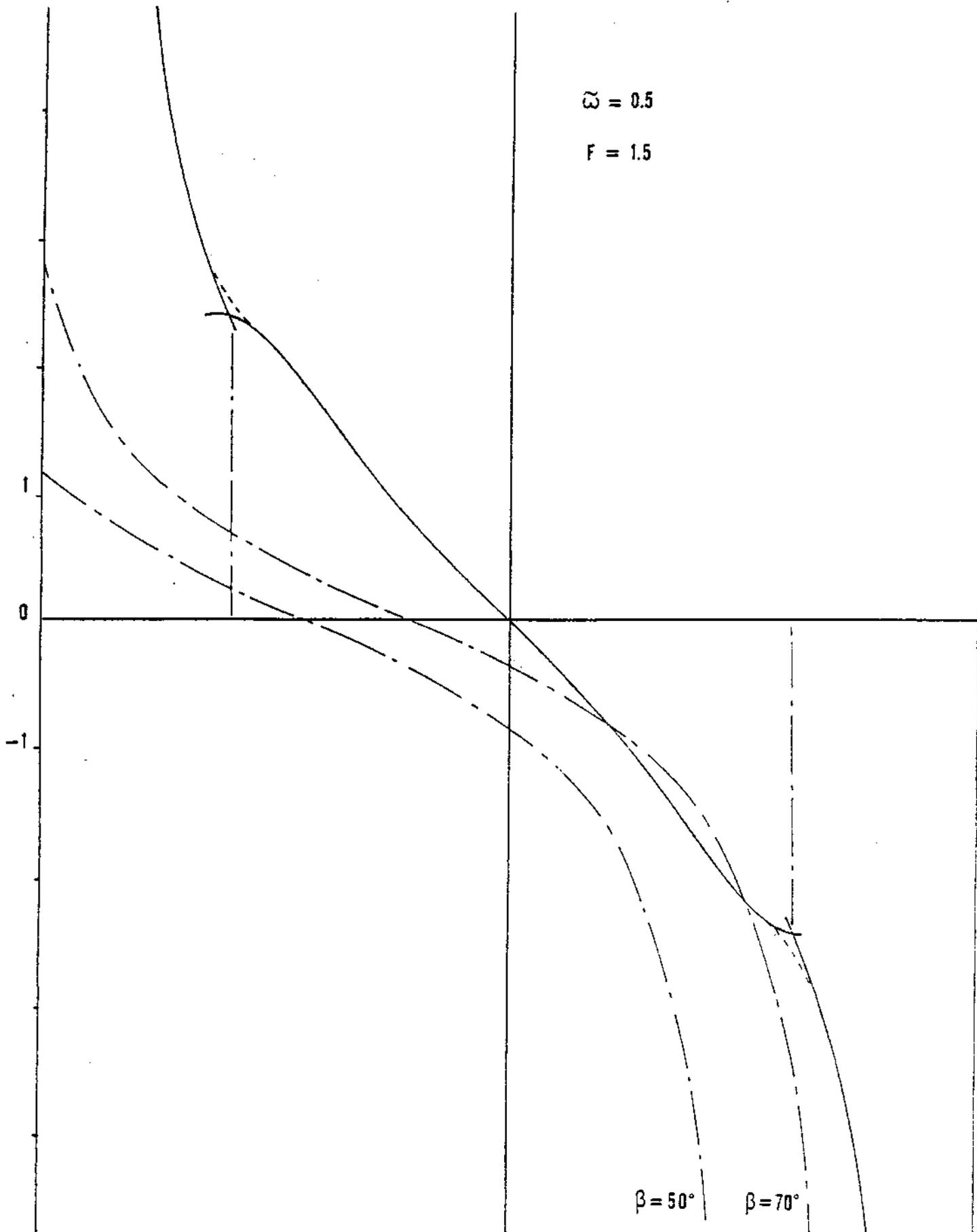


figure 8.d

avec : $f_3(\theta) = i \operatorname{ch} K_3(z+1) \operatorname{ch} K_3(z'+1) \mathcal{B}(K_3) e^{-2K_3}$; $g_3(\theta) = K_3 \sin(\theta - \beta)$

$f_4(\theta) = i \operatorname{ch} K_4(z+1) \operatorname{ch} K_4(z'+1) \mathcal{B}(K_4) e^{-2K_4}$; $g_4(\theta) = K_4 \sin(\theta - \beta)$

Dans le cas où v est supérieur à v_c , les intervalles d'intégration doivent être décomposés, de même que dans les formules (8.5), suivant les valeurs de β .

Il convient de noter que, dans le cas présent, il est évident que les pôles complexes ne contribuent pas au potentiel lointain.

8.4.1 - Etude des zéros réels de $g'_3(\theta)$

La fonction $g'_3(\theta)$ s'écrit sous sa forme développée :

$$(8.24) \quad g'_3(\theta) = - \frac{b(1 - F \cos \theta) - \tilde{\omega} + \sqrt{[b(1 - F \cos \theta) - \tilde{\omega}]^2 + 4(2 - F \cos \theta)b\tilde{\omega}}}{2(2 - F \cos \theta)} \sin(\theta - \beta)$$

et admet pour dérivée :

$$(8.25) \quad g'_3(\theta) = K_3 \left\{ \cos(\theta - \beta) - \sin(\theta - \beta) \left[\frac{-bF \sin \theta}{\sqrt{[b(1 - F \cos \theta) - \tilde{\omega}]^2 + 4(2 - F \cos \theta)b\tilde{\omega}}} \left(1 + \frac{\tilde{\omega}}{K_3(2 - F \cos \theta)} \right) - \frac{F \sin \theta}{(2 - F \cos \theta)} \right] \right\}$$

Puisque K_3 est un réel positif, quel que soit θ tel que $\cos \theta$ appartienne à l'intervalle $\left[\frac{\tilde{\omega} - \sqrt{K_0}}{K_0 F}, 1 \right]$, il suffit d'étudier les zéros du facteur entre parenthèse, c'est-à-dire les solutions de l'équation (8.26).

$$(8.26) \quad \cot(\theta - \beta) = \frac{-bF \sin \theta}{\sqrt{[b(1 - F \cos \theta) - \tilde{\omega}]^2 + 4(2 - F \cos \theta)b\tilde{\omega}}} \left[1 - \frac{\tilde{\omega}}{K_3(2 - F \cos \theta)} + \frac{\sqrt{[b(1 - F \cos \theta) - \tilde{\omega}]^2 + 4(2 - F \cos \theta)b\tilde{\omega}}}{b(2 - F \cos \theta)} \right]$$

La figure (8.e) met en évidence plusieurs régimes suivant les valeurs des couples $(\tilde{\omega}, F)$. Il existe, en particulier, trois couples corres-

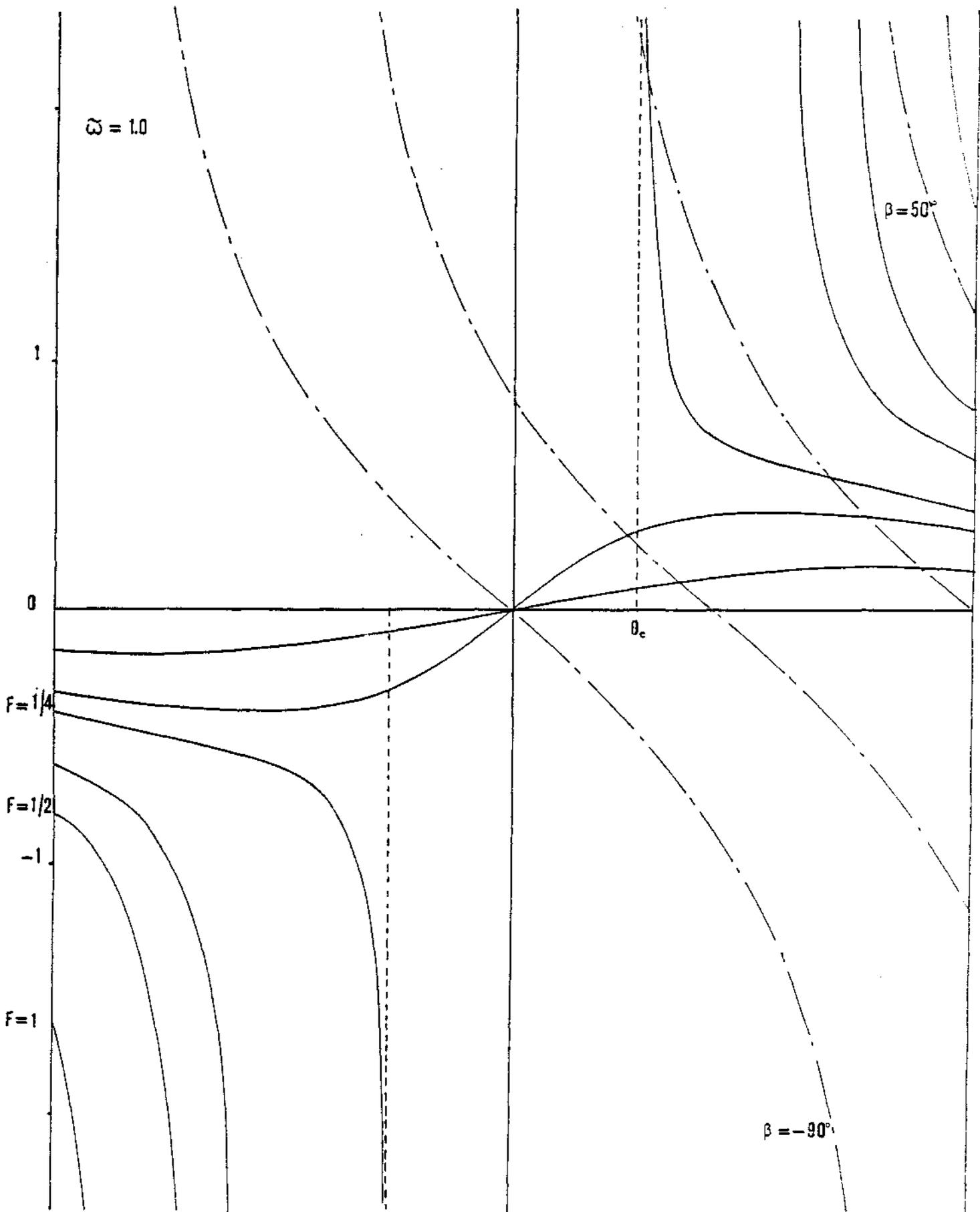


figure 8.e

pondant à v_c , v'_c et v''_c tels que sur l'intervalle $[\beta, +\frac{\pi}{2}]$:

- Si v est inférieur à v_c , $g'_3(\theta)$ possède toujours un zéro et un seul θ'_3 correspondant à un maximum de $g_3(\theta)$ quand β est inférieur ou égal à β_1 , et ne possède pas de zéro quand β est supérieur à β_1 .

- Si v est compris entre v_c et v'_c , $g'_3(\theta)$ ne possède aucun zéro quand β est inférieur à β_3 , possède un zéro double θ_3 quand β est égal à β_3 , admet deux zéros $\theta'_3 \in]\theta_c, \theta_3[$ et $\theta''_3 \in]\theta_3, +\frac{\pi}{2}[$ correspondant respectivement à un minimum et à un maximum de $g_3(\theta)$ quand β appartient à l'intervalle $]\beta_3, \theta_c[$, possède un seul zéro $\theta''_3 \in]\theta_3, +\frac{\pi}{2}[$ correspondant à un maximum de $g_3(\theta)$ quand β appartient à l'intervalle $[\theta_c, \beta_1]$, et n'admet pas de zéro quand β est supérieur à β_1 .

- Si v est égal à v'_c , les angles θ_c et β_1 sont confondus et l'intervalle $[\theta_c, \beta_1]$ est réduit à un seul point.

- Si v est compris entre v'_c et v''_c , $g'_3(\theta)$ ne possède aucun zéro quand β est inférieur à β_{31} , possède un zéro double θ_3 quand β est égal à β_3 , admet deux zéros $\theta'_3 \in]\theta_c, \theta_3[$ et $\theta'' \in]\theta_3, +\frac{\pi}{2}[$ correspondant respectivement à un minimum et à un maximum de $g_3(\theta)$ quand β appartient à l'intervalle $]\beta_3, \beta_1]$, possède un seul zéro $\theta'_3 \in]\theta_c, \theta_3[$ correspondant à un minimum de $g_3(\theta)$ quand β appartient à l'intervalle $]\beta_1, \theta_c[$, et n'admet pas de zéro quand β est supérieur ou égal à θ_c .

- Si v est égal à v''_c , les angles β_3 et β_1 sont confondus et l'intervalle $]\beta_3, \beta_1]$ est réduit à l'ensemble vide.

- Si v est supérieur à v''_c , $g'_3(\theta)$ ne possède aucun zéro quand β est inférieur à β_3 , possède un zéro $\theta'_3 \in]\theta_c, \theta_3[$ correspondant à un minimum de $g_3(\theta)$ quand β appartient à l'intervalle $[\beta_3, \theta_c[$, et n'admet aucun zéro quand β est supérieur ou égal à θ_c .

Ici encore, nous retrouvons les mêmes configurations que dans le chapitre précédent (figure 7.h).

8.4.2 - Etude des zéros réels de $g'_4(\theta)$

La fonction $g_4(\theta)$ s'écrit sous sa forme développée :

$$(8.27) \quad \left[\begin{array}{l} g'_4(\theta) = -\frac{b(1-F\cos\theta) - \tilde{\omega} - \sqrt{[b(1-F\cos\theta) - \tilde{\omega}]^2 + 4(a-F\cos\theta)b\tilde{\omega}}}{2(a-F\cos\theta)} \sin(\theta - \beta) \quad ; \quad \cos\theta \geq \frac{\sqrt{k_0} - \tilde{\omega}}{FK_0} \\ g_4(\theta) = \frac{1 - 2\tilde{\nu}\cos\theta + \sqrt{1 - 4\tilde{\nu}^2\cos^2\theta}}{2F^2\cos^2\theta} \sin(\theta - \beta) \quad ; \quad \cos\theta \leq \frac{\sqrt{k_0} - \tilde{\omega}}{FK_0} \end{array} \right.$$

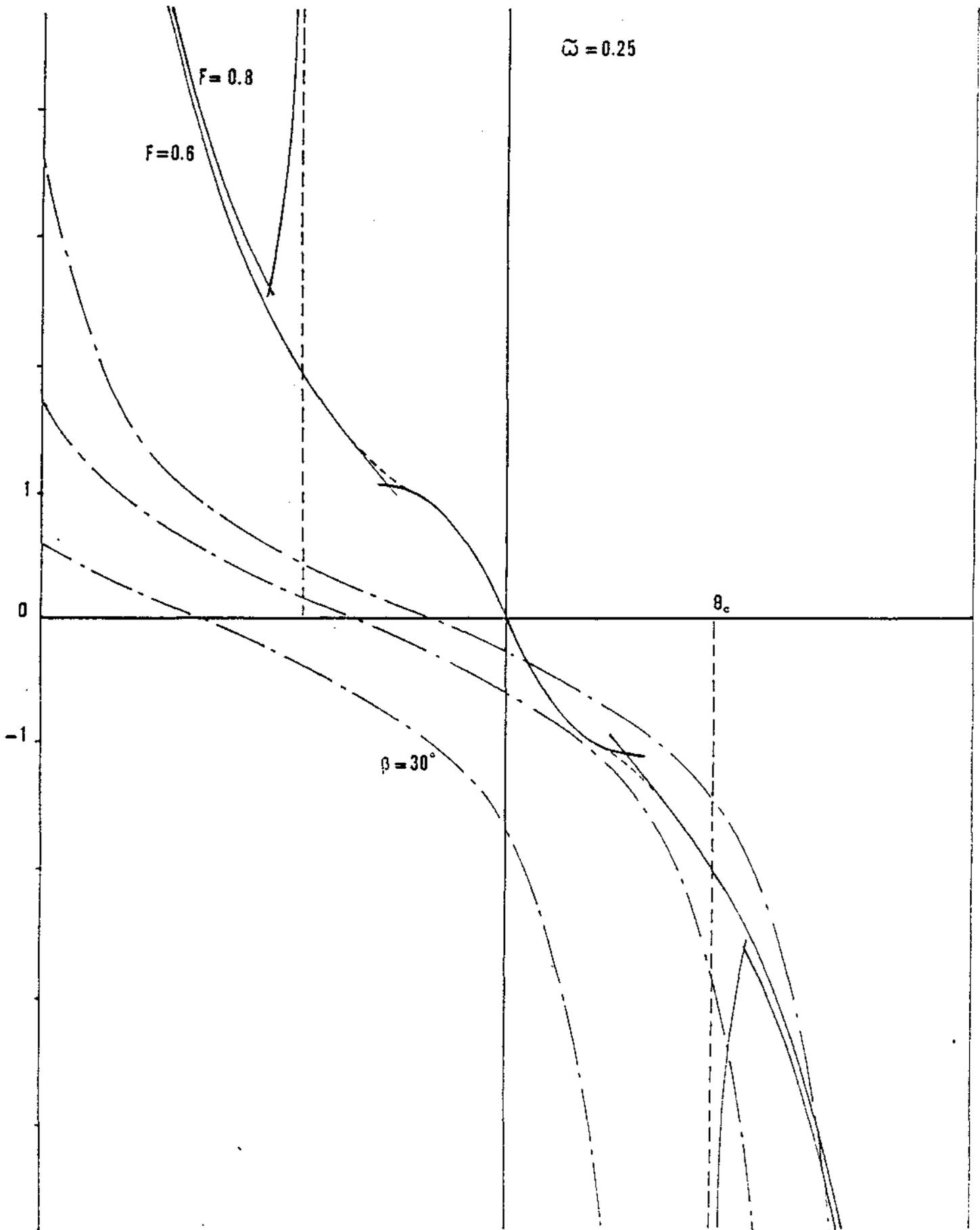


figure 8.f

et admet pour dérivée selon les valeurs de $\cos \theta$:

$$(8.28) \quad \left[\begin{aligned} g_4'(\theta) &= K_4 \left\{ \cos(\theta - \beta) - \sin(\theta - \beta) \left[\frac{bF \sin \theta}{\sqrt{[b(1 - F \cos \theta) - \bar{\omega}]^2 + 4(2 - F \cos \theta)b\bar{\omega}}} \left(1 + \frac{\bar{\omega}}{K_4(2 - F \cos \theta)} \right) - \frac{F \sin \theta}{(2 - F \cos \theta)} \right] \right\} \\ g_4'(\theta) &= K_4 \left\{ \cos(\theta - \beta) - \sin(\theta - \beta) \left[\frac{-2\sqrt{\sin \theta} (1 + \sqrt{1 - 4\sqrt{\cos \theta}})}{(1 - 2\sqrt{\cos \theta})\sqrt{1 - 4\sqrt{\cos \theta}} + (1 + 4\sqrt{\cos \theta})} - 2 \operatorname{ctg} \theta \right] \right\} \end{aligned} \right.$$

Puisque K_4 est un réel positif, quel que soit θ , il suffit d'étudier les zéros du facteur entre parenthèse, c'est-à-dire les solutions des équations (8.29).

$$(8.29) \quad \left[\begin{aligned} \operatorname{ctg}(\theta - \beta) &= \frac{bF \sin \theta}{\sqrt{[b(1 - F \cos \theta) - \bar{\omega}]^2 + 4(2 - F \cos \theta)b\bar{\omega}}} \left[1 + \frac{\bar{\omega}}{K_4(2 - F \cos \theta)} - \frac{\sqrt{[b(1 - F \cos \theta) - \bar{\omega}]^2 + 4(2 - F \cos \theta)b\bar{\omega}}}{b(2 - F \cos \theta)} \right] \\ \operatorname{ctg}(\theta - \beta) &= \frac{-2\sqrt{\sin \theta} (1 + \sqrt{1 - 4\sqrt{\cos \theta}})}{(1 - 2\sqrt{\cos \theta})\sqrt{1 - 4\sqrt{\cos \theta}} + (1 + 4\sqrt{\cos \theta})} - 2 \operatorname{ctg} \theta \end{aligned} \right.$$

La figure 8.f met en évidence l'existence de deux régimes distincts liés au nombre de Strouhal ν_c tels que :

- Si ν est inférieur à ν_c , $g_4'(\theta)$ n'admet aucun zéro quand β est inférieur à un angle β_4 (inférieur à l'angle β_4 du chapitre 7), possède un zéro double θ_4 quand β est égal à β_4 , admet deux zéros $\theta_4' \in]\theta_4, +\frac{\pi}{2}[$ et $\theta_4'' \in [0, \theta_4[$ correspondant respectivement à un minimum et à un maximum de $g_4(\theta)$ quand β appartient à l'intervalle $]\beta_4, +\frac{\pi}{2}[$, et ne possède qu'un seul zéro $\theta_4' \in [0, \theta_4[$ correspondant à un maximum de $g_4(\theta)$ quand β est égal à $+\frac{\pi}{2}$.

- Si ν est supérieur à ν_c , $g_4'(\theta)$ n'admet aucun zéro quand β est inférieur ou égal à θ_c , possède un seul zéro $\theta_4' \in]\theta_4, +\frac{\pi}{2}[$ correspondant à un minimum de $g_4(\theta)$ quand β appartient à l'intervalle $]\theta_c, +\frac{\pi}{2}[$, et n'admet pas de zéro quand β est égal à $+\frac{\pi}{2}$.

De nouveau, nous retrouvons la configuration du chapitre 7 (figure 7.h).

8.5 - DESCRIPTION DU CHAMP DE VAGUES LOINTAIN

Nous venons de voir que, en approchant analytiquement la fonction $\sqrt{K} \text{th} K$ par $y(K)$, nous obtenons un résultat qualitativement analogue à celui mis quantitativement en évidence dans le cas d'une profondeur illimitée.

Ce résultat peut être vérifié, quels que soient a et b , et ce pour tout ω et tout F . Nous pouvons donc conclure à sa validité qualitative.

Bien évidemment, le champ observé en absence de fond est déformé par l'introduction d'une profondeur finie, mais il ne subit pas de modification radicale. Notons également que les nombres de Strouhal v_c , v'_c et v''_c , ainsi d'ailleurs que les célérités des ondes, dépendent de la profondeur du fluide.

8.6 - CONCLUSION

Aussi bien en ce qui concerne le champ des vagues lointaines que l'intégrale à l'infini (pour laquelle la démonstration du chapitre 7 s'adapte aisément) où les phénomènes physiques et énergétiques, la présence d'un fond à distance finie complique, déforme, masque, mais ne change pas radicalement les résultats acquis, contrairement à ce qui se passe dans le cas du problème de Neumann - Kelvin.





Chapitre 9

DISCRETISATION DU PROBLEME HYDRODYNAMIQUE

Les équations intégrales qui définissent les distributions de singularités cinématiquement équivalentes à la carène, étant établies, les termes hydrodynamiques qui interviennent dans l'équation de Newton, étant exprimés en fonction du potentiel des vitesses et de ses dérivées, il nous reste désormais à résoudre les premières puis à calculer les seconds. Nous procéderons, pour cela, à une discrétisation des équations, ce qui nous ramènera à la résolution de systèmes d'équations linéaires.

9.1 - DISCRETISATION DES EQUATIONS INTEGRALES

Le concept de discrétisation nous est imposé par la nécessité de donner une définition numérique de la carène dont une première approximation est réalisée au moyen de N facettes polygonales, généralement gauches, obtenues à partir de P points qui matérialisent leurs sommets.

Les équations intégrales que nous avons établies au quatrième chapitre ont pour inconnues des fonctions $\mu(M;t)$ et $\sigma(M;t)$ définies sur la surface de la carène, qu'il est logique d'approcher par des fonctions en escalier constantes sur chaque facette.

Les équations de Fredholm se réduisent dès lors à des systèmes de $2N$ équations à $2N$ inconnues (1) dont les coefficients sont donnés par des intégrales de surface sur chaque facette, et des intégrales sur des segments le long de la flottaison.

(1) Lorsque la carène n'est pas normale à la surface libre en tout point de la ligne de flottaison, l'équation relative à la distribution mixte de Green possède des inconnues supplémentaires dues au terme $\frac{\partial}{\partial S} \mu(M')$ et nécessite un traitement particulier que nous aborderons ultérieurement.

Une intégration analytique de ces coefficients étant réalisable dans le cas particulier où les facettes polygonales sont planes, nous devrons opter pour l'utilisation exclusive de facettes planes en procédant soit à la rectification de toutes les facettes gauches, soit à leur dichotomie afin de les réduire à des triangles. Nous aurons réalisé ainsi une seconde approximation de la carène.

Après la discrétisation, les équations relatives à la distribution mixte de Green deviennent :

$$(9.1) \left[\begin{aligned} & \frac{1}{2} \mu_i^* + \sum_{j=1}^N [\mu_j^* D_{ij}^* - \mu_j^{**} D_{ij}^{**}] + \sum_{k=1}^n [\mu_k^* (D_{ik}^* + D_{ik}^x + D_{ik}^e) + \mu_k^{**} (D_{ik}^{**} - D_{ik}^x - D_{ik}^e)] \\ & + \sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial s} \right)_k^* D_{s_{ik}}^* - \left(\frac{\partial \mu}{\partial s} \right)_k^{**} D_{s_{ik}}^{**} \right] = \sum_{j=1}^N [\sigma_j^* S_{ij}^* - \sigma_j^{**} S_{ij}^{**}] + \sum_{k=1}^n [\sigma_k^* S_{n_{ik}}^* - \sigma_k^{**} S_{n_{ik}}^{**}] \\ & \frac{1}{2} \mu_i^{**} + \sum_{j=1}^N [\mu_j^{**} D_{ij}^* + \mu_j^* D_{ij}^{**}] + \sum_{k=1}^n [\mu_k^{**} (D_{ik}^* + D_{ik}^x + D_{ik}^e) - \mu_k^* (D_{ik}^{**} - D_{ik}^x - D_{ik}^e)] \\ & + \sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial s} \right)_k^{**} D_{s_{ik}}^* + \left(\frac{\partial \mu}{\partial s} \right)_k^* D_{s_{ik}}^{**} \right] = \sum_{j=1}^N [\sigma_j^{**} S_{ij}^* + \sigma_j^* S_{ij}^{**}] + \sum_{k=1}^n [\sigma_k^{**} S_{n_{ik}}^* + \sigma_k^* S_{n_{ik}}^{**}] \end{aligned} \right]$$

et les équations relatives à la distribution de sources s'écrivent :

$$(9.2) \left[\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sigma_i^* + \sum_{j=1}^N [\sigma_j^* V_{ij}^* - \sigma_j^{**} V_{ij}^{**}] + \sum_{k=1}^n [\sigma_k^* V_{n_{ik}}^* - \sigma_k^{**} V_{n_{ik}}^{**}] = (\vec{V}_E^* \cdot \vec{n})_i \\ & \frac{1}{2} \sigma_i^{**} + \sum_{j=1}^N [\sigma_j^{**} V_{ij}^* + \sigma_j^* V_{ij}^{**}] + \sum_{k=1}^n [\sigma_k^{**} V_{n_{ik}}^* + \sigma_k^* V_{n_{ik}}^{**}] = (\vec{V}_E^{**} \cdot \vec{n})_i \end{aligned} \right]$$

expressions dans lesquelles N désigne le nombre de facettes polygonales de la discrétisation et n le nombre de facettes ayant un segment contenu dans le plan de la surface libre.

Les coefficients de ces équations sont appelés coefficients d'influence.

9.2 - DISCRETISATION DES TERMES HYDRODYNAMIQUES

Le torseur des efforts hydrodynamiques a été décomposé dans le troisième chapitre, et chaque terme a été exprimé en fonction du potentiel des vitesses et de ses dérivées. Il s'agit désormais d'examiner ce que deviennent ces différents éléments après la discrétisation, et de définir la manière dont nous les calculerons.

9.2.1 - Torseur des forces de Froude-Krilov

9.2.1.1 - Cas d'une profondeur illimitée

Les expressions de FI_i^* et FI_i^{**} données au paragraphe 3.6 s'écrivent après la discrétisation :

$$(9.3) \quad FI_i^* = - \frac{\rho g A \omega}{\sigma} \operatorname{Im} \left\{ \sum_{j=1}^N N_{ij} \iint_{S_j} e^{k[z_1 + i(x \cos \beta + y \sin \beta)]} ds \right\}$$

$$(9.4) \quad FI_i^{**} = + \frac{\rho g A \omega}{\sigma} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{j=1}^N N_{ij} \iint_{S_j} e^{k[z_1 + i(x \cos \beta + y \sin \beta)]} ds \right\}$$

En utilisant les résultats démontrés dans la sixième annexe, nous obtenons, tous calculs effectués :

$$(9.5) \quad FI_i^* = - \frac{\rho g A \omega}{k, \sigma} \operatorname{Im} \left\{ ZFI \right\}$$

$$(9.6) \quad FI_i^{**} = + \frac{\rho g A \omega}{k, \sigma} \operatorname{Re} \left\{ ZFI \right\}$$

En posant :

$$\left[\begin{array}{l} ZFI = \sum_{j=1}^N N_{ij} \sum_{k=1}^m C_{jk} \frac{e^{k, \zeta_{k+1}} - e^{k, \zeta_k}}{k, (\zeta_{k+1} - \zeta_k)} ; \quad |\zeta_{k+1} - \zeta_k| > \varepsilon \\ ZFI = \sum_{j=1}^N N_{ij} \sum_{k=1}^m C_{jk} \frac{1}{2} \left(e^{k, \zeta_{k+1}} + e^{k, \zeta_k} \right) ; \quad |\zeta_{k+1} - \zeta_k| \leq \varepsilon \end{array} \right.$$

avec :
$$C_{jk} = -(q_j + ir_j \sin \beta)(x_{1k+1} - x_{1k}) + (p_j + ir_j \cos \beta)(y_{1k+1} - y_{1k})$$

et :
$$\zeta_k = z_{1k} + i(x_{1k} \cos \beta + y_{1k} \sin \beta)$$

9.2.1.2 - Cas d'une profondeur finie

Dans le cas d'une profondeur limitée, la formulation du torseur des forces de Froude-Krilov est plus complexe. D'après les résultats du paragraphe 3.6, nous avons après discrétisation :

$$(9.7) \quad FI_i^* = - \frac{\rho g A \omega}{2\sigma \text{ch} m, h} \text{Im} \left\{ \sum_{j=1}^M N_{ij} \iint_{S_j} \left[e^{m_0 [z+h+i(x \cos \beta + y \sin \beta)]} + e^{m_0 [z-h+i(x \cos \beta + y \sin \beta)]} \right] dS \right\}$$

$$(9.8) \quad FI_i^{**} = + \frac{\rho g A \omega}{2\sigma \text{ch} m, h} \text{Re} \left\{ \sum_{j=1}^M N_{ij} \iint_{S_j} \left[e^{m_0 [z+h+i(x \cos \beta + y \sin \beta)]} + e^{m_0 [z-h+i(x \cos \beta + y \sin \beta)]} \right] dS \right\}$$

Il vient donc après intégration sur les facettes :

$$(9.9) \quad FI_i^* = - \frac{\rho g A \omega}{2m_0 \sigma \text{ch} m, h} \text{Im} \left\{ ZFI \right\}$$

$$(9.10) \quad FI_i^{**} = + \frac{\rho g A \omega}{2m_0 \sigma \text{ch} m, h} \text{Re} \left\{ ZFI \right\}$$

avec
$$ZFI = \sum_{j=1}^M N_{ij} \sum_{k=1}^m C_{jk} (ZF1 + ZF2)$$

en posant :

$$\left[\begin{array}{l} ZF1 = \frac{e^{m_0 \zeta_{k+1}} - e^{m_0 \zeta_k}}{m_0 (\zeta_{k+1} - \zeta_k)} \quad ; \quad ZF2 = \frac{e^{m_0 \zeta'_{k+1}} - e^{m_0 \zeta'_k}}{m_0 (\zeta'_{k+1} - \zeta'_k)} \quad ; \quad \left| \zeta_{k+1} - \zeta_k \right| \text{ et } \left| \zeta'_{k+1} - \zeta'_k \right| > \varepsilon \\ ZF1 = \frac{1}{2} \left(e^{m_0 \zeta_{k+1}} + e^{m_0 \zeta_k} \right) \quad ; \quad ZF2 = \frac{1}{2} \left(e^{m_0 \zeta'_{k+1}} + e^{m_0 \zeta'_k} \right) \quad ; \quad \left| \zeta_{k+1} - \zeta_k \right| \text{ et } \left| \zeta'_{k+1} - \zeta'_k \right| \leq \varepsilon \end{array} \right.$$

où C_{jk} et ζ_k ont les mêmes expressions qu'au paragraphe précédent, et où :

$$\zeta'_k = -z_{1k} - h + i(x_{1k} \cos \beta + y_{1k} \sin \beta)$$

9.2.2 - Torseur des efforts de diffraction et de radiation

Les composantes du torseur des forces de diffraction données au paragraphe 3.7 deviennent après la discrétisation :

$$(9.11) \quad FD_i^* = +\rho\omega \sum_{j=1}^N N_{ij} \phi_{Dj}^{**} \Omega_j - \rho U \sum_{j=1}^N N_{ij} \left(\frac{\partial \phi_j^*}{\partial x_1} \right)_j \Omega_j$$

$$(9.12) \quad FD_i^{**} = -\rho\omega \sum_{j=1}^N N_{ij} \phi_{Dj}^* \Omega_j - \rho U \sum_{j=1}^N N_{ij} \left(\frac{\partial \phi_j^{**}}{\partial x_1} \right)_j \Omega_j$$

expressions dans lesquelles Ω_j désigne l'aire de la facette plane j et N_{ij} la composante suivant i de la normale généralisée à la facette j .

De même les masses d'eau ajoutées MA_{ij} et les termes d'amortissement TA_{ij} donnés au paragraphe 3.8 s'écrivent après la discrétisation :

$$(9.13) \quad MA_{ik} = -\rho \sum_{j=1}^N N_{ij} \phi_{kj}^* \Omega_j - \rho \frac{U}{\omega} \sum_{j=1}^N N_{ij} \left(\frac{\partial \phi_j^{**}}{\partial x_1} \right)_j \Omega_j$$

$$(9.14) \quad TA_{ik} = -\rho\omega \sum_{j=1}^N N_{ij} \phi_{kj}^{**} \Omega_j + \rho U \sum_{j=1}^N N_{ij} \left(\frac{\partial \phi_j^*}{\partial x_1} \right)_j \Omega_j$$

Il nous reste désormais à exprimer la fonction potentiel des vitesses et sa dérivée par rapport à x_1 , en fonction des singularités.

9.2.2.1 - Distribution mixte de Green

Dans le cas de la distribution mixte de Green, nous avons directement accès à la fonction potentiel des vitesses par l'intermédiaire de la distribution de doublets normaux, mais il est nécessaire de calculer la dérivée du potentiel à partir des deux distributions en reprenant l'expression (4.46) dans laquelle nous introduirons les fonctions $u(M)$ et $\sigma(M)$ après la dérivation et en apportant une attention particulière aux discontinuités de potentiel et de vitesse à la traversée de la surface. Nous aurons pour le potentiel :

$$(9.15) \quad \phi_j^* = -\mu_j \quad ; \quad \phi_j^{**} = -\mu_j^{**}$$

D'après les équations (9.1), nous pouvons écrire :

$$(9.16) \quad \left[\begin{aligned} \frac{1}{2} \phi_i^* &= \sum_{j=1}^N \left[\mu_j^* D_{ij}^* - \mu_i^{**} D_{ij}^{**} \right] + \sum_{k=1}^n \left[\mu_k^* (D_{ik}^* + D_{ik}^* + D_{ik}^*) + \mu_k^{**} (D_{ik}^{**} - D_{ik}^{**} - D_{ik}^{**}) \right] \\ &+ \sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial s} \right)_k^* D_{ik}^* - \left(\frac{\partial \mu}{\partial s} \right)_k^{**} D_{ik}^{**} \right] - \sum_{j=1}^N \left[\sigma_j^* S_{ij}^* - \sigma_j^{**} S_{ij}^{**} \right] - \sum_{k=1}^n \left[\sigma_k^* S_{ik}^* - \sigma_k^{**} S_{ik}^{**} \right] \\ \frac{1}{2} \phi_i^{**} &= \sum_{j=1}^N \left[\mu_j^{**} D_{ij}^* + \mu_j^* D_{ij}^{**} \right] + \sum_{k=1}^n \left[\mu_k^{**} (D_{ik}^* + D_{ik}^* + D_{ik}^*) - \mu_k^* (D_{ik}^{**} - D_{ik}^{**} - D_{ik}^{**}) \right] \\ &+ \sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial s} \right)_k^{**} D_{ik}^* + \left(\frac{\partial \mu}{\partial s} \right)_k^* D_{ik}^{**} \right] - \sum_{j=1}^N \left[\sigma_j^{**} S_{ij}^* + \sigma_j^* S_{ij}^{**} \right] - \sum_{k=1}^n \left[\sigma_k^{**} S_{ik}^* + \sigma_k^* S_{ik}^{**} \right] \end{aligned} \right]$$

Le calcul de la vitesse suivant l'axe des abscisses peut être effectué par deux voies distinctes. La première consiste à écrire que la vitesse normale s'identifie à la distribution de sources dont la projection sera obtenue en la multipliant par $(\vec{n} \cdot \vec{i}_x)$, et que la vitesse tangentielle sera obtenue en dérivant les équations (9.16) par rapport à deux vecteurs tangents puis en projetant sur ox . La deuxième consiste à dériver par rapport à x tous les coefficients d'influence qui sont continus, c'est-à-dire ceux relatifs aux doublets pour lesquels la discontinuité a été sortie (coefficient $\frac{1}{2}$ pour $i = j$) et les parties des coefficients de sources contenant la fonction de Green, et à calculer séparément la contribution du terme $\frac{1}{|MM'|}$ suivant ox .

Nous avons opté pour la deuxième méthode puisqu'elle utilise des calculs rendus nécessaires pour la distribution de sources.

Nous identifierons les coefficients dérivés en ajoutant un V devant le symbole du coefficient de potentiel correspondant.

$$(9.17) \quad \left[\begin{aligned} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right)_i^* &= 2 \left\{ \sum_{j=1}^N \left[\mu_j^* V D_{ij}^* - \mu_j^{**} V D_{ij}^{**} \right] + \sum_{k=1}^n \left[\mu_k^* (V D_{ik}^* + V D_{ik}^* + V D_{ik}^*) + \mu_k^{**} (V D_{ik}^{**} - V D_{ik}^{**} - V D_{ik}^{**}) \right] \right\} \\ &+ \sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial s} \right)_k^* V D_{ik}^* - \left(\frac{\partial \mu}{\partial s} \right)_k^{**} V D_{ik}^{**} \right] - \sum_{j=1}^N \left[\sigma_j^* V S_{ij}^* - \sigma_j^{**} V S_{ij}^{**} \right] - \sum_{k=1}^n \left[\sigma_k^* V S_{ik}^* - \sigma_k^{**} V S_{ik}^{**} \right] \end{aligned} \right]$$

$$\left[\begin{aligned} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right)^{**} &= 2 \left\{ \sum_{j=1}^N \left[\mu_j^{**} VD_{ij}^* + \mu_j^* VD_{ij}^{**} \right] + \sum_{k=1}^n \left[\mu_k^{**} (VD_{ik}^* + VD_{ik}^{**} + VD_{ik}^*) - \mu_k^* (VD_{ik}^{**} - VD_{ik}^{**} - VD_{ik}^{**}) \right] \right\} \\ &+ \sum_{k=1}^n \left\{ \left[\frac{\partial \mu}{\partial r/k} \right]^{**} VD_{ik}^* + \left[\frac{\partial \mu}{\partial r/k} \right]^* VD_{ik}^{**} \right\} - \sum_{j=1}^N \left[\sigma_j^{**} VS_{ij}^* + \sigma_j^* VS_{ij}^{**} \right] - \sum_{k=1}^n \left[\sigma_k^{**} VS_{nk}^* + \sigma_k^* VS_{nk}^{**} \right] \end{aligned} \right]$$

9.2.2.2 - Distribution de sources

Dans le cas d'une distribution de sources, nous n'avons plus accès à la fonction potentiel des vitesses, mais par contre les coefficients de vitesse suivant ox sont déjà calculés pour établir les coefficients de vitesse normale nécessaires à la résolution de l'équation de Fredholm. Nous aurons pour le potentiel :

$$(9.18) \quad \left[\begin{aligned} \phi_i^* &= - \sum_{j=1}^N \left[\sigma_j^* S_{ij}^* - \sigma_j^{**} S_{ij}^{**} \right] - \sum_{k=1}^n \left[\sigma_k^* S_{nk}^* - \sigma_k^{**} S_{nk}^{**} \right] \\ \phi_i^{**} &= - \sum_{j=1}^N \left[\sigma_j^{**} S_{ij}^* + \sigma_j^* S_{ij}^{**} \right] - \sum_{k=1}^n \left[\sigma_k^{**} S_{nk}^* + \sigma_k^* S_{nk}^{**} \right] \end{aligned} \right]$$

et pour les vitesses :

$$(9.19) \quad \left[\begin{aligned} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right)^* &= \sum_{j=1}^N \left[\sigma_j^* VS_{ij}^* - \sigma_j^{**} VS_{ij}^{**} \right] + \sum_{k=1}^n \left[\sigma_k^* VS_{nk}^* - \sigma_k^{**} VS_{nk}^{**} \right] \\ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right)^{**} &= \sum_{j=1}^N \left[\sigma_j^{**} VS_{ij}^* + \sigma_j^* VS_{ij}^{**} \right] + \sum_{k=1}^n \left[\sigma_k^{**} VS_{nk}^* + \sigma_k^* VS_{nk}^{**} \right] \end{aligned} \right]$$

9.3 - COEFFICIENTS D'INFLUENCE

Les coefficients d'influence définis dans les paragraphes précédents s'écrivent :

$$D_{ij}^* = - \frac{1}{4\pi} \iint_{S_j} \frac{\partial}{\partial n_j} G'(M_i, M_j) ds_j$$

$$D_{ij}^{**} = - \frac{1}{4\pi} \iint_{S_j} \frac{\partial}{\partial n_j} G'(M_i, M_j) ds_j$$

$$DE_{ik}^* = + \frac{U\omega}{2\pi g} \int_{\vec{r}_k} G'(M_i, M_k) dy_k$$

$$DE_{ik}^{**} = + \frac{U\omega}{2\pi g} \int_{\vec{r}_k} G'(M_i, M_k) dy_k$$

$$DX_{ik}^* = - \frac{U^2}{4\pi g} \int_{\vec{r}_k} \frac{\partial}{\partial x_k} G'(M_i, M_k) dy_k$$

$$DX_{ik}^{**} = - \frac{U^2}{4\pi g} \int_{\vec{r}_k} \frac{\partial}{\partial x_k} G'(M_i, M_k) dy_k$$

$$DL_{ik}^* = - \frac{U^2}{4\pi g} \int_{\vec{r}_k} d[G'(M_i, M_k)] (\vec{e}_k \cdot \vec{i}_x) (\vec{e}_k \cdot \vec{i}_y)$$

$$DL_{ik}^{**} = - \frac{U^2}{4\pi g} \int_{\vec{r}_k} d[G'(M_i, M_k)] (\vec{e}_k \cdot \vec{i}_x) (\vec{e}_k \cdot \vec{i}_y)$$

$$DS_{ik}^* = + \frac{U^2}{4\pi g} \int_{\vec{r}_k} G'(M_i, M_k) dy_k (\vec{s}_k \cdot \vec{i}_x)$$

$$DS_{ik}^{**} = + \frac{U^2}{4\pi g} \int_{\vec{r}_k} G'(M_i, M_k) dy_k (\vec{s}_k \cdot \vec{i}_x)$$

$$S_{ij}^* = + \frac{1}{4\pi} \iint_{S_j} G'(M_i, M_j) ds_j$$

$$S_{ij}^{**} = + \frac{1}{4\pi} \iint_{S_j} G'(M_i, M_j) ds_j$$

$$Sn_{ik}^* = + \frac{U^2}{4\pi g} \int_{\vec{r}_k} G'(M_i, M_k) dy_k (\vec{n}_k \cdot \vec{i}_x)$$

$$Sn_{ik}^{**} = + \frac{U^2}{4\pi g} \int_{\vec{r}_k} G'(M_i, M_k) dy_k (\vec{n}_k \cdot \vec{i}_x)$$

$$V_{ij}^* = - \frac{1}{4\pi} \iint_{S_j} \frac{\partial}{\partial n_j} G'(M_i, M_j) ds_j$$

$$V_{ij}^{**} = - \frac{1}{4\pi} \iint_{S_j} \frac{\partial}{\partial n_j} G'(M_i, M_j) ds_j$$

$$Vn_{ik}^* = - \frac{U^2}{4\pi g} \int_{\vec{r}_k} \frac{\partial}{\partial n_k} G'(M_i, M_k) dy_k (\vec{n}_k \cdot \vec{i}_x)$$

$$Vn_{ik}^{**} = - \frac{U^2}{4\pi g} \int_{\vec{r}_k} \frac{\partial}{\partial n_k} G'(M_i, M_k) dy_k (\vec{n}_k \cdot \vec{i}_x)$$

9.4 - EXPRESSION DES COEFFICIENTS D'INFLUENCE DANS LE CAS D'UNE PROFONDEUR ILLIMITEE

La fonction $G'(M, M'; t)$ est la somme de trois termes que nous intégrerons séparément.

9.4.1 - Partie des coefficients dépendant de $G'_0(M, M'; t)$

La première partie de la fonction de Green s'écrit :

$$(9.20) \quad G'_0(M, M'; t) = \left[\frac{1}{|MM|} - \frac{1}{|MN|} \right] \cos \omega t = G_0'^*(M, M') \cos \omega t$$

et n'aura donc de contribution que dans les coefficients marqués d'un seul astérisque.

L'intégration de cette fonction et de ses dérivées sur une facette polygonale plane a été effectuée par J.L. HESS et A.M.O. SMITH/HY.22/, puis améliorée par P. GUEVEL /HY.14/. Nous en avons reporté les résultats dans la cinquième annexe.

En ce qui concerne les intégrales sur les segments contenus dans le plan de la surface libre, nous remarquerons que pour $z' = 0$, les points M' et N' sont confondus, et qu'ainsi la fonction G'_0 est nulle. Il en va de même pour ses dérivées par rapport à x' , y' au temps et aux coordonnées du point M .

9.4.2 - Partie des coefficients dépendant de $G'_1(M, M'; t)$

La deuxième partie de la fonction de Green s'écrit d'après les résultats du cinquième chapitre :

$$(9.21) \quad G_1'^*(M, M) = \operatorname{Re} \left\{ Z_1 \right\} \quad ; \quad G_1'^{**}(M, M') = -\operatorname{Im} \left\{ Z_1 \right\}$$

avec :

$$Z_1 = \frac{1}{\eta l} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{K_1 G_1(K_1 \xi) - K_2 G_1(K_2 \xi)}{\sqrt{1 + 4\nu \cos \theta}} d\theta$$

En utilisant les résultats de la sixième annexe, nous obtenons pour chacun des coefficients d'influence, si nous désignons par \mathbb{C}_{ij} le coefficient C_{ij} complexe :

$$ZD_{ij} = - \frac{1}{4\eta^2 l} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sum_{k=1}^m C2_{jk} \left[K_1 H2_k(K_1) - K_2 H2_k(K_2) \right] \frac{d\theta}{\sqrt{1+4\nu \cos \theta}}$$

$$ZS_{ij} = + \frac{1}{4\eta^2} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sum_{k=1}^m C1_{jk} \left[H1_k(K_1) - H1_k(K_2) \right] \frac{d\theta}{\sqrt{1+4\nu \cos \theta}}$$

$$ZV_{ij} = - \frac{1}{4\eta^2 l} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sum_{k=1}^m C3_{jk} \left[K_1 H2_k(K_1) - K_2 H2_k(K_2) \right] \frac{d\theta}{\sqrt{1+4\nu \cos \theta}}$$

$$\overline{ZDE}_{ik} = + \frac{\nu}{2\eta^2 l} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} i D1_k \left[K_1 H2_k(K_1) - K_2 H2_k(K_2) \right] \frac{d\theta}{\sqrt{1+4\nu \cos \theta}}$$

$$ZDx_{ik} = - \frac{F^2}{4\eta^2 l} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} D2_k \left[K_1^2 H3_k(K_1) - K_2^2 H3_k(K_2) \right] \frac{d\theta}{\sqrt{1+4\nu \cos \theta}}$$

$$ZD^l_{ik} = - \frac{F^2}{4\eta^2} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \left(\vec{\rho}_{kz} \cdot \vec{\rho}_{kz} \right) \left[K_1 H4_k(K_1) - K_2 H4_k(K_2) \right] \frac{d\theta}{\sqrt{1+4\nu \cos \theta}}$$

$$ZDs_{ik} = + \frac{F^2}{4\eta^2} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \left(\vec{s}_{kx} \cdot \vec{i} \right) D1_k \left[K_1 H2_k(K_1) - K_2 H2_k(K_2) \right] \frac{d\theta}{\sqrt{1+4\nu \cos \theta}}$$

$$ZSn_{ik} = + \frac{F^2}{4\eta^2} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \left(\vec{n}_{kz} \cdot \vec{i} \right) D1_k \left[K_1 H2_k(K_1) - K_2 H2_k(K_2) \right] \frac{d\theta}{\sqrt{1+4\nu \cos \theta}}$$

$$ZVn_{ik} = - \frac{F^2}{4\eta l} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \left(\vec{n}_{kz} \cdot \vec{i} \right) D3_k \left[K_1^2 H3_k(K_1) - K_2^2 H3_k(K_2) \right] \frac{d\theta}{\sqrt{1+4\nu \cos \theta}}$$

avec, si $|\zeta_{k+1} - \zeta_k| > \epsilon :$

$$H1_k(k) = \frac{[G1(K\zeta_{k+1}) + \log(K\zeta_{k+1}) + (K\zeta_{k+1})(\log(K\zeta_{k+1}) - 1)] - [G1(K\zeta_k) + \log(K\zeta_k) + (K\zeta_k)(\log(K\zeta_k) - 1)]}{K(\zeta_{k+1} - \zeta_k)}$$

$$H2_k(k) = \frac{[G1(K\zeta_{k+1}) + \log(K\zeta_{k+1})] - [G1(K\zeta_k) + \log(K\zeta_k)]}{K(\zeta_{k+1} - \zeta_k)}$$

$$H3_k(k) = \frac{G1(K\zeta_{k+1}) - G1(K\zeta_k)}{K(\zeta_{k+1} - \zeta_k)}$$

$$H4_k(k) = G1(K\zeta_{k+1}) - G1(K\zeta_k)$$

et si $|\zeta_{k+1} - \zeta_k| \leq \varepsilon$:

$$H1_k(K) = \frac{1}{2} \left[G1(K\zeta_{k+1}) + \text{Log}(K\zeta_{k+1}) + G1(K\zeta_k) + \text{Log}(K\zeta_k) \right]$$

$$H2_k(K) = \frac{1}{2} \left[G1(K\zeta_{k+1}) + G1(K\zeta_k) \right]$$

$$H3_k(K) = \frac{1}{2} \left[G1(K\zeta_{k+1}) - \frac{1}{K\zeta_{k+1}} + G1(K\zeta_k) - \frac{1}{K\zeta_k} \right]$$

$$H4_k(K) = G1(K\zeta_{k+1}) - G1(K\zeta_k)$$

Les coefficients sont :

$$C1_{jk} = (q_j - ir_j \sin \theta)(x_{1k+1} - x_{1k}) - (p_j - ir_j \cos \theta)(y_{1k+1} - y_{1k})$$

$$C2_{jk} = i [\cos \theta (y_{1k+1} - y_{1k}) - \sin \theta (x_{1k+1} - x_{1k})]$$

$$C3_{jk} = C1_{jk} [i (p_j \cos \theta + q_j \sin \theta) + r_j]$$

$$D1_k = i (y_{1k+1} - y_{1k})$$

$$D2_k = -i \cos \theta D1_k$$

$$D3_k = D1_k [i (p_i \cos \theta + q_i \sin \theta) + r_i]$$

Les termes dérivés par rapport à x sont obtenus en dérivant les expressions $H_k(K)$ par rapport à $K\zeta$ et en les multipliant par $-i \cos \frac{K}{Z}$

9.4.3 - Partie des coefficients dépendant de $G_2'(M, M'; t)$

La troisième partie de la fonction de Green s'écrit sous la forme suivante :

$$(9.22) \quad G_2'^*(M, M') = \operatorname{Re} \left\{ Z_2 \right\} \quad ; \quad G_2'^{**}(M, M') = \operatorname{Im} \left\{ Z_2 \right\}$$

avec :

$$\begin{aligned} Z_2 = & \frac{1}{\eta l} \int_{-\theta_c}^{+\theta_c} \frac{K_3 G_3(K_3 \xi) - K_4 G_4(K_4 \xi)}{\sqrt{1-4\nu \cos \theta}} d\theta \\ & + \frac{1}{\eta l} \int_{-\theta_c}^{+\theta_c} -i \frac{Z_3 G_1(Z_3 \xi) - Z_4 G_3(Z_4 \xi)}{\sqrt{4\nu \cos \theta - 1}} d\theta \\ & + \frac{1}{\eta l} \int_{-\theta_c}^{+\theta_c} -i \frac{Z_3 G_2(Z_3 \xi) - Z_4 G_2(Z_4 \xi)}{\sqrt{4\nu \cos \theta - 1}} d\theta \\ & + \frac{1}{\eta l} \int_{-\theta_c}^{+\theta_c} -i \frac{Z_3 G_4(Z_3 \xi) - Z_4 G_4(Z_4 \xi)}{\sqrt{4\nu \cos \theta - 1}} d\theta \\ & + \frac{1}{\eta l} \int_{-\theta_c}^{+\theta_c} \frac{K_3 G_3(K_3 \xi) - K_4 G_4(K_4 \xi)}{\sqrt{1-4\nu \cos \theta}} d\theta \end{aligned}$$

Les résultats précédents s'appliquent donc en introduisant la fonction $G(\xi)$ convenable dans les termes H_k , et en remplaçant $\frac{1}{\sqrt{1+4\nu \cos \theta}}$ par $\frac{1}{\sqrt{1-4\nu \cos \theta}}$ ou $\frac{-i}{\sqrt{4\nu \cos \theta - 1}}$ suivant les valeurs de θ ce qui alourdit considérablement l'écriture. Notons toutefois, que nous obtiendrons ainsi $-ZDt_{ik}$ et non plus ZDt_{ik} .

9.5 - EXPRESSION DES COEFFICIENTS D'INFLUENCE DANS LE CAS D'UNE PROFONDEUR FINIE

Nous décomposerons à nouveau la fonction de Green en trois parties pour l'intégration.

9.5.1 - Partie des coefficients dépendant de $G'_0(M, M'; t)$

La première partie de la fonction de Green s'écrit :

$$(9.23) \quad G'_0(M, M'; t) = \left\{ \frac{1}{|MM'|} + \frac{1}{|MM'|} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_0} a_n \left(\frac{1}{|MM'_{n+1}|} + \frac{1}{|MM'_{n2}|} + \frac{1}{|MM'_{n3}|} + \frac{1}{|MM'_{n4}|} \right) \right\} \cos \omega t$$

et n'aura, ici encore, de contribution que dans les coefficients affectés d'un seul astérisque.

Les formules utilisées dans le cas d'une profondeur illimitée s'appliqueront à chacun des termes $\frac{1}{|MM'|}$, $\frac{1}{|MM'_{ni}|}$ et $\frac{1}{|MM'_{ni}|}$.

9.5.2 - Partie des coefficients dépendant de $G'_1(M, M'; t)$

La deuxième partie de la fonction de Green s'écrit d'après les résultats du sixième chapitre :

$$(9.24) \quad G'_1(M, M') = \text{Re} \left\{ Z_1 \right\} \quad ; \quad G''_1(M, M') = -\text{Im} \left\{ Z_1 \right\}$$

avec :

$$Z_1 = \frac{1}{4\pi h} \int_{-n/2}^{+n/2} \left[\sum_{n=1}^{N_1} a_n \left(\frac{1}{\lambda_n + \zeta_1} + \frac{1}{\lambda_n + \zeta_2} + \frac{1}{\lambda_n + 2 + \zeta_3} + \frac{1}{\lambda_n - 2 + \zeta_4} \right) - A(K_1) \left(G_1[K_1, \zeta_1 - 2] + G_1[K_1, \zeta_2 - 2] + G_1[K_1, \zeta_3] + G_1[K_1, \zeta_4 - 4] \right) - A(K_2) \left(G_1[K_2, \zeta_1 - 2] + G_1[K_2, \zeta_2 - 2] + G_1[K_2, \zeta_3] + G_1[K_2, \zeta_4 - 4] \right) \right] d\theta$$

En utilisant à nouveau les résultats de la sixième annexe, nous obtenons pour chacun des coefficients d'influence une forme analogue à celle du paragraphe 9.4.2 :

$$ZD_{ij} = -\frac{1}{16\eta^2 h} \int_{-\eta/2}^{+\eta/2} \sum_{k=1}^m C2_{jk} \left[P2_k + K_1 H2_k(K_1) + K_2 H2_k(K_2) \right] d\theta$$

$$ZS_{ij} = +\frac{1}{16\eta^2} \int_{-\eta/2}^{+\eta/2} \sum_{k=1}^m C1_{jk} \left[P1_k + H1_k(K_1) + H1_k(K_2) \right] d\theta$$

$$ZV_{ij} = -\frac{1}{16\eta^2 h} \int_{-\eta/2}^{+\eta/2} \sum_{k=1}^m C3_{jk} \left[P2_k + K_1 H2_k(K_1) + K_2 H2_k(K_2) \right] d\theta$$

$$\overline{ZDt}_{ik} = +\frac{V}{8\eta^2 h} \int_{-\eta/2}^{+\eta/2} i D1_k \left[P2_k + K_1 H2_k(K_1) + K_2 H2_k(K_2) \right] d\theta$$

$$ZDx_{ik} = -\frac{F^2}{16\eta^2 h} \int_{-\eta/2}^{+\eta/2} D2_k \left[P3_k + K_1^2 H3_k(K_1) + K_2^2 H3_k(K_2) \right] d\theta$$

$$ZDl_{ik} = -\frac{F^2}{16\eta^2} \int_{-\eta/2}^{+\eta/2} \left(\vec{\ell}_{k,x} \cdot \vec{i} \right) \left(\vec{\ell}_{k,y} \cdot \vec{i} \right) \left[P4_k + K_1 H4_k(K_1) + K_2 H4_k(K_2) \right] d\theta$$

$$ZDs_{ik} = +\frac{F^2}{16\eta^2} \int_{-\eta/2}^{+\eta/2} \left(\vec{s}_{k,x} \cdot \vec{i} \right) D1_k \left[P2_k + K_1 H2_k(K_1) + K_2 H2_k(K_2) \right] d\theta$$

$$ZSn_{ik} = +\frac{F^2}{16\eta^2} \int_{-\eta/2}^{+\eta/2} \left(\vec{n}_{k,x} \cdot \vec{i} \right) D1_k \left[P2_k + K_1 H2_k(K_1) + K_2 H2_k(K_2) \right] d\theta$$

$$ZVn_{ik} = -\frac{F^2}{16\eta^2 h} \int_{-\eta/2}^{+\eta/2} \left(\vec{n}_{k,x} \cdot \vec{i} \right) D3_k \left[P3_k + K_1^2 H3_k(K_1) + K_2^2 H3_k(K_2) \right] d\theta$$

avec, si $|\zeta_{k+1} - \zeta_k| > \epsilon$:

$$P1_k = \sum_{n=1}^{N_1} a_n \left[\frac{(\lambda_n + \zeta_{1kn}) (\log(\lambda_n + \zeta_{1kn}) - 1) - (\lambda_n + \zeta_{1k}) (\log(\lambda_n + \zeta_{1k}) - 1)}{\zeta_{1kn} - \zeta_{1k}} \right. \\ + \frac{(\lambda_n + \zeta_{2kn}) (\log(\lambda_n + \zeta_{2kn}) - 1) - (\lambda_n + \zeta_{2k}) (\log(\lambda_n + \zeta_{2k}) - 1)}{\zeta_{2kn} - \zeta_{2k}} \\ + \frac{(\lambda_n + 2 + \zeta_{3kn}) (\log(\lambda_n + 2 + \zeta_{3kn}) - 1) - (\lambda_n + 2 + \zeta_{3k}) (\log(\lambda_n + 2 + \zeta_{3k}) - 1)}{\zeta_{3kn} - \zeta_{3k}} \\ \left. + \frac{(\lambda_n - 2 + \zeta_{4kn}) (\log(\lambda_n - 2 + \zeta_{4kn}) - 1) - (\lambda_n - 2 + \zeta_{4k}) (\log(\lambda_n - 2 + \zeta_{4k}) - 1)}{\zeta_{4kn} - \zeta_{4k}} \right]$$

$$P2_k = \sum_{n=1}^{M_k} a_n \left[\frac{\log(\lambda_n + \zeta_{1k}) - \log(\lambda_n + \zeta_{1k})}{\zeta_{1k+1} - \zeta_{1k}} + \frac{\log(\lambda_n + \zeta_{2k}) - \log(\lambda_n + \zeta_{2k})}{\zeta_{2k+1} - \zeta_{2k}} \right. \\ \left. + \frac{\log(\lambda_n + 2 + \zeta_{3k}) - \log(\lambda_n + 2 + \zeta_{3k})}{\zeta_{3k+1} - \zeta_{3k}} + \frac{\log(\lambda_n - 2 + \zeta_{4k}) - \log(\lambda_n - 2 + \zeta_{4k})}{\zeta_{4k+1} - \zeta_{4k}} \right]$$

$$P3_k = \sum_{n=1}^{M_k} a_n \left[\frac{(\lambda_n + \zeta_{1k})^{-1} - (\lambda_n + \zeta_{1k})^{-1}}{\zeta_{1k+1} - \zeta_{1k}} + \frac{(\lambda_n + \zeta_{2k})^{-1} - (\lambda_n + \zeta_{2k})^{-1}}{\zeta_{2k+1} - \zeta_{2k}} \right. \\ \left. + \frac{(\lambda_n + 2 + \zeta_{3k})^{-1} - (\lambda_n + 2 + \zeta_{3k})^{-1}}{\zeta_{3k+1} - \zeta_{3k}} + \frac{(\lambda_n - 2 + \zeta_{4k})^{-1} - (\lambda_n - 2 + \zeta_{4k})^{-1}}{\zeta_{4k+1} - \zeta_{4k}} \right]$$

$$P4_k = \sum_{n=1}^{M_k} a_n \left[\frac{1}{\lambda_n + \zeta_{1k+1}} - \frac{1}{\lambda_n + \zeta_{1k}} + \frac{1}{\lambda_n + \zeta_{2k+1}} - \frac{1}{\lambda_n + \zeta_{2k}} \right. \\ \left. + \frac{1}{\lambda_n + 2 + \zeta_{3k+1}} - \frac{1}{\lambda_n + 2 + \zeta_{3k}} + \frac{1}{\lambda_n - 2 + \zeta_{4k+1}} - \frac{1}{\lambda_n - 2 + \zeta_{4k}} \right]$$

Les formules donnant les termes H sont obtenues en multipliant par $-\frac{A(K)}{K}$ la somme des termes du paragraphe 9.4.2 dans lesquels nous avons successivement remplacé ζ_k par ζ_{1k}^{-2} , ζ_{2k}^{-2} , ζ_{3k} et ζ_{4k}^{-4} .

Dans le cas où $|\zeta_{k+1} - \zeta_k|$ est inférieur ou égal à ε , le même type d'opération permet d'obtenir $P1_k$, $P2_k$, $P3_k$ et $P4_k$.

9.5.3 - Partie des coefficients dépendant de $G_2^*(M, M'; t)$

La troisième partie de la fonction de Green s'écrit :

$$(9.25) \quad G_2^*(M, M') = \text{Re} \left\{ ZL \right\} \quad ; \quad G_2^{**}(M, M') = \text{Im} \left\{ ZL \right\}$$

où ZL est obtenu de manière analogue au cas d'une profondeur infinie.

Les résultats précédents s'appliquent donc en introduisant les fonctions $G(\zeta)$ convenables dans les termes H_k , et en remplaçant $A(K)$ par $B(K)$. De même qu'au paragraphe 9.4.3, nous obtiendrons $-\text{Dt}_{ik}$ et non plus Dt_{ik} .

9.6 - CONCLUSION

Nous avons donné dans ce neuvième chapitre les équations intégrales discrétisées ainsi que les expressions du potentiel et des vitesses. Les coefficients d'influence ont été établis sous une forme très générale, afin d'éviter une écriture trop détaillée qui serait fastidieuse. Il convient de noter en particulier que les formules asymptotiques n'ont pas été consignées ici, et qu'ainsi ce chapitre ne constitue pas un formulaire de programmation complet.



Chapitre 10

MÉTHODES NUMÉRIQUES

Nous avons rassemblé dans ce chapitre les solutions que nous avons apportées aux différents problèmes numériques mentionnés au cours des pages précédentes.

10.1 - DETERMINATION DES PÔLES REELS DANS LE CAS D'UNE PROFONDEUR FINIE

L'impossibilité de résoudre analytiquement les équations (6.20) et (6.28) qui définissent les pôles réels des intégrands de la fonction de Green, ainsi que l'équation (6.30) qui détermine le pôle double, nous impose de recourir à des solutions numériques.

10.1.1 - Détermination des pôles simples

Les quatre pôles simples sont obtenus en résolvant les équations suivantes :

$$(10.1) \quad (\tilde{\omega} \pm FK \cos \theta) = \pm \sqrt{K h K}$$

qui sont matérialisées par les figures 6.a et 6.b.

Ces équations peuvent être résolues par la méthode de Newton en recherchant les intersections entre les droites définies par les premiers membres des équations (10.1) d'une part, et les tangentes aux courbes définies par les seconds membres et passant par un point donné arbitrairement (1) d'autre part, puis en réitérant à partir du point obtenu.

(1) L'arbitraire est en fait limité par le critère de convergence qui doit être satisfait.

La tangente à $\pm \sqrt{K \operatorname{th} K}$ au point d'abscisse K_0 a pour expression

$$(10.2) \quad y = \pm \frac{\sqrt{K_0 \operatorname{th} K_0}}{2K_0} \left[1 + \frac{2K_0}{\operatorname{sh} 2K_0} \right] (K - K_0) \pm \sqrt{K_0 \operatorname{th} K_0}$$

et son intersection avec la droite d'équation :

$$(10.3) \quad y = \pm KF \cos \theta + \tilde{\omega}$$

a pour abscisse :

$$(10.4) \quad K = \frac{\tilde{\omega} \pm \frac{\sqrt{K_0 \operatorname{th} K_0}}{2} \left[1 - \frac{2K_0}{\operatorname{sh} 2K_0} \right]}{\pm F \cos \theta \pm \frac{\sqrt{K_0 \operatorname{th} K_0}}{2K_0} \left[1 + \frac{2K_0}{\operatorname{sh} 2K_0} \right]}$$

Nous obtenons alors quatre relations qui caractérisent chacun des pôles

$$(10.5) \quad \left[\begin{array}{l} K_{1(i+1)} = \frac{\tilde{\omega} - \frac{\sqrt{K_{4i} \operatorname{th} K_{4i}}}{2} \left[1 - \frac{2K_{4i}}{\operatorname{sh} 2K_{4i}} \right]}{F \cos \theta + \frac{\sqrt{K_{4i} \operatorname{th} K_{4i}}}{2K_{4i}} \left[1 + \frac{2K_{4i}}{\operatorname{sh} 2K_{4i}} \right]} \\ K_{2(i+1)} = \frac{\tilde{\omega} + \frac{\sqrt{K_{2i} \operatorname{th} K_{2i}}}{2} \left[1 - \frac{2K_{2i}}{\operatorname{sh} 2K_{2i}} \right]}{F \cos \theta - \frac{\sqrt{K_{2i} \operatorname{th} K_{2i}}}{2K_{2i}} \left[1 + \frac{2K_{2i}}{\operatorname{sh} 2K_{2i}} \right]} \\ K_{3(i+1)} = \frac{\tilde{\omega} - \frac{\sqrt{K_{3i} \operatorname{th} K_{3i}}}{2} \left[1 - \frac{2K_{3i}}{\operatorname{sh} 2K_{3i}} \right]}{-F \cos \theta + \frac{\sqrt{K_{3i} \operatorname{th} K_{3i}}}{2K_{3i}} \left[1 + \frac{2K_{3i}}{\operatorname{sh} 2K_{3i}} \right]} \\ K_{4(i+1)} = \frac{\tilde{\omega} + \frac{\sqrt{K_{4i} \operatorname{th} K_{4i}}}{2} \left[1 - \frac{2K_{4i}}{\operatorname{sh} 2K_{4i}} \right]}{-F \cos \theta + \frac{\sqrt{K_{4i} \operatorname{th} K_{4i}}}{2K_{4i}} \left[1 + \frac{2K_{4i}}{\operatorname{sh} 2K_{4i}} \right]} \end{array} \right.$$

L'initialisation des différents pôles peut être réalisée en prenant les valeurs des pôles en profondeur infinie si elles sont supérieures à l'unité, et les intersections des droites avec les tangentes aux courbes à l'origine dans le cas contraire.

Une initialisation plus fine est obtenue en considérant les solutions approchées que nous avons utilisées au huitième chapitre.

Les itérations sont arrêtées dès qu'un accroissement ou une diminution ϵ du résultat fait changer le signe de l'équation à résoudre.

Les essais numériques réalisés ont montré que les initialisations proposées assurent une convergence rapide (quelques itérations), quels que soient les paramètres $\tilde{\omega}$ et F .

10.1.2 - Détermination du pôle double

En ce qui concerne le pôle double K_c qui vérifie l'équation suivante :

$$(10.6) \quad \tilde{\omega} = \frac{1}{2} \sqrt{K_c \operatorname{th} K_c} \left[1 - \frac{2K_c}{\operatorname{sh} 2K_c} \right] = f(K_c)$$

nous utiliserons à nouveau la méthode de Newton en recherchant l'intersection de la droite définie par la constante $\tilde{\omega}$ avec la tangente à la fonction $f(K)$ au point K_0 . Cette tangente s'écrit :

$$(10.7) \quad y(K) = f(K_0) + \left. \frac{d}{dK} f(K) \right|_{K_0} (K - K_0)$$

d'où la formule de récurrence

$$(10.8) \quad K_{c(i+1)} = K_{ci} + \frac{\tilde{\omega} - f(K_{ci})}{\left. \frac{d}{dK} f(K) \right|_{K_{ci}}}$$

soit, en développant les différents termes :

$$(10.9) \quad K_{c(i+1)} = K_{ci} + \frac{4 \sqrt{\frac{K_{ci}}{\operatorname{th} K_{ci}}} \tilde{\omega} - 2K_{ci} \left[1 - \frac{2K_{ci}}{\operatorname{sh} 2K_{ci}} \right]}{\left[1 - \frac{2K_{ci}}{\operatorname{sh} 2K_{ci}} \right]^2 + 4K_{ci} \operatorname{th} K_{ci} \left[\frac{2K_{ci}}{\operatorname{sh} 2K_{ci}} \right]}$$

L'initialisation est faite en utilisant la solution en profondeur illimitée :

$$(10.10) \quad K_{c1} = 4\tilde{\omega}^2$$

10.2 - APPROXIMATION D'UNE FONCTION REGULIERE PAR UNE SERIE D'EXPONENTIELLES COMPLEXES

La méthode d'approximation dont nous ne reproduirons ici que les grandes lignes et les résultats que nous avons utilisés sont tirés de travaux non publiés de J.C. DAUBISSE. Nous lui devons également les programmes de lissage et de résolution de systèmes rectangulaires /AN-1/.

10.2.1 - Principe de la méthode de Lanczos et Prony

Soit $y = f(x)$ une fonction réelle de la variable réelle x , que nous cherchons à approximer sur l'intervalle $[a, b]$ par une fonction de la forme suivante :

$$(10.11) \quad \bar{y}(x) = \sum_{i=1}^N a_i e^{\lambda_i x} \quad a_i, \lambda_i \in \mathbb{C}$$

Considérons n points équidistants pris dans un intervalle $[x_0, x_0 + nh]$ contenant $[a, b]$, et écrivons l'égalité entre y et \bar{y} en chacun de ces points. Il vient :

$$(10.12) \quad \left[\begin{array}{l} x_r = x_0 + rh \\ y_r = f(x_r) = \sum_{i=1}^m a_i e^{\lambda_i x_0} e^{r\lambda_i h} \end{array} \right.$$

Le changement de variables

$$(10.13) \quad c_i = a_i e^{\lambda_i x_0} \quad ; \quad v_i = e^{\lambda_i h}$$

conduit à écrire le système d'équation suivant :

$$(10.14) \quad \left[\begin{array}{cccc} c_1 & + c_2 & + \dots & + c_m = Y_0 \\ c_1 v_1 & + c_2 v_2 & + \dots & + c_m v_m = Y_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1 v_1^m & + c_2 v_2^m & + \dots & + c_m v_m^m = Y_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1 v_1^n & + c_2 v_2^n & + \dots & + c_m v_m^n = Y_n \end{array} \right.$$

Soit $Q(v)$ le polynôme défini par l'expression (10.15) :

$$(10.15) \quad Q(v) = (v-v_1)(v-v_2) \dots (v-v_m) = v^m + s_1 v^{m-1} + \dots + s_{m-1} v + s_m$$

il vérifie l'équation (10.16) puisqu'il est nul, quel que soit r compris entre 1 et m inclus.

$$(10.16) \quad Q(v_1) c_1 + Q(v_2) c_2 + \dots + Q(v_m) c_m = s_m Y_0 + s_{m-1} Y_1 + \dots + s_1 Y_{m-1} + Y_m = 0$$

D'où :

$$(10.17) \quad Y_{m-1} s_1 + Y_{m-2} s_2 + \dots + Y_1 s_{m-1} + Y_0 s_m = -Y_m$$

Si nous considérons maintenant les $(n-m+1)$ équations obtenues en recommençant la même opération avec les lignes comprises entre k et $(m+k)$ pour k variant de zéro à $(n-m)$, nous obtenons le système linéaire (10.18).

$$(10.18) \quad \left[\begin{array}{cccc} Y_{m-1} s_1 + Y_{m-2} s_2 + \dots + Y_1 s_{m-1} + Y_0 s_m = -Y_m \\ Y_m s_1 + Y_{m-1} s_2 + \dots + Y_2 s_{m-1} + Y_1 s_m = -Y_{m-1} \\ \dots \\ Y_{n-1} s_1 + Y_{n-2} s_2 + \dots + Y_{n-m+1} s_{m-1} + Y_{n-m} s_m = -Y_n \end{array} \right.$$

Ce système de $(n-m+1)$ équations linéaires à m inconnues est rectangulaire vertical dans la mesure où $(n-m+1)$ est supérieur à m . Ainsi, en choisissant n supérieur à $2m-1$, nous pouvons en déterminer une solution au sens des moindres carrés par la méthode de Householder.

Une fois les m valeurs s_1, s_2, \dots, s_m déterminées, la résolution du polynôme (10.15) nous fournit les m valeurs des v_i et donc des λ_i . Le système (10.14) est résolu par la même méthode que précédemment ; il permettra de connaître les c_i et donc les a_i .

Il convient de remarquer que les v_r sont les solutions d'une équation algébrique à coefficients réels et qu'elles sont, à ce titre, soit réelles, soit complexes conjuguées deux à deux. Il en est donc de même des λ_i et des a_i . Il en résulte finalement que $\bar{y}(x)$ est une fonction réelle.

10.2.2 - Principe de la méthode de Householder

La méthode de Householder (encore appelée méthode du Q.U.) utilise des transformations orthogonales, afin de réduire le système linéaire initial à un système triangulaire supérieur.

Soit à résoudre l'équation matricielle $A X = B$. Si nous remplaçons la matrice A par un produit Q.U. composé d'une matrice orthogonale symétrique Q et d'une matrice triangulaire supérieure U , il vient :

$$(10.19) \quad Q \cdot U \cdot X = B$$

d'où :

$$(10.20) \quad U \cdot X = Q^{-1} B = Q B$$

Le système est dès lors résolu puisque U est triangulaire.

La décomposition de la matrice A est obtenue en utilisant des éléments réflecteurs H définis par :

$$(10.21) \quad I - 2 u u^T \quad ; \quad u \in \mathbb{R}^n / u^T u = 1$$

En effet, si a est un élément de R^n , il existe H et α tels que Ha est égal à αe_1 où e_1 est le premier vecteur de la base canonique de R^n . La matrice Q se présente alors sous la forme d'un produit de $(n-1)$ matrices :

$$(10.22) \quad Q = H^1 H^2 \dots H^{n-1}$$

où H^r est obtenu à partir du vecteur u^r inclus dans le sous espace de dimension $n-r+1$ orthogonal aux $r-1$ précédents.

Il convient de noter qu'une telle méthode permet de résoudre un système rectangulaire comprenant plus de lignes que de colonnes, à condition que son rang soit maximal. La solution ainsi déterminée satisfait au mieux l'ensemble des équations au sens des moindres carrés.

10.2.3 - Mise en oeuvre du programme de calcul

Le programme de lissage laisse à l'utilisateur la maîtrise de l'intervalle $[a, b]$ du pas h et du nombre m des exponentielles complexes.

Dans le cas qui nous intéresse, l'intervalle théorique du lissage n'est pas borné, certaines précautions doivent donc être prises.

- Les exposants λ_i doivent tous avoir des parties réelles négatives, ce qui sera obtenu en prenant une borne b suffisamment grande pour que la fonction ch^{2K} soit prépondérante vis-à-vis des autres termes et impose une décroissance exponentielle. Dès lors, ce sont les parties imaginaires des λ_i et les coefficients a_i qui prendront en charge la représentation des éventuelles pentes fortement positives correspondant à des oscillations.

- Le pas h doit être suffisamment petit pour décrire correctement la fonction $y = f(x)$, mais le nombre n des points imposés doit rester compris entre deux et quatre fois le nombre m des exponentielles, afin que le système à résoudre ne soit pas trop fortement rectangulaire.

- Le nombre m des exponentielles doit rester inférieur à dix pour éviter l'existence d'oscillations de \bar{y} entre les points imposés.

Après de nombreux tests, nous avons opté pour quatre ou six exponentielles et un nombre de points compris entre quinze et vingt sur l'intervalle $[0, 20]$. Quand la fonction à approximer varie très vite au voisinage de l'origine, le lissage est effectué sur l'intervalle $[-1, 20]$.

PARTIE REGULIERE DE G'1

NOMBRE DE FROUDE : $F = 0.15$

PULSATION RELATIVE : $= 2.00$

NOMBRE DE STROUHAL : $= 0.30$

ANGLE TETA : $= 0.50$

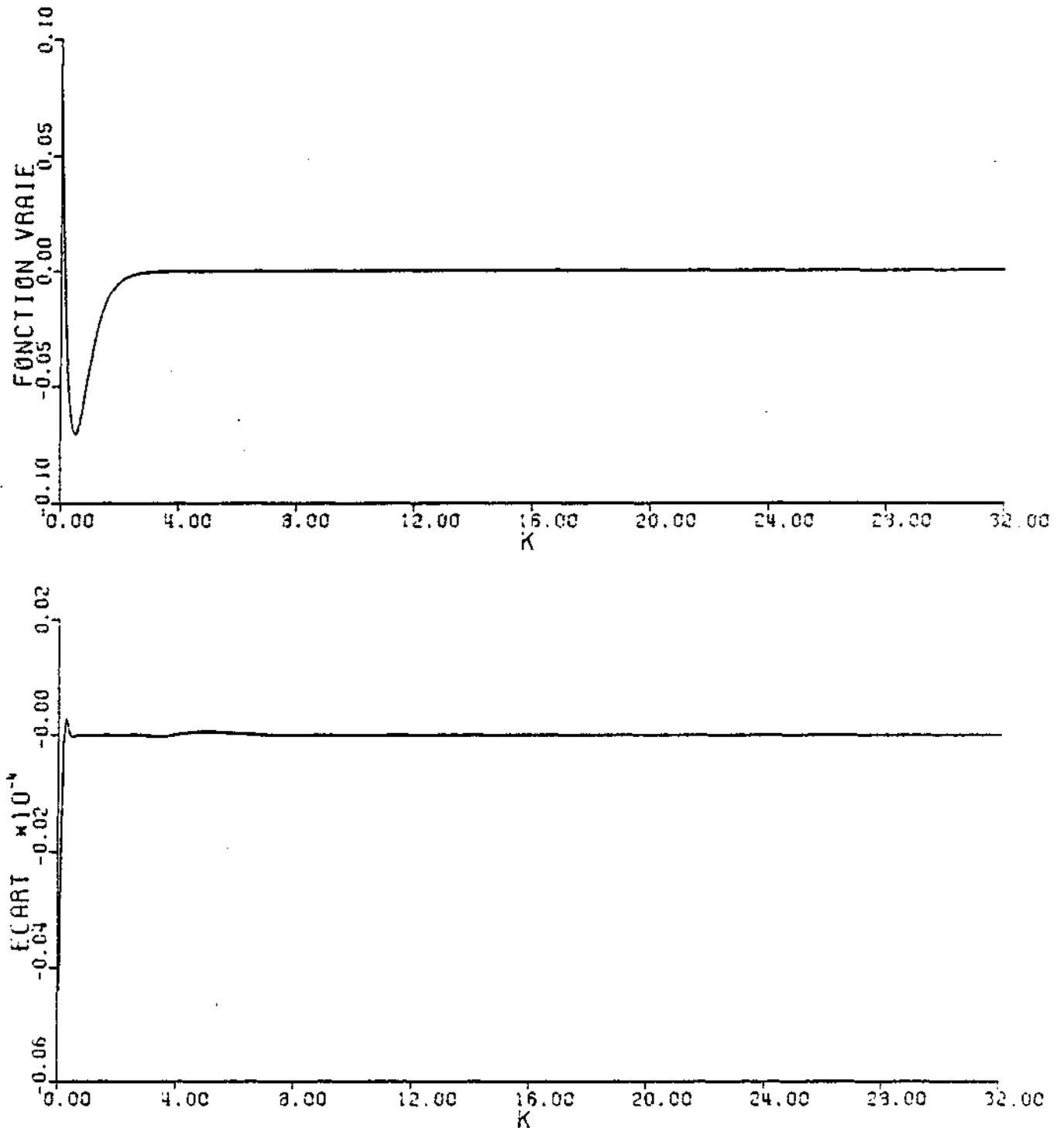


figure 10.a 1

PARTIE REGULIERE DE G'2

NOMBRE DE FROUDE : $F = 0.15$

PULSATION RELATIVE : $= 2.00$

NOMBRE DE STROUHAL : $= 0.30$

ANGLE TETA : $= 0.50$

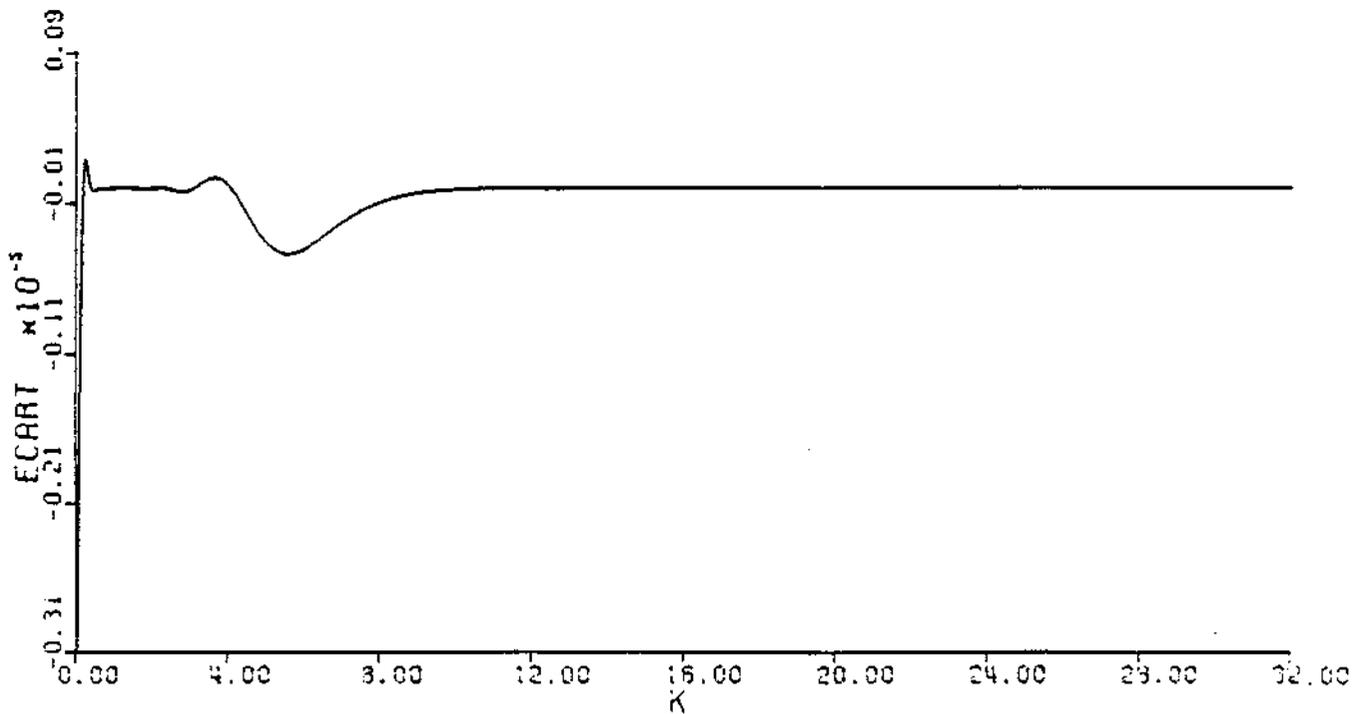
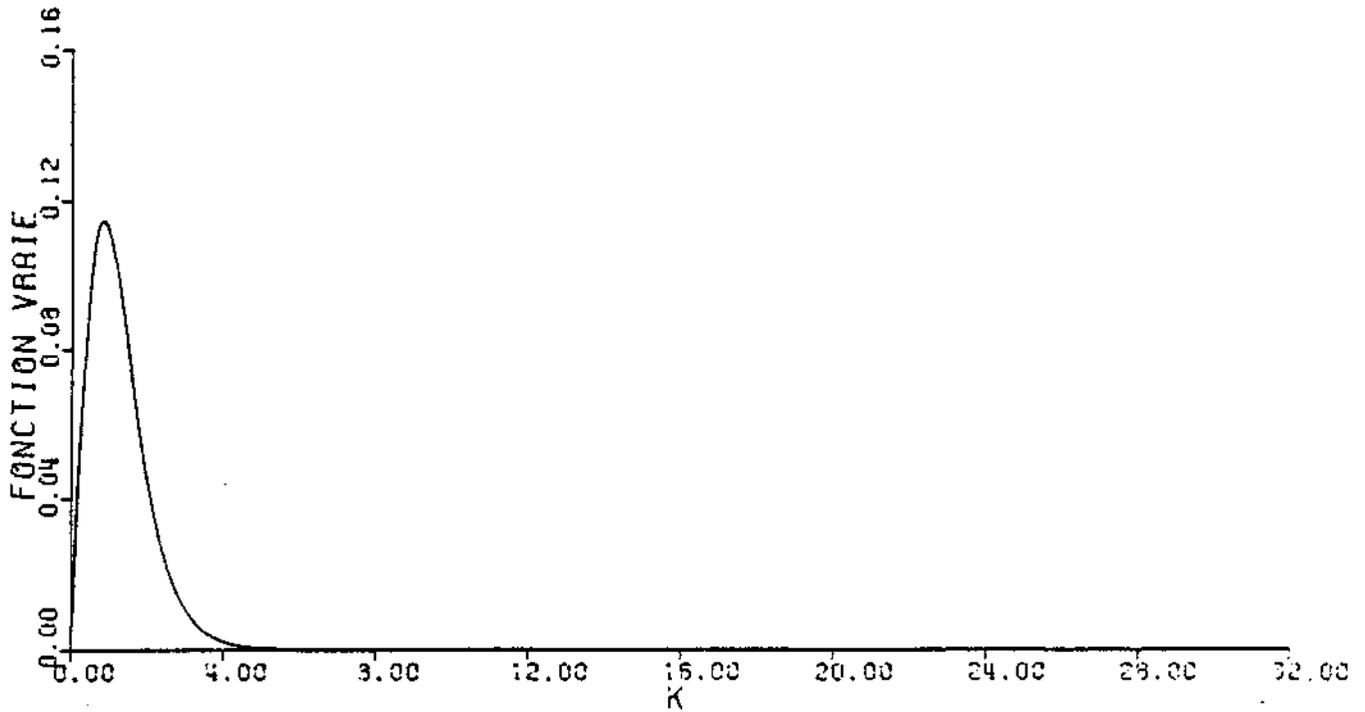


figure 10.a 2

PARTIE REGULIERE DE G'1

NOMBRE DE FROUDE : $F = 0.15$

PULSATION RELATIVE : $= 2.00$

NOMBRE DE STROUHAL : $= 0.30$

ANGLE TETA : $= 0.58$

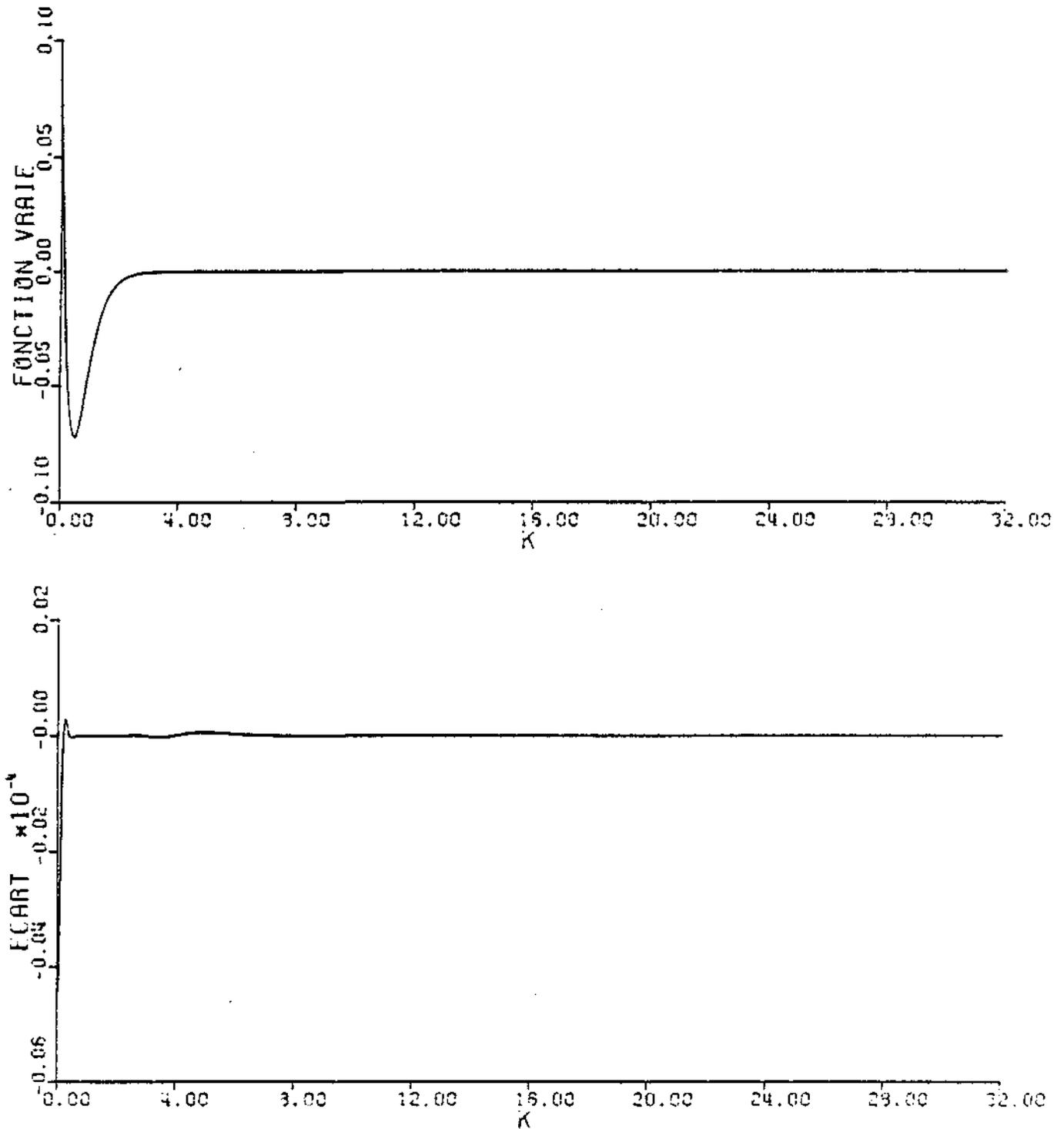


figure 10.a 3

PARTIE REGULIERE DE 'G'2

NOMBRE DE FROUDE : $F = 0.15$

PULSATION RELATIVE : $= 2.00$

NOMBRE DE STROUHAL : $= 0.30$

ANGLE TETA : $= 0.58$

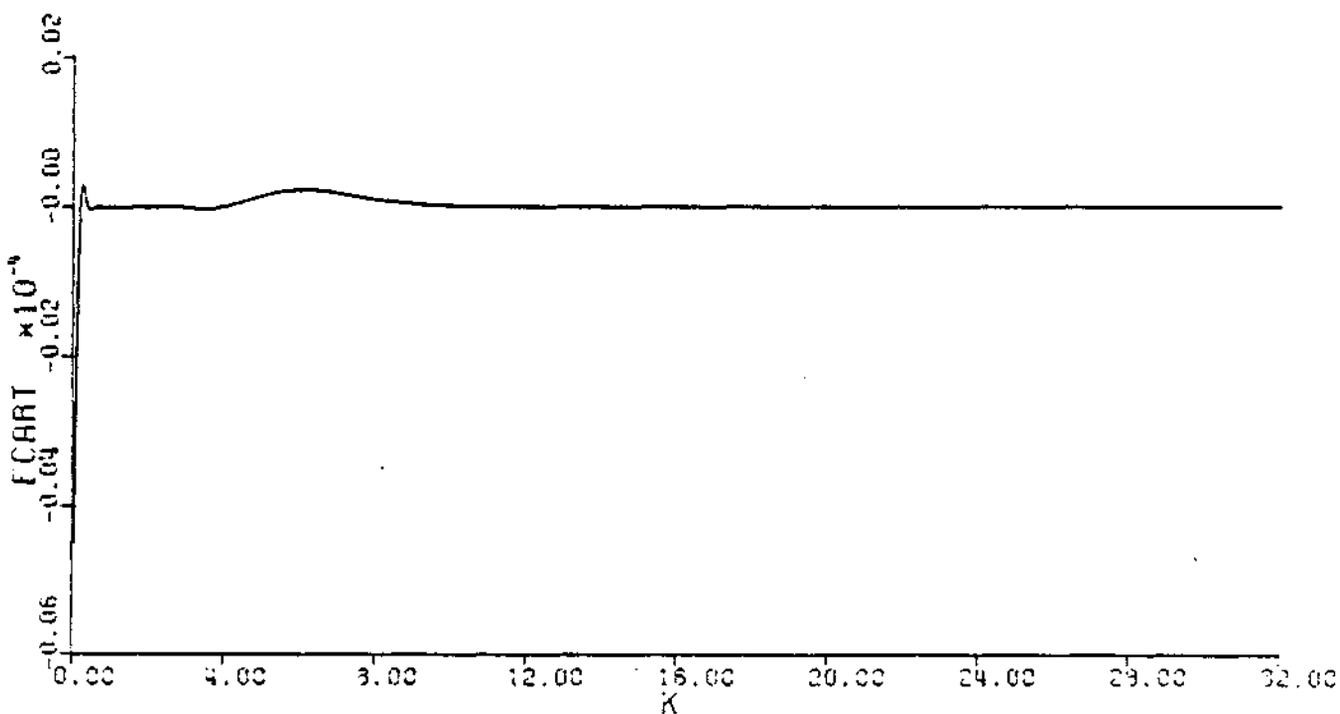
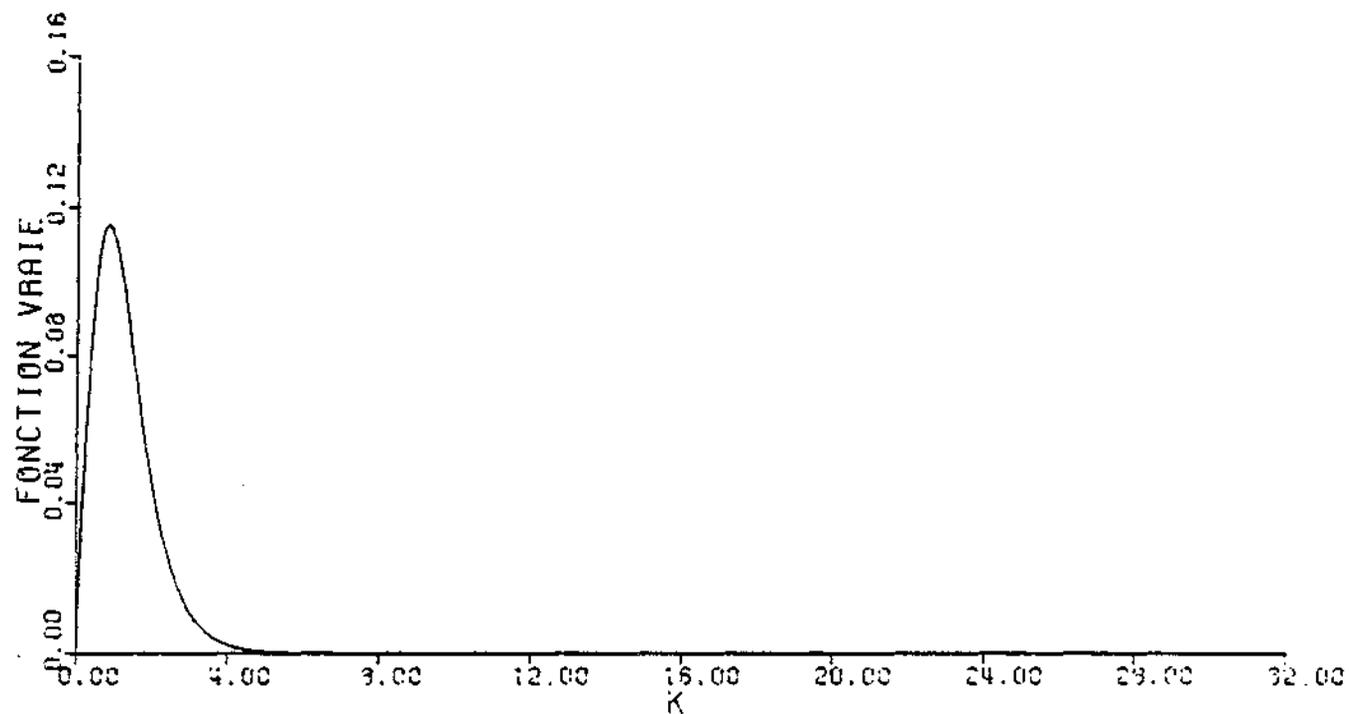


figure 10.a 4

PARTIE REGULIERE DE G'1

NOMBRE DE FROUDE : $F = 0.15$

PULSATION RELATIVE : $= 2.00$

NOMBRE DE STROUHAL : $= 0.30$

ANGLE TETA : $= 1.05$

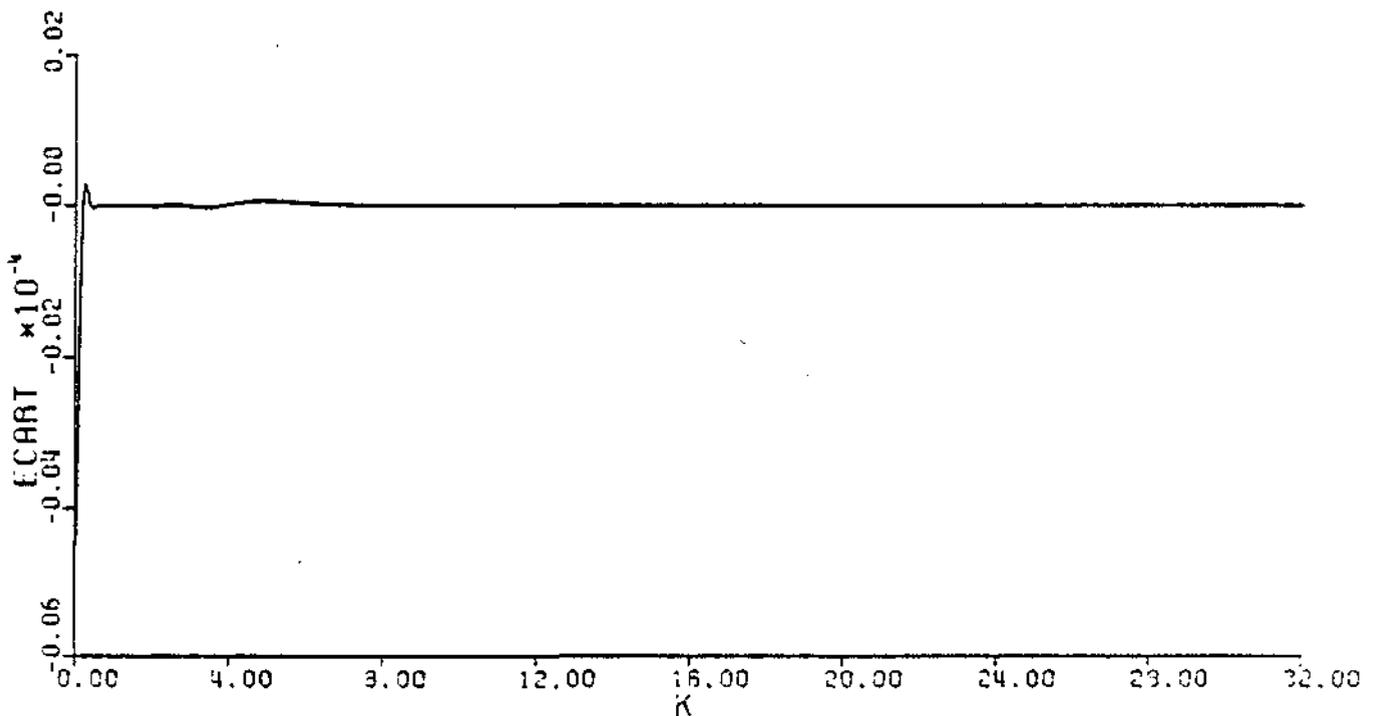
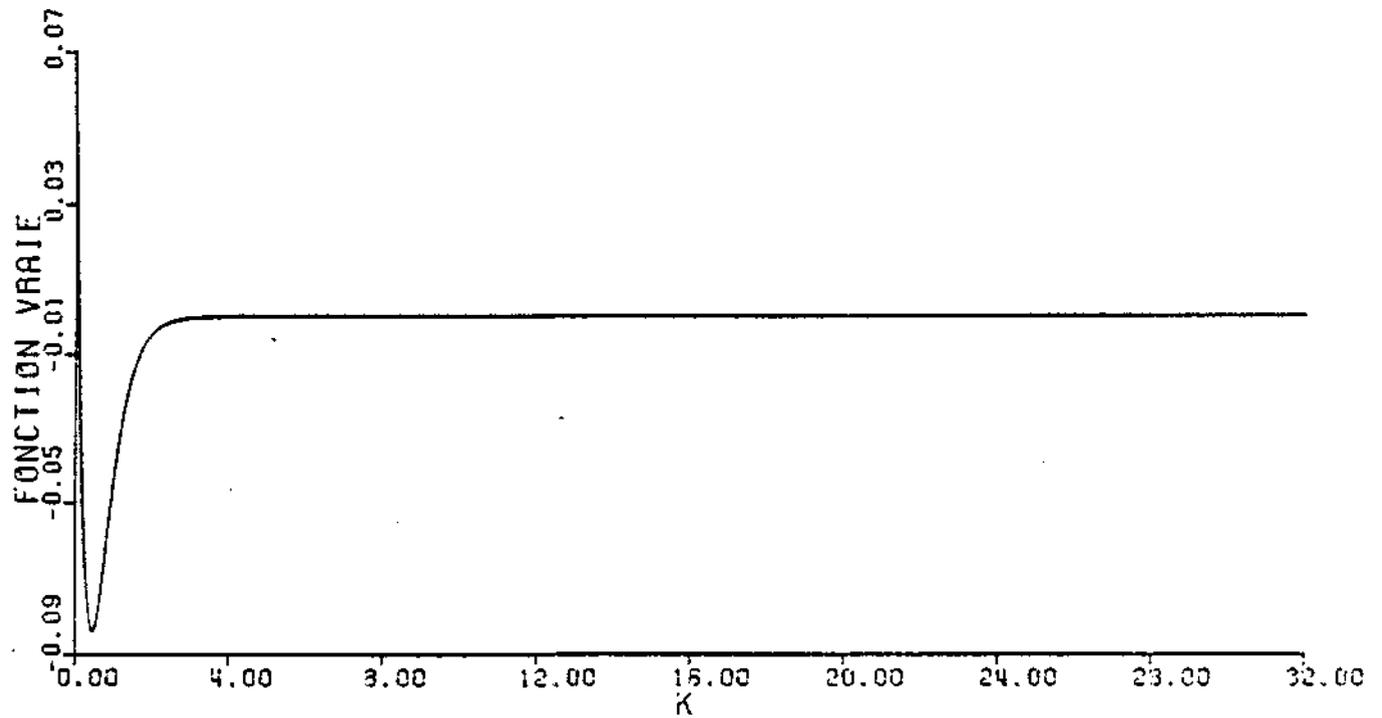


figure 10.a 5

PARTIE REGULIERE DE 'G'2

NOMBRE DE FROUDE : $F = 0.15$

PULSATION RELATIVE : $= 2.00$

NOMBRE DE STROUHAL : $= 0.30$

ANGLE TETA : $= 1.05$

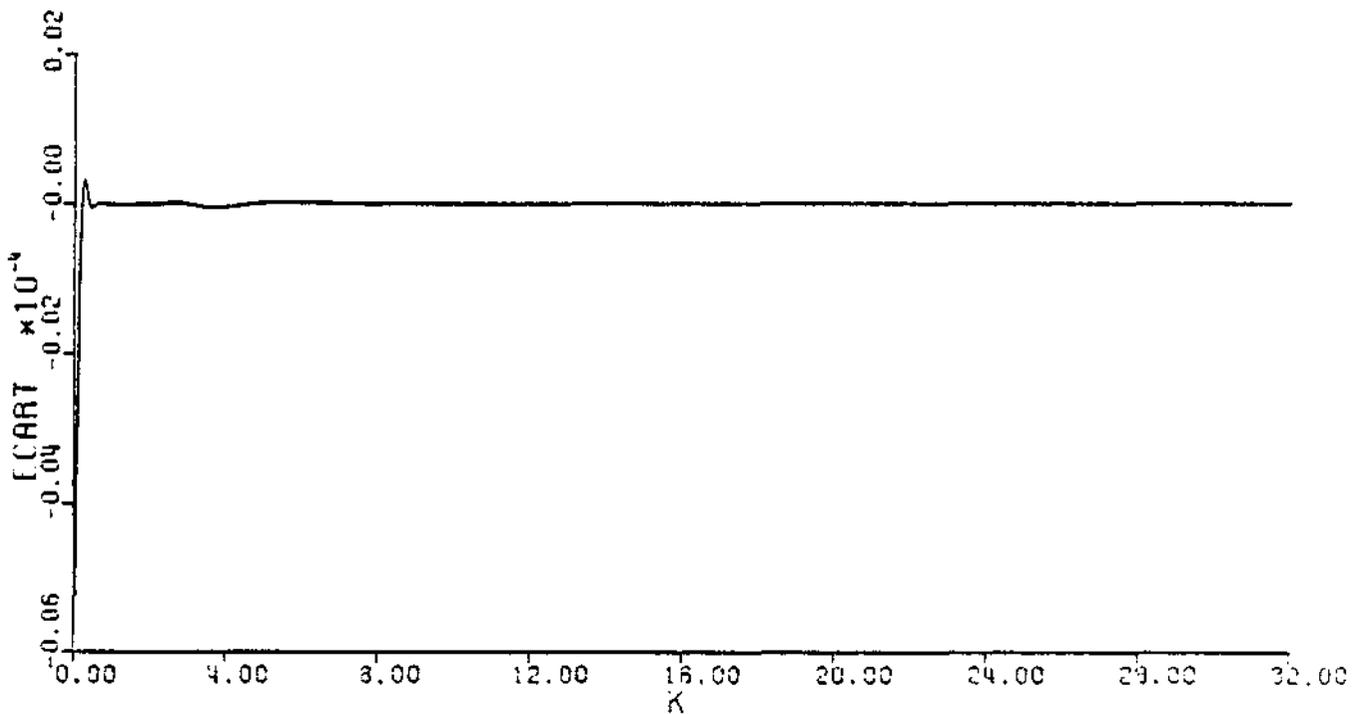
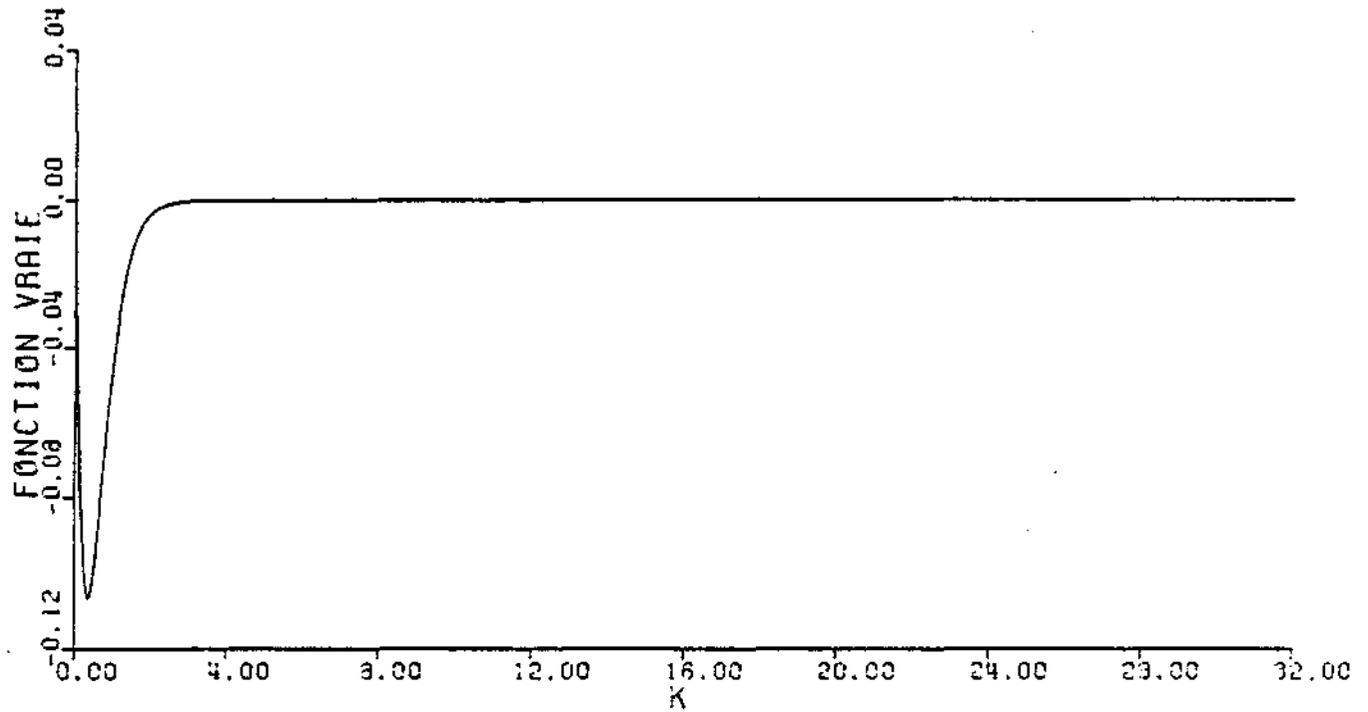


figure 10.a 6

Les calculs réalisés en double précision (treize décimales sur I.B.M. 370/135) fournissent une approximation de l'ordre de la simple précision (six décimales) sur l'ensemble du résultat. Notons, par ailleurs, que la précision de l'intégrale d'une exponentielle sur l'intervalle $[0, \infty[$ est du même ordre de grandeur que celle avec laquelle la fonction est connue. Ceci et cela montre que la méthode est parfaitement adaptée au problème à résoudre.

Les figures 10.a représentent différents lissages que nous avons utilisés dans le programme de diffraction - radiation.

10.3 - INTEGRATION NUMERIQUE PAR RAPPORT A LA VARIABLE θ

10.3.1 - Intégration de $G_1^1(M, M'; t)$

La résolution du problème de la diffraction-radiation à nombre de Froude non nul peut nécessiter une discrétisation assez fine. Par ailleurs, les intégrands sont d'autant plus oscillants que la facette influençante et le point influencé sont plus proches de la surface libre, comme le montrent les figures 10.b relatives à une source ponctuelle très éloignée des points de calcul (c'est le cas le plus défavorable). Il convient donc de prévoir une méthode à pas d'intégration variable. La méthode de Simpson présente l'avantage d'utiliser des points équidistants, ce qui permet de définir un premier maillage assez large suffisant pour les intégrands peu oscillants, puis deux autres maillages obtenus en coupant ces intervalles en deux et en quatre. Les sommets communs à deux facettes peuvent ainsi servir à une intégration avec peu de points pour la facette la plus immergée, et un pas moitié pour l'autre, par le truchement de coefficients appropriés.

Sur l'intervalle $[0, +\frac{\pi}{2}]$, le nombre de points d'intégration minimal a été choisi égal à 17 (ce qui donne un pas maximal de 0.098) ; les deux autres maillages sont alors égaux à 33 (ce qui donne un pas de 0.049) ou à 65 (ce qui donne un pas de 0.025). Les erreurs sont alors majorées respectivement par : $1.01 \cdot 10^{-7} g^{IV}(\theta)$, $3.17 \cdot 10^{-9} g^{IV}(\theta)$ et $9.90 \cdot 10^{-11} g^{IV}(\theta)$.

10.3.2 - Intégration de $G_2^1(M, M'; t)$

Quand v est inférieur à v_c , la fonction $G_2^1(M, M'; t)$ est calculée par la même méthode que $G_1^1(M, M'; t)$

Quand v est supérieur à v_c , l'intégrand de $G_2^1(M, M'; t)$ présente une singularité de la forme $(|\theta - \theta_c|)^{-1/2}$ qui introduit des difficultés importantes. Nous avons envisagé deux familles de méthodes. La première consiste à isoler la singularité sur un petit intervalle $[\theta_c - \varepsilon, \theta_c + \varepsilon]$ et la deuxième à séparer la singularité de la partie régulière sur tout l'intervalle $[0, +\frac{\pi}{2}]$.

10.3.2.1 - Intégration séparée de la singularité

L'intégration séparée de la singularité est obtenue en utilisant directement les formules (5.66) ou (6.76) si la profondeur est finie. L'intervalle d'intégration est découpé en trois parties $[0, \theta_c - \varepsilon]$, $[\theta_c - \varepsilon, \theta_c + \varepsilon]$ et $[\theta_c + \varepsilon, +\frac{\pi}{2}]$. Sur le premier et le troisième intervalle, nous avons mis en oeuvre la méthode de Simpson déjà décrite. Sur l'intervalle central, le numérateur est moyenné et le dénominateur est linéarisé ; c'est-à-dire que la fonction à intégrer subit l'approximation suivante :

$$(10.23) \quad \frac{f(\theta)}{\sqrt{|4-4\gamma\cos\theta|}} \sim \frac{f(\theta_c)}{2\sqrt{\gamma\sin\theta_c}\sqrt{|\theta-\theta_c|}} \quad \theta \in [\theta_c - \varepsilon, \theta_c + \varepsilon]$$

Il est alors difficile d'obtenir un résultat stable dans la mesure où ε doit être suffisamment petit pour que l'approximation (10.23) ne soit pas trop grossière, et assez grand tout de même pour que la dérivée quatrième de la fonction à intégrer ne soit pas trop grande dans la mesure où le majorant de l'erreur due à la méthode de Simpson est sur les intervalles $[0, \theta_c - \varepsilon]$ et $[\theta_c + \varepsilon, +\frac{\pi}{2}]$:

$$(10.24) \quad M = \frac{h^5}{90} \mathcal{G}^{IV}(\theta)$$

Le terme le plus défavorable dû à la singularité est de la forme $A \varepsilon^{-9/2}$. L'erreur est donc majorée par :

$$(10.25) \quad M = \frac{A}{90} h^5 \varepsilon^{-9/2} = \frac{A}{90} \sqrt{\varepsilon} \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^5$$

ce qui nous impose un pas très fin. En prenant pour ε la valeur maximale de 0.05 et pour M celle de $A \cdot 10^{-6}$, le rapport h/ε est égal à 0.21, et un minimum de 140 points d'intégration est nécessaire sur la somme des deux intervalles. Cette quantité de points d'appui est prohibitive puisqu'elle conduit à des coûts exorbitants.

POSITION DE LA SOURCE : $X_s = 0.$ $Y_s = 0.$ $Z_s = 0.$

POSITION DU POINT : $X_p = 1.$ $Y_p = 1.$ $Z_p = -0.1$

NOMBRE DE FROUDE : $F = 0.15$

PULSATION : $\tilde{\omega} = 3.00$

NOMBRE DE STROUHAL : $\nu = 0.45$

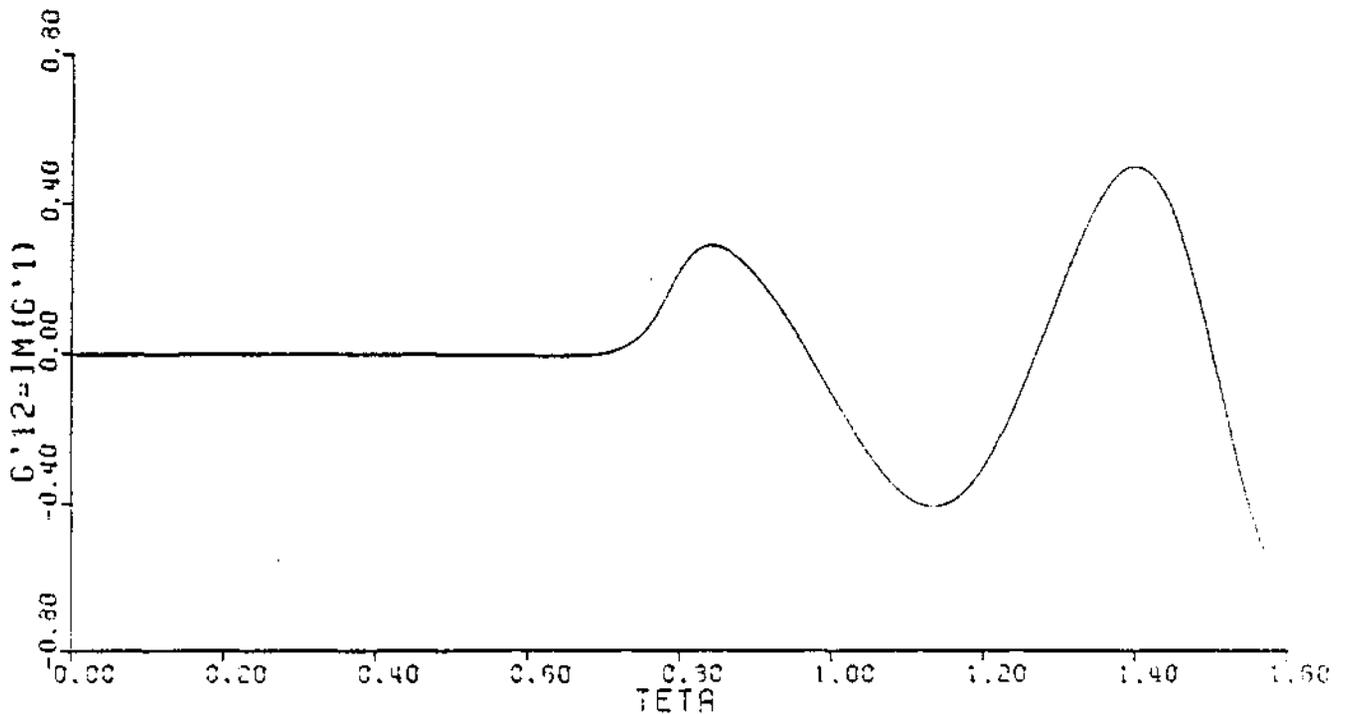
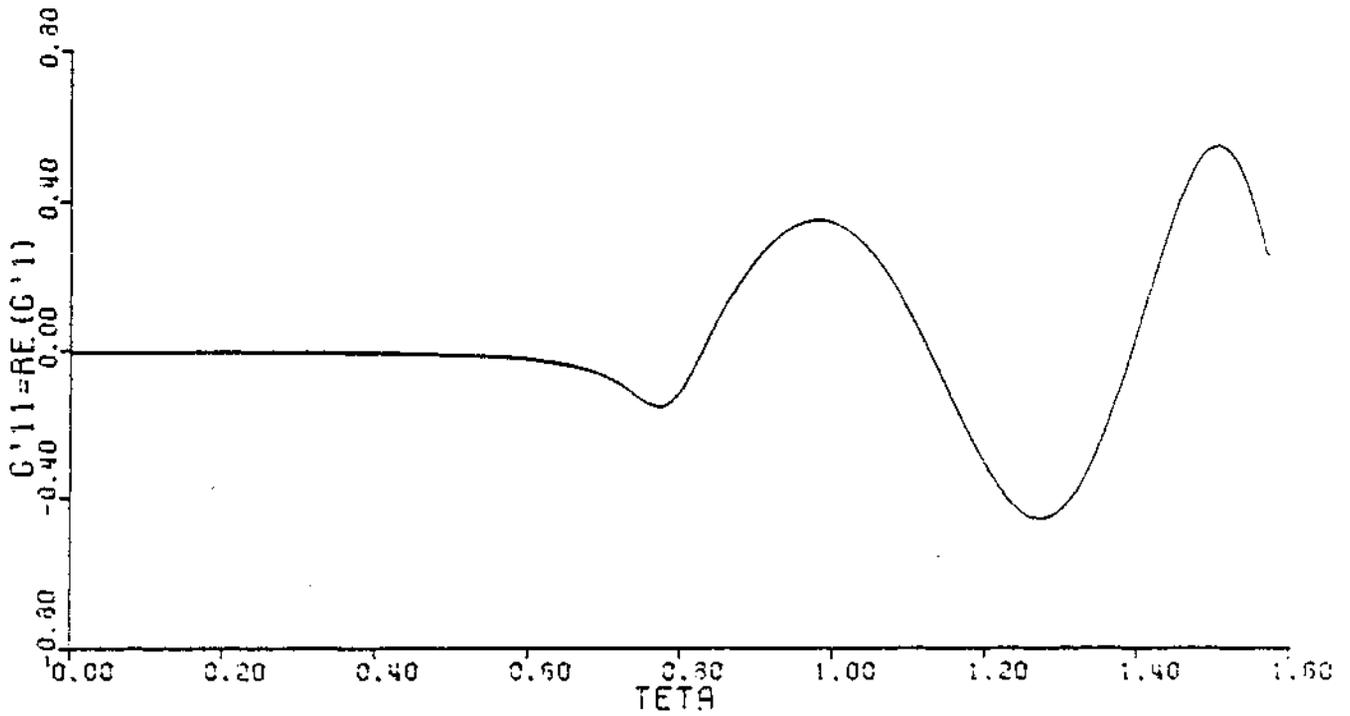


figure 10.b 1

POSITION DE LA SOURCE : $X_s = 0.$ $Y_s = 0.$ $Z_s = 0.$

POSITION DU POINT : $X_p = 1.$ $Y_p = 1.$ $Z_p = -0.02$

NOMBRE DE FROUDE : $F = 0.15$

PULSATION : $\omega = 3.00$

NOMBRE DE STROUHAL : $\nu = 0.45$

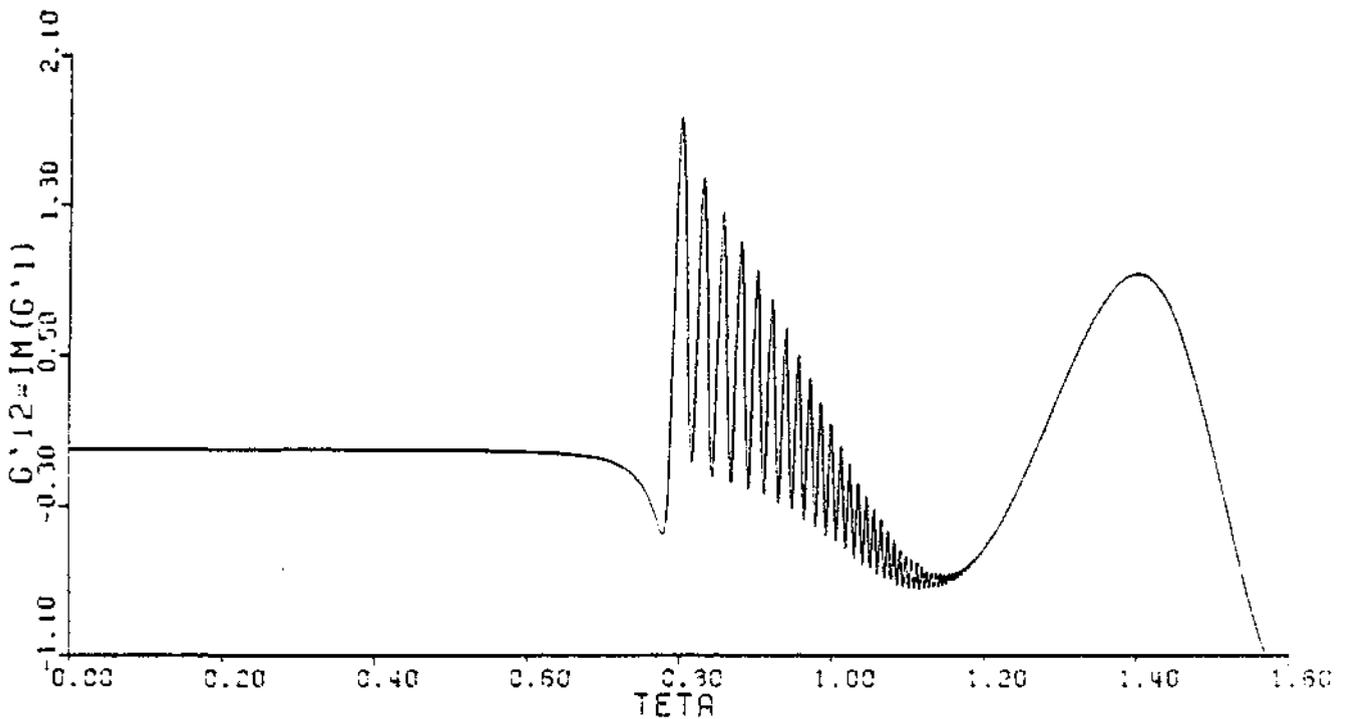
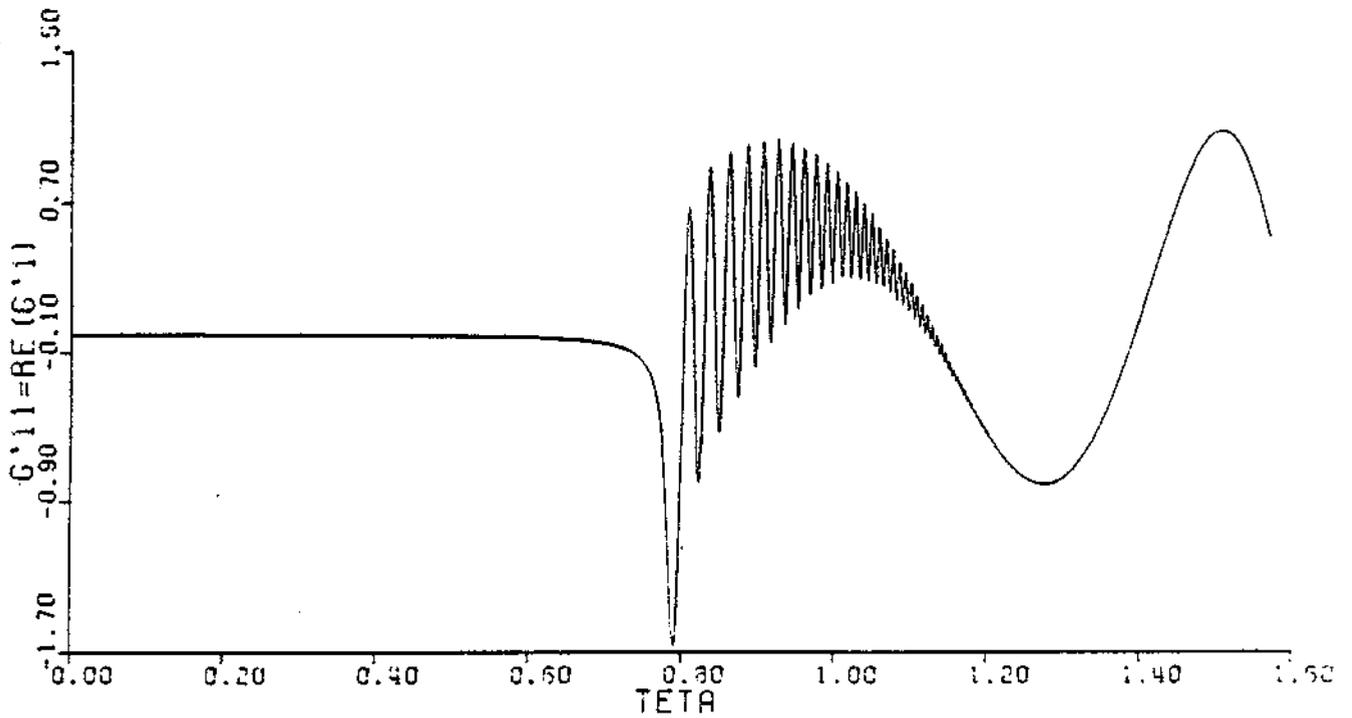


figure 10.b 2

$$(10.27) \quad \int_0^{y_0} y^n G1(y) dy \quad ; \quad \int_0^{y_0} y^n G3(y) dy$$

Il convient de noter qu'il n'est pas possible d'intégrer analytiquement un développement à l'ordre deux par rapport à la variable α . L'approximation ainsi réalisée permet de choisir ϵ égal à 0.1 puisqu'alors un rapport h/ϵ de 0.20 correspondant à 70 points d'intégration sur la somme des deux autres intervalles conduit à un majorant égal à $A \cdot 10^{-6}$ (45 points correspondent à un majorant de $A \cdot 10^{-5}$ et 27 points à un majorant de $A \cdot 10^{-4}$). Le coût de cette méthode reste élevé puisque le nombre de points d'intégration est encore très grand.

10.3.2.2 - Ablation de la singularité

La méthode que nous proposons ici est une généralisation de celle de Kantorovitch /AN-2/ applicable aux intégrales de la forme suivante :

$$(10.28) \quad \int_a^b \frac{f(x)}{(x-x_0)^\alpha} dx \quad ; \quad 0 < \alpha < 1 \quad ; \quad a < x_0 < b$$

où $f(x)$ est une fonction de classe m supérieure à l'unité, et qui repose sur un développement en série de Taylor.

Soit $\Psi(x)$ une fonction définie sur $[a,b]$, présentant les mêmes singularités que l'intégrand de (10.28) et telle que l'intégrale (10.29) puisse être calculée analytiquement.

$$(10.29) \quad \int_a^b \Psi(x) dx$$

Nous pouvons alors calculer l'intégrale (10.28) en la décomposant de la manière suivante :

$$(10.30) \quad \int_a^b \frac{f(x)}{(x-x_0)^\alpha} dx = \int_a^b \left[\frac{f(x)}{(x-x_0)^\alpha} - \Psi(x) \right] dx + \int_a^b \Psi(x) dx$$

Dans cette expression, le premier terme du membre de droite est l'intégrale d'une fonction suffisamment régulière pour qu'une méthode numérique puisse être utilisée avec succès, et le deuxième terme peut être calculé analytiquement.

Contrairement à la méthode de Kantorovitch, le choix de la fonction $\Psi(x)$ est ici entièrement libre.

Dans le cas qui nous intéresse, nous pouvons choisir pour Ψ la fonction définie par :

$$(10.31) \quad \left[\begin{array}{ll} \Psi(\theta) = 2i\pi a c^{2'} \frac{1}{\sqrt{\theta - \theta_c}} & \theta > \theta_c \\ \Psi(\theta) = -2\pi a c^{2'} \frac{1}{\sqrt{\theta_c - \theta}} & \theta < \theta_c \end{array} \right.$$

La figure 10.c.1 représente les parties réelle et imaginaire de la différence entre l'intégrand et la fonction $\Psi(\theta)$. Cette fonction est régulière, mais ses dérivées ne le sont pas puisque la dérivée d'ordre n présente une singularité de la forme $|\theta - \theta_c|^{-(2i-1)/2}$ pour i compris entre 1 et n . Le majorant de l'erreur due à la méthode de Simpson sur les intervalles $[0, \theta_c - \epsilon]$ et $[\theta_c + \epsilon, +\frac{\pi}{2}]$ s'écrit :

$$(10.32) \quad M = \frac{A}{90} h^5 \epsilon^{-7/2} = \frac{A}{90} \epsilon^{3/2} \left(\frac{h}{\epsilon}\right)^5$$

Pour ϵ égal à 0.1 et M égal à $A \cdot 10^{-6}$, nous obtenons un rapport h/ϵ de 0.51, et un minimum de 45 points à répartir sur les deux intervalles extrêmes. L'erreur numérique commise sur l'intervalle central ne peut pas être contrôlée au moyen d'un majorant.

Si nous prenons pour Ψ la fonction suivante :

$$(10.33) \quad \left[\begin{array}{ll} \Psi(\theta) = \left[\frac{a}{\sqrt{\theta - \theta_c}} + b\sqrt{\theta - \theta_c} \right] 2i\pi a c^{2'} + c \left[G3(z') + G1(z') \right] & \theta > \theta_c \\ \Psi(\theta) = \left[\frac{a}{\sqrt{\theta_c - \theta}} - b\sqrt{\theta_c - \theta} \right] 2\pi a c^{2'} + c \left[G3(z') + G1(z') \right] & \theta < \theta_c \end{array} \right.$$

POSITION DE LA SOURCE : $X_s = 0.$ $Y_s = 0.$ $Z_s = 0.$

POSITION DU POINT : $X_p = 1.$ $Y_p = 0.$ $Z_p = -0.1$

NOMBRE DE FROUDE : $F = 0.15$

PULSATION : $\tilde{\omega} = 3.00$

NOMBRE DE STROUHAL : $\nu = 0.45$

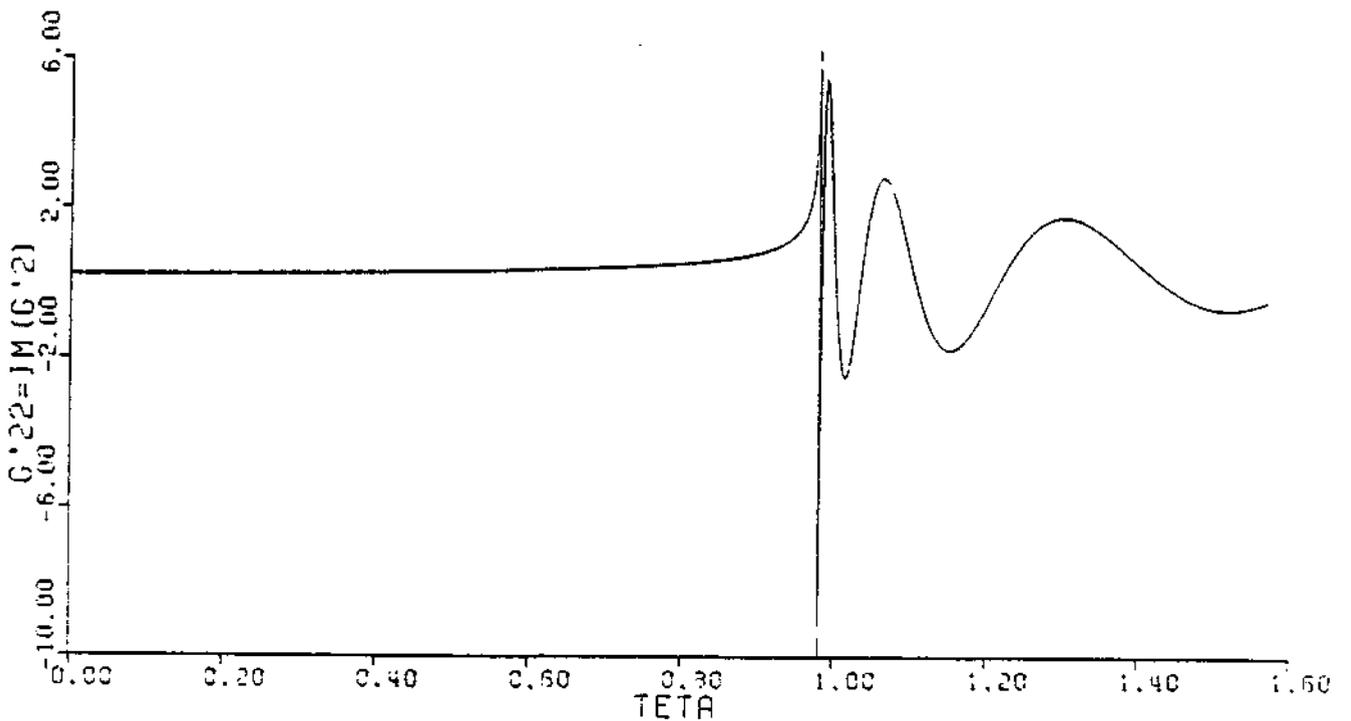
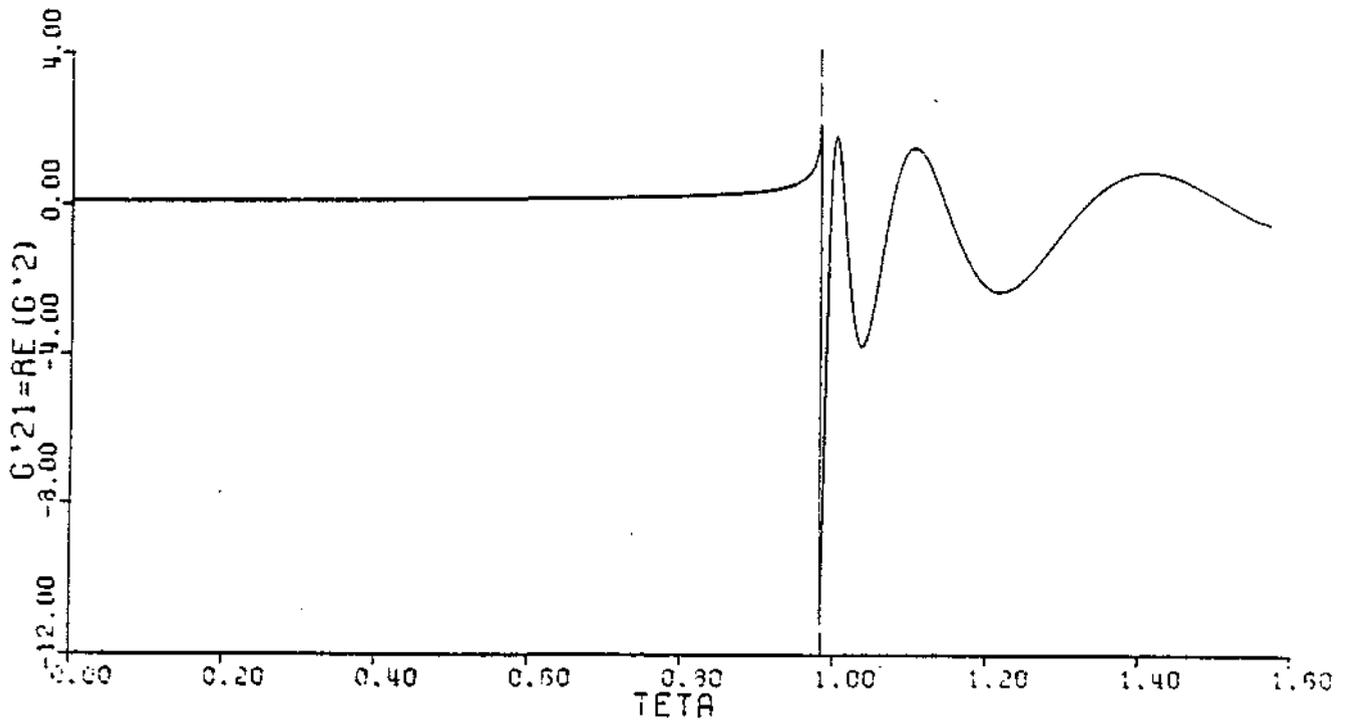


figure 10.c 1

POSITION DE LA SOURCE : $X_s = 0.$ $Y_s = 0.$ $Z_s = 0.$

POSITION DU POINT : $X_p = 1.$ $Y_p = 0.$ $Z_p = -0.1$

NOMBRE DE FROUDE : $F = 0.15$

PULSATION : $\tilde{\omega} = 3.00$

NOMBRE DE STROUHAL : $\nu = 0.45$

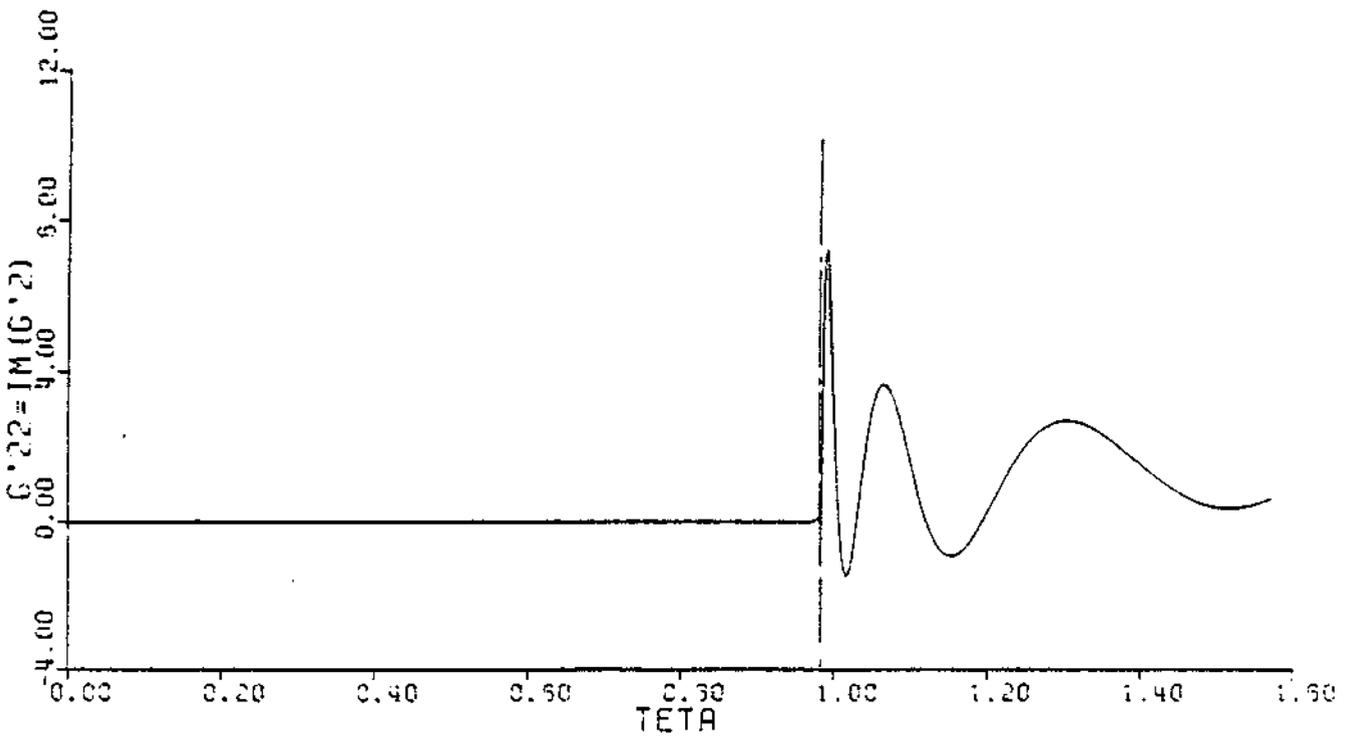
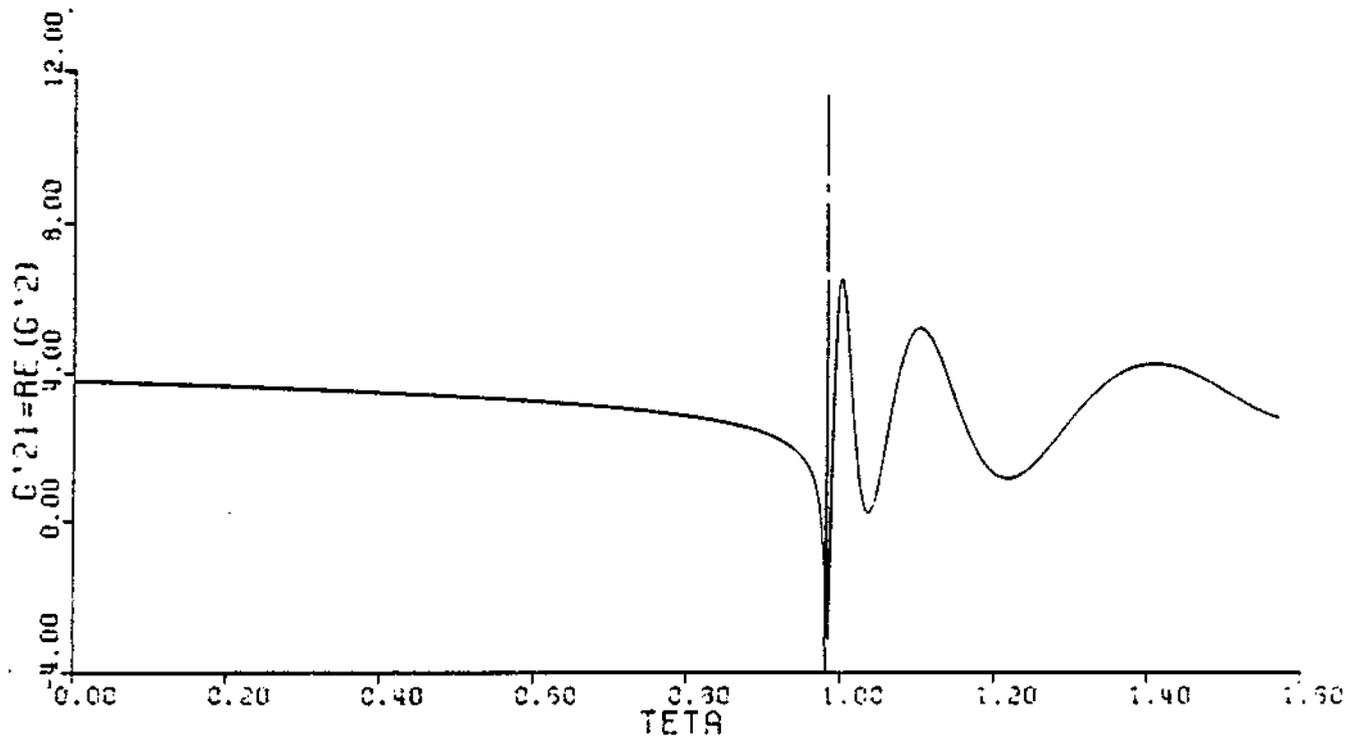


figure 10.c 2

la partie à intégrer numériquement est régulière, mais ses dérivées ne le sont pas. Néanmoins, la fonction obtenue est plus facile à intégrer numériquement.

La figure 10.d représente les erreurs relatives obtenues dans les deux cas précédents par la méthode de Simpson en fonction du nombre de points d'appui.

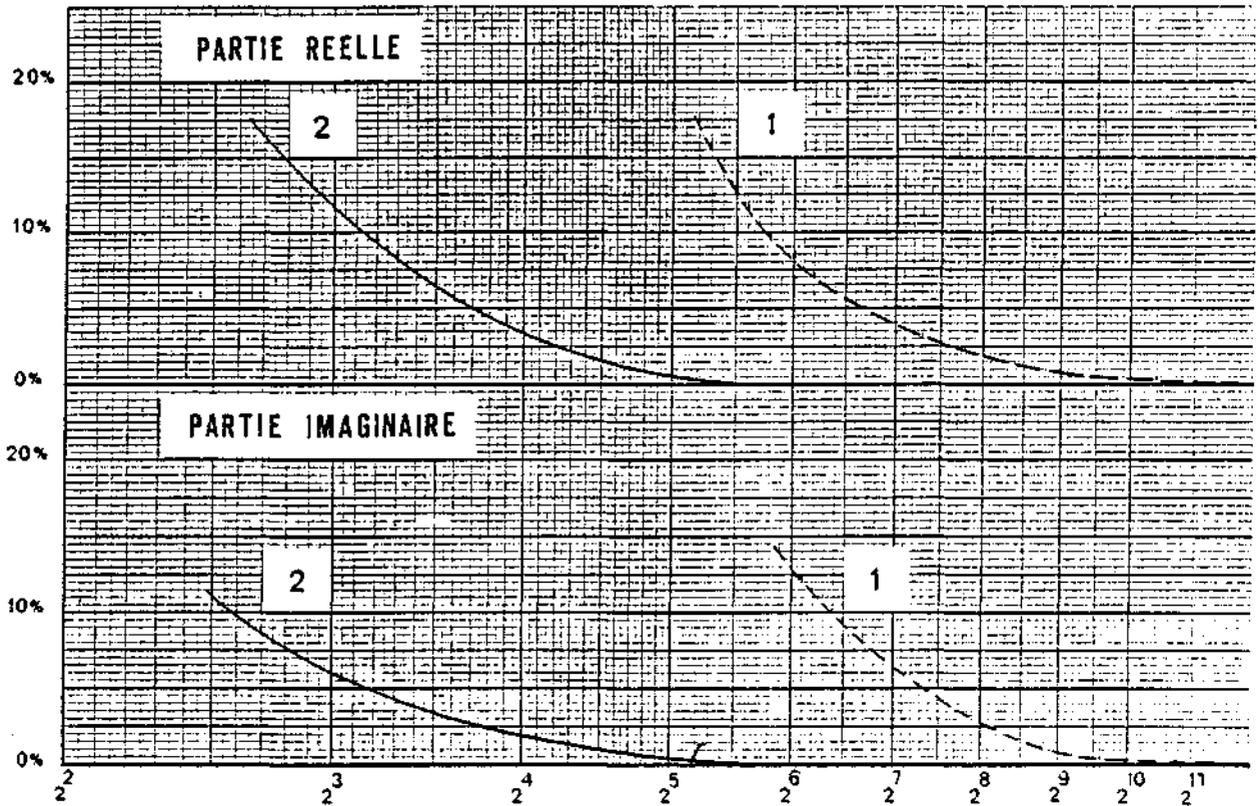


figure 10.d

10.4 - PROBLEME DE LA RESOLUTION DE L'EQUATION RELATIVE A LA DISTRIBUTION MIXTE DANS LE CAS GENERAL

Nous avons vu au quatrième chapitre que des termes contenant les dérivées suivant \vec{s} apparaissent dans l'équation de Fredholm relative à la distribution mixte lorsque la carène et la surface libre ne sont pas normales entre elles à la flottaison.

Plusieurs méthodes peuvent être envisagées pour résoudre cette équation intégrale dans le cas général ; nous les avons classées en deux groupes.

10.4.1 - Résolution au moyen d'inconnues supplémentaires

La première famille de méthodes consiste à considérer les termes $\frac{\partial \mu}{\partial s^T}$ comme des inconnues supplémentaires. Il est alors nécessaire de créer autant d'équations que nous avons ajouté d'inconnues. Pour cela, nous pouvons soit écrire la condition de glissement en de nouveaux points, soit écrire que le potentiel est nul à l'intérieur de la carène. Le choix de la côte des points de contrôle est délicat dans la mesure où il ne nous semble pas sérieux de les éloigner trop de la surface libre, et où plus ils sont proches de la surface libre plus les intégrands correspondant sont oscillants. Notons, par ailleurs, que les inconnues supplémentaires peuvent être limitées aux segments contenus dans le plan de côte nulle ou bien être étendues à toutes les facettes limitrophes de la surface libre.

Les essais numériques réalisés montrent que ces méthodes conduisent à des déterminations de $\frac{\partial \mu}{\partial s^T}$ très différentes de la variation de μ suivant \vec{s}' . Il semble donc difficile d'obtenir ainsi des résultats convenables quelles que soient les formes du corps flottant.

10.4.2 - Résolution par itérations successives

La seconde famille de méthodes consiste à résoudre l'équation intégrale complète par itérations successives. Pour cela, l'équation est résolue sans tenir compte des termes $\frac{\partial \mu}{\partial s^T}$, puis $\frac{\partial \mu}{\partial s^T}$ est calculé et reporté dans le second membre, et ainsi de suite jusqu'à ce que les diverses solutions convergent vers une valeur stable. Là encore, deux possibilités s'offrent à nous en ce qui concerne le calcul de $\frac{\partial \mu}{\partial s^T}$, à partir de μ . Nous pouvons soit calculer ce terme numériquement par "dérivation", soit le calculer à partir de l'expression intégrale de $\frac{\partial}{\partial s^T} \Phi(M;t)$, ainsi que nous l'avons fait pour obtenir $\frac{\partial}{\partial x^T} \Phi(M;t)$.

La première méthode nécessite une extrapolation de la dérivée dans la mesure où seule la connaissance de μ sur deux facettes situées l'une au dessus de l'autre permet de rechercher la valeur de $\frac{\partial \mu}{\partial s^T}$ à l'extrémité supérieure de la facette du haut ; il en résulte que la connaissance de $\frac{\partial \mu}{\partial s^T}$ n'est qu'approximative.

Le second procédé ne peut être mis en oeuvre par de nouveaux coefficients d'influence pour des points de contrôle situés très près de la surface libre, ce qui conduit à intégrer numériquement des fonctions très oscillantes.

L'étude analytique de la convergence d'un tel système itératif ne peut guère être poussée très loin puisque les différents opérateurs linéaires utilisés sont constitués de coefficients d'influence qui ne possèdent pas a priori de propriétés permettant de conclure. Dans ces conditions, la convergence ne peut qu'être testée numériquement en calculant par exemple la norme de l'opérateur résultant et en s'assurant qu'elle est inférieure à l'unité.

Il semble difficile d'obtenir ainsi de bons résultats puisque nous savons que l'intégrale de ligne représente une infinitude, et qu'en négliger certains termes peut entraîner des instabilités numériques ; ce que nous avons du reste observé lors de tests sur une carène de la série soixante.

10.5 - FREQUENCES IRREGULIERES

Les premiers tests numériques ont permis de mettre en évidence l'existence de fréquences irrégulières dans le cas de la distribution mixte de Green, mais pas dans celui de la distribution de sources, ainsi que le montre la figure 10.e relative au mouvement de la barge D.N.V. (discrétisée en dix facettes) pour un nombre de Froude de 0.15.

Il n'est malheureusement pas possible de déterminer à l'avance ces fréquences irrégulières, même pour des corps de géométrie simple, dans la mesure où il n'existe pas (contrairement au problème à nombre de Froude nul) de solution à variables séparées.

Par ailleurs, il convient de noter que le programme utilisant la distribution de sources peut admettre des fréquences irrégulières différentes de celles correspondant à la distribution mixte de Green puisque dans le cas d'une vitesse de route non nulle, les deux équations intégrales relatives à chacune de ces méthodes ne sont plus adjointes.

Pour éliminer les fréquences irrégulières du programme de calcul fondé sur la distribution mixte, nous avons ajouté des équations supplémentaires qui imposent au potentiel d'être nul en un ou plusieurs points à l'intérieur du flotteur.

▲ Sources

- 204 -

● Sources et Doublets 1

○ Sources et Doublets 2

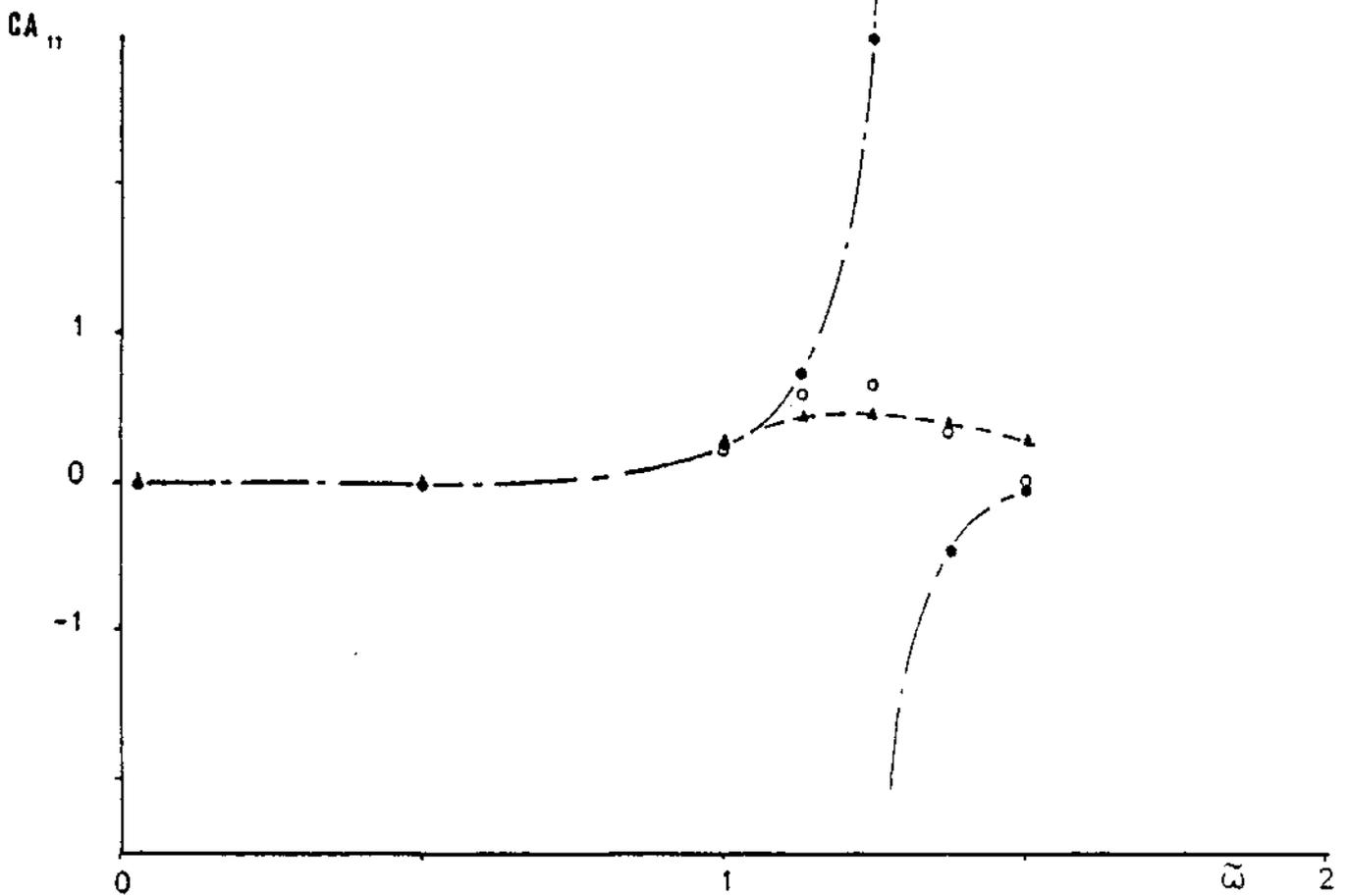
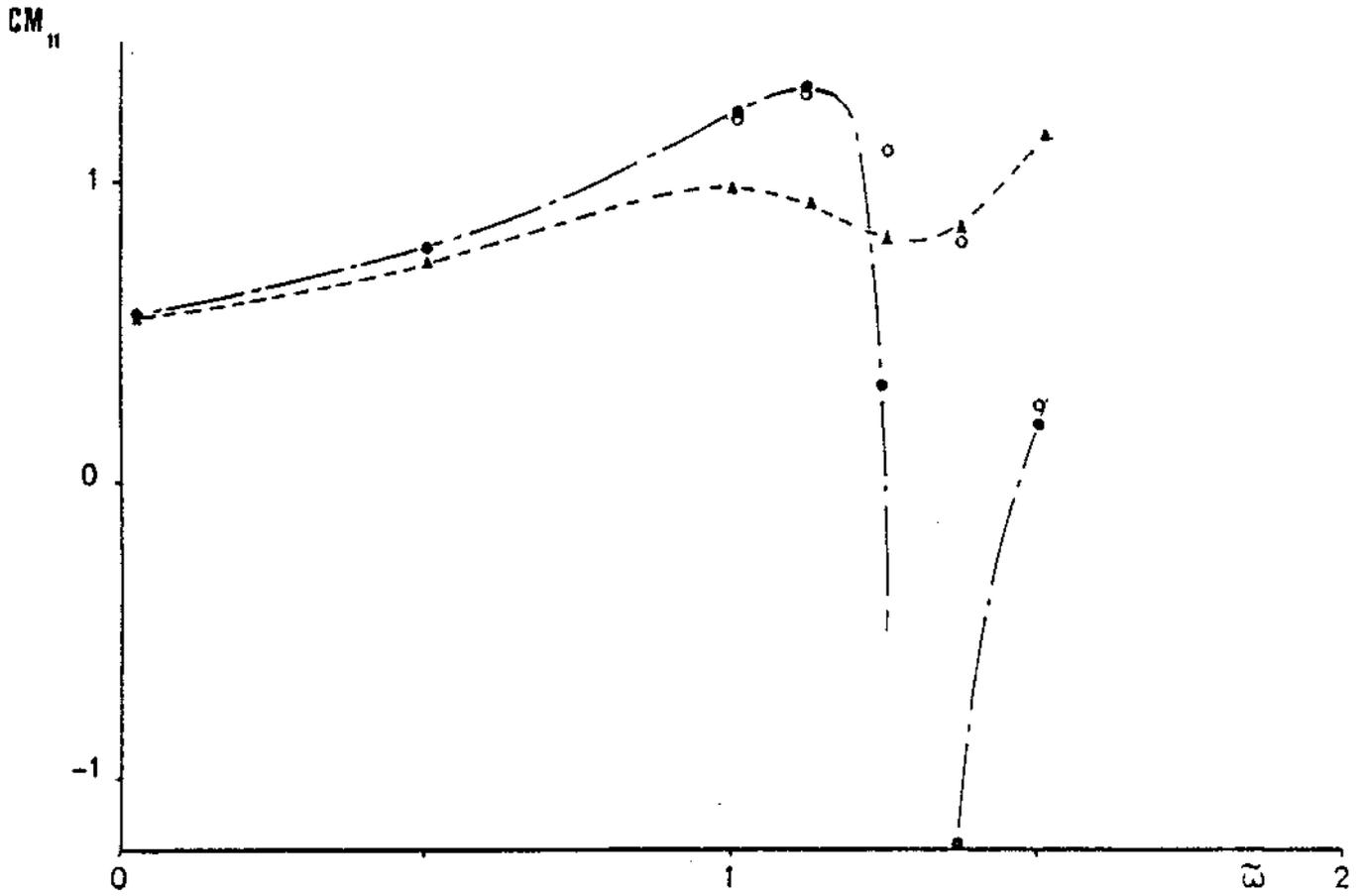


figure 10. e

10.6 - PRESENTATION DES PROGRAMMES DE CALCUL

Chaque programme de calcul (avec et sans fond) se compose d'un train de programmes élémentaires qui communiquent entre eux par l'intermédiaire de fichiers sur disques. Ce procédé permet de n'occuper qu'un minimum de place mémoire pendant la plus grande partie du temps de calcul et de n'occuper une place mémoire importante que pour le minimum de temps.

Nous avons conservé les programmes de calcul des éléments des facettes et des parties des coefficients d'influence dépendant de $\frac{1}{|MM'|}$ qui existaient dans les trains de programmes antérieurs concernant les problèmes de la diffraction-radiation et de Neumann-Kelvin, en ne leur apportant que les modifications nécessaires pour traiter notre problème.

Chaque train de programme est doté d'une option permettant de traiter la carène complète si elle est dissymétrique ou simplement une moitié si elle présente une symétrie suivant le plan $O_1x_1z_1$. Le cas de deux symétries n'a pas été envisagé puisque l'écoulement ne peut présenter qu'une symétrie au plus en raison de la vitesse d'avance.

Le balayage pour un nombre de Froude donné se fait en fonction de la fréquence apparente $\tilde{\omega}$, puis les couples $(\tilde{\sigma}, \beta)$ correspondants sont calculés pour des angles β variant avec un pas multiple de 15° depuis 0° jusqu'à 180° ou 360° .

Les sorties des programmes sont adaptées aux entrées d'un programme de calcul des éléments statistiques.

La durée de traitement nécessaire pour effectuer un balayage en incidence relatif à un nombre de Froude et une fréquence en profondeur illimitée est quatre fois supérieur à celui correspondant au programme de calcul dans le cas du point fixe, toutes choses égales par ailleurs. Lorsque la profondeur est finie, ce rapport est égal à seize.

10.7 - INFLUENCE DE LA DISCRETISATION

L'étude de l'influence de la discrétisation sur les résultats est nécessaire pour prévoir le nombre de facettes optimal pour un corps donné. Naturellement, une bonne connaissance de cette influence ne pourra être acquise qu'après de nombreux tests sur différentes carènes. Une première approche de ce problème a cependant pu être effectuée sur la barge du D.N.V. en utilisant

Ainsi que l'a montré J.M. KOBUS dans sa thèse /HY-23/, cette méthode n'élimine pas toutes les fréquences irrégulières, mais seulement celles qui correspondent à un potentiel non nul en ces points qui doivent donc être choisis judicieusement pour que les fréquences irrégulières compatibles avec les équations supplémentaires soient en dehors du domaine d'utilisation du programme de calcul. Le système d'équations ainsi obtenu est rectangulaire puisque nous avons plus d'équations que d'inconnues. Il n'est cependant pas nécessaire de créer de nouvelles inconnues, puisque la méthode de résolution de Householder permet de déterminer la solution d'un tel système. Nous avons porté sur la figure 10.e les résultats du programme 2 ainsi obtenu.

Quant au programme utilisant la distribution de sources, la figure 10.f représente l'évolution du déterminant au voisinage de la fréquence irrégulière précédemment étudiée.

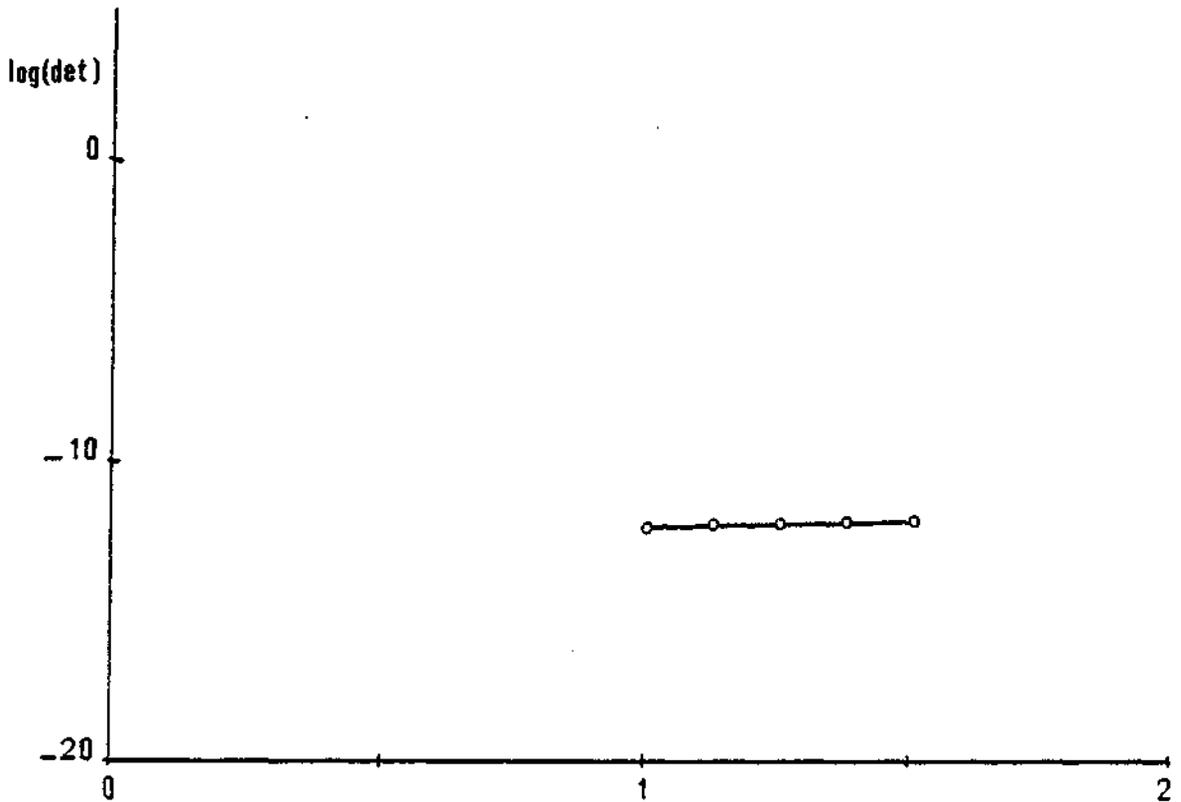


figure 10.f

deux discrétisations pour certains points (dix et vingt quatre facettes sur la demi barge). Les résultats obtenus permettent de faire les remarques suivantes.

Les résultats obtenus avec un très petit nombre de facettes par les deux méthodes présentent un accord convenable dans l'ensemble, sauf pour le cavalement.

Les résultats obtenus avec la deuxième discrétisation sont relativement peu meilleurs que les résultats précédents, ceci même au voisinage du nombre de Strouhal v_c , zone dans laquelle le nombre de points d'intégration a une grande influence.

Il semble donc raisonnable de ne pas trop affiner la discrétisation des carènes à étudier, et d'effectuer les découpages en facettes suivant des critères analogues à ceux utilisés dans le cas d'un nombre de Froude nul.



Chapitre 11

RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Nous avons réalisé quatre programmes de calcul à partir des méthodes que nous venons d'exposer. Les deux premiers sont relatifs à la profondeur illimitée et les deux autres à une profondeur finie. Dans chacun des deux cas, l'un d'entre eux met en oeuvre une distribution superficielle de sources et l'autre une distribution mixte de Green (sources et doublets normaux). Nous avons rassemblé dans ce chapitre les résultats numériques que nous avons obtenus pour deux flotteurs.

11.1 - CHOIX DES TESTS

Afin de tester la validité de nos programmes de calcul, nous avons retenu deux flotteurs pour lesquels nous possédons des résultats numériques et expérimentaux dans différentes conditions.

11.1.1 - Barge du D.N.V.

La barge du D.N.V. est un corps géométrique simple puisque sa carène est un parallélépipède rectangle (longueur : 90 m, largeur : 90 m, tirant d'eau : 40 m).

Ce flotteur a servi à l'Association de Recherches Actions des Eléments /HY-38/ pour comparer les performances des différents programmes de calcul de diffraction-radiation au point fixe en profondeur illimitée.

Par ailleurs, des résultats numériques concernant le cas de la profondeur finie sans vitesses d'avance sont donnés par A. CLEMENT /HY-9/.

Nous avons donc choisi cette barge pour juger de l'accord qui existe entre les deux distributions de singularités, ainsi que du comportement

de nos programmes dans les cas limites.

11.1.2 - Séries 60 - Coefficient de Bloc 0.70

La carène de coefficient de Bloc 0.70 issue des Séries 60 de F.H. TODD /HY-34/ a servi de modèle expérimental à J.H. VUGTS /HY-35/ et de modèle numérique à M.S. CHANG /HY-8/ dans le cas où la profondeur est illimitée pour un nombre de Froude égal à 0.20.

Nous avons choisi cette carène pour tester le programme de calcul fondé sur la distribution de sources lorsque la profondeur est infinie et comparer les résultats ainsi obtenus à ceux des deux auteurs précédents.

11.2 - RESULTATS CONCERNANT LA BARGE DU D.N.V.

Dans le cas où la profondeur est illimitée, nous avons réalisé deux balayages en fonction de la pulsation de rencontre $\tilde{\omega}$.

Le premier concerne un nombre de Froude très petit ($F = 0.01$). Il montre que les deux distributions donnent les mêmes résultats que le programme de diffraction-radiation au point fixe fondé sur la méthode des singularités (distribution mixte) pour le même nombre de facettes (10 sur la moitié de la carène).

Le second a été réalisé pour un nombre de Froude égal à 0.15. Les figures 11.a et 11.b montrent respectivement les résultats relatifs aux coefficients de masses d'eau ajoutée et aux coefficients d'amortissement (compte non tenu des corrections de la première annexe). Ces résultats montrent qu'il existe dans l'ensemble un accord convenable entre les deux méthodes, et que les différences les plus importantes concernent les modes qui induisent des vitesses normales suivant l'axe Ox (cavalement, tangage et lacet). Notons également qu'au voisinage du nombre de Strouhal ν_c ($\omega = 1.67$), il existe une certaine dispersion entre les deux méthodes ($\nu = 0.24$ et $\nu = 0.26$) qui s'explique partiellement par un nombre insuffisant de points d'intégration en fonction de θ et de facettes.

Il convient de noter que les formes de cette barge sont particulièrement massives et donc pénalisantes. De plus, les résultats concernant les mouvements sont toujours meilleurs que ceux relatifs aux coefficients hydrodynamiques.

Barge du D.N.V. (10 facettes sur la demi-carène). Profondeur infinie.

Nombre de Froude : $F = 0.15$

Longueur : $L = 90.00$ m

● Distribution mixte

○ Distribution de sources

$$CM_{ii} = \frac{MA_{ii}}{\rho V} \quad i \in 1,3$$

$$CM_{ii} = \frac{MA_{ii}}{\rho V L^2} \quad i \in 4,6$$

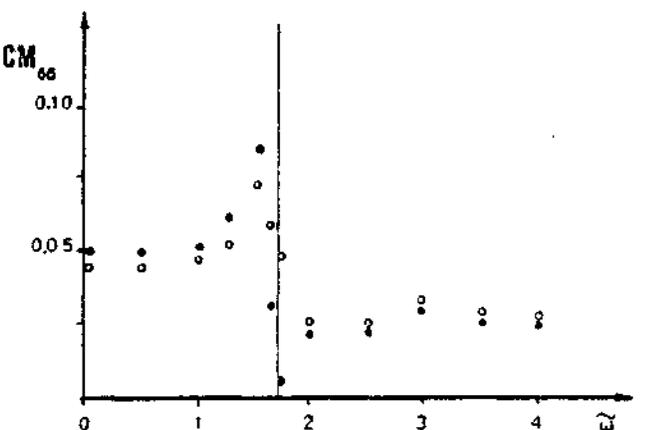
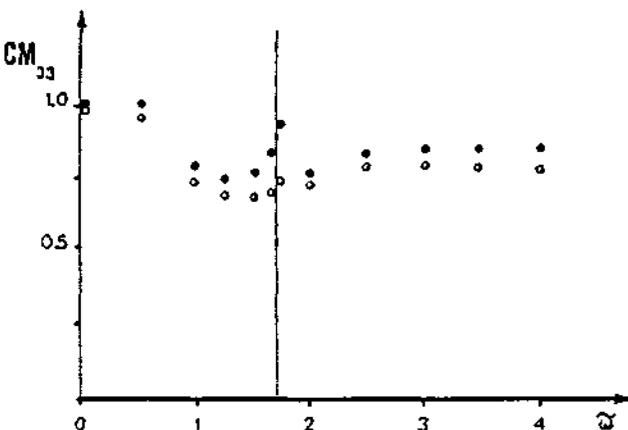
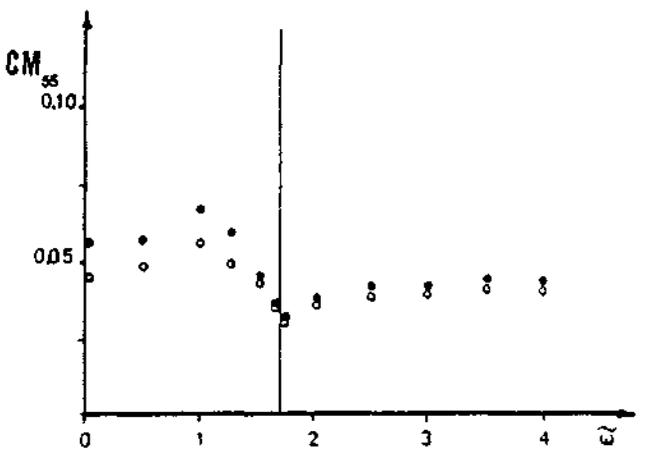
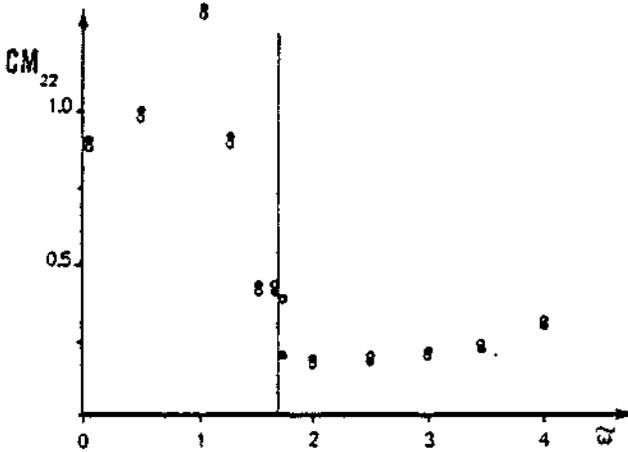
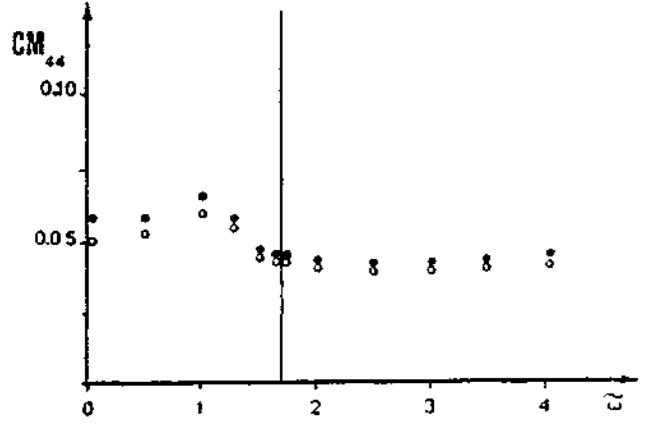
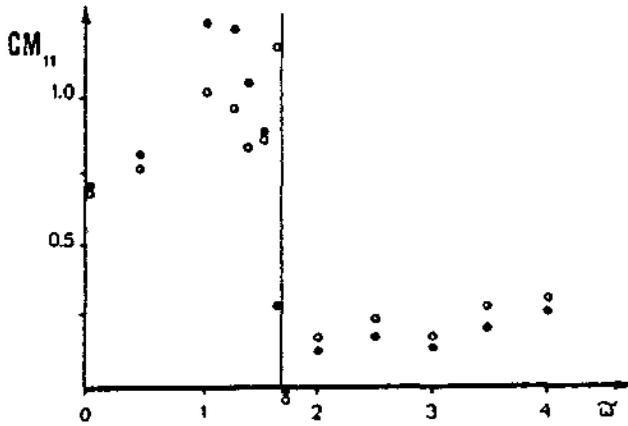


figure 11.a

Barge du D.N.V. (10 facettes sur la demi-carène). Profondeur infinie.

Nombre de Froude : $F = 0.15$

Longueur : $L = 90.00$ m

● Distribution mixte

○ Distribution de sources

$$CA_{ii} = \frac{TA_{ii}}{\rho \bar{v} w} \quad i \in 1,3$$

$$CA_{ii} = \frac{TA_{ii}}{\rho \bar{v} L^2 w} \quad i \in 4,6$$

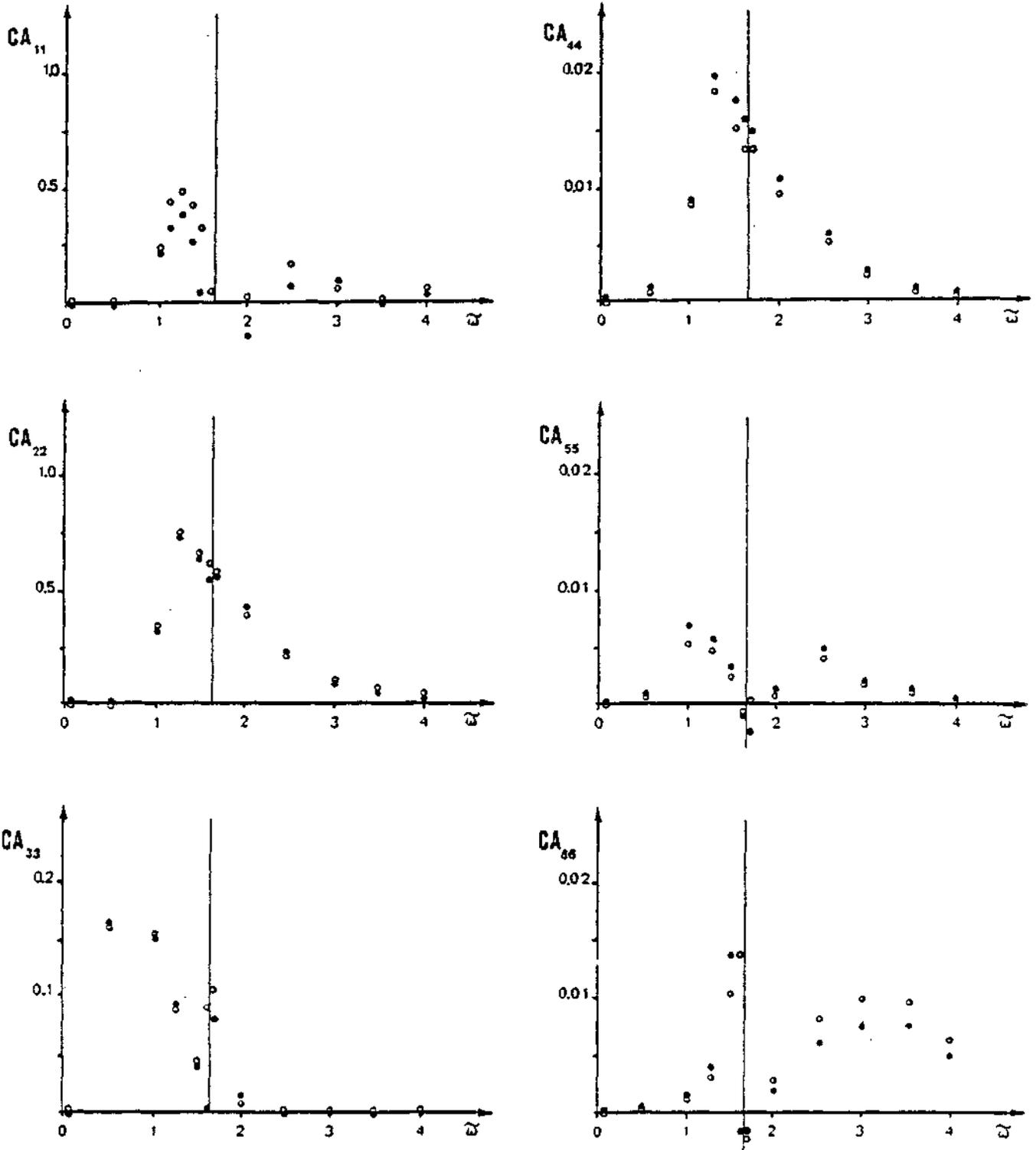


figure 11. b

Dans le cas où la profondeur est finie, nous avons effectué deux types de tests ne concernant chacun que quelques points.

Le premier est relatif à une très grande profondeur (dix fois la longueur du flotteur) pour un nombre de Froude égal à 0.15. Nous avons alors retrouvé les résultats déjà obtenus dans le cas de la profondeur illimitée.

Le deuxième concerne une profondeur faible (une fois et demi le tirant d'eau) et un nombre de Froude très petit ($F = 0.01$). Nous avons alors retrouvé les résultats déjà obtenus dans le cas d'un nombre de Froude nul par A. CLEMENT /HY-9/.

11.3 - RESULTATS CONCERNANT LA CARENE C_B 0.70 DES SERIES 60

Dans le cas où la profondeur est illimitée, nous avons effectué un balayage en fonction de $\tilde{\omega}$ pour un nombre de Froude égal à 0.20. Pour cela, nous avons discrétisé la demi-carène en 27 facettes.

Seul le programme du calcul fondé sur la distribution superficielle de sources a été testé dans la mesure où la carène ne coupe pas perpendiculairement la surface libre en tout point de la flottaison.

Nous n'avons pas fait de calcul dans le cas où la profondeur est finie en raison des coûts élevés d'une part, et du manque de résultats expérimentaux d'autre part.

Nous avons rassemblé sur les figures suivantes nos résultats, ainsi que ceux obtenus expérimentalement par J.H. VUGTS et ceux obtenus numériquement par M.S. CHANG. Nous ne disposons malheureusement que de courbes concernant neuf coefficients hydrodynamiques.

Ces comparaisons montrent que notre programme de calcul donne dans l'ensemble d'excellents résultats avec un petit nombre de facettes (27 sur la demi-carène). Il serait cependant souhaitable de pouvoir ultérieurement tester d'autres discrétisations, et d'effectuer des comparaisons plus détaillées au voisinage du nombre de Strouhal critique.

Séries 60 C_B 0.70 (27 facettes sur la demi-carène). Profondeur infinie.

Nombre de Froude : $F = 0.20$

Longueur : $L = 121.92$ m

$$CM_{ii} = \frac{MA_{ii}}{\rho V} \quad i \in 1,3$$

● résultats de J.H.VUGTS (modèle complet)

○ résultats de J.H.VUGTS (somme des sections)

$$CM_{ii} = \frac{MA_{ii}}{\rho V L^2} \quad i \in 4,6$$

c résultats de M.S.CHANG

x résultats des présents calculs

— Méthode des tranches

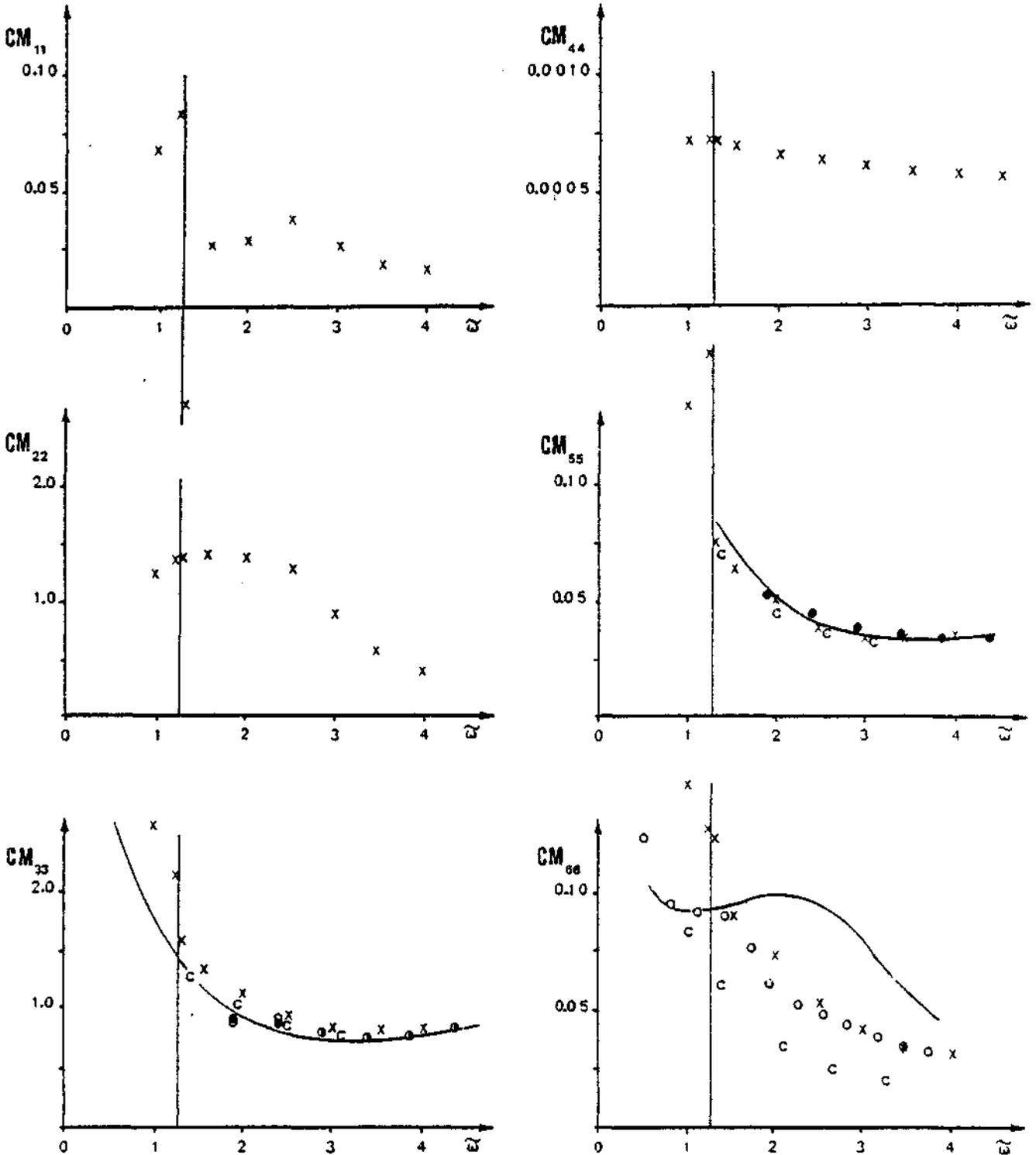


figure 11.c

Séries 60 C_p 0.70 (27 facettes sur la demi-carène). Profondeur infinie.

Nombre de Froude : $F = 0.20$

Longueur : $L = 121.92$ m

● résultats de J.H.VUGTS (modèle complet)

○ résultats de J.H.VUGTS (somme des sections)

c résultats de M.S.CHANG

x résultats des présents calculs

$$CA_{ii} = \frac{TA_{ii}}{\rho V \sqrt{g/L}} \quad i \in 1,3$$

$$CA_{ii} = \frac{TA_{ii}}{\rho V L^2 \sqrt{g/L}} \quad i \in 4,6$$

— Méthode des tranches

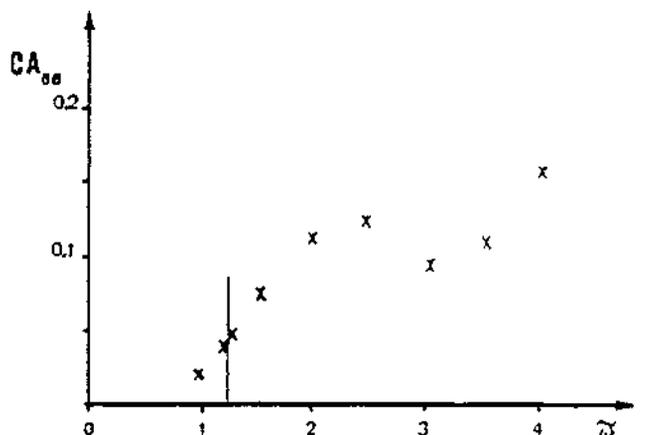
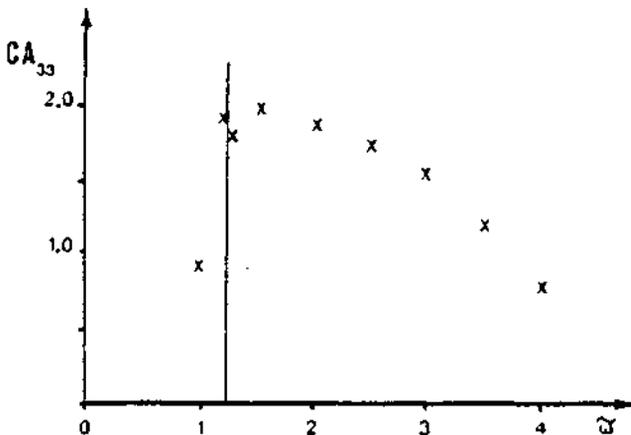
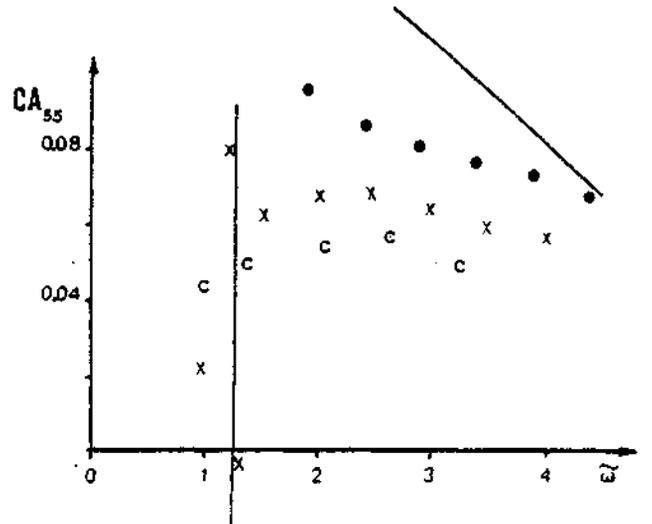
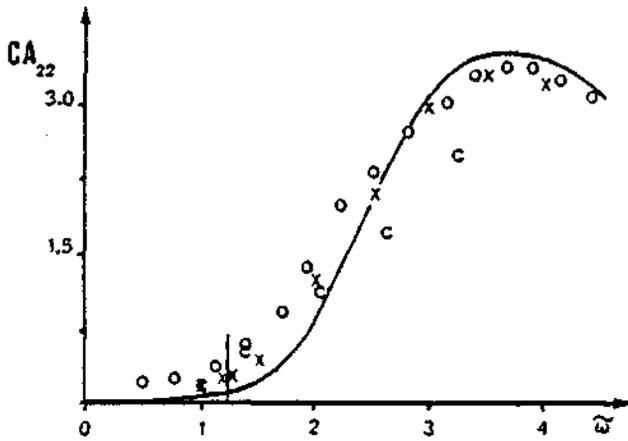
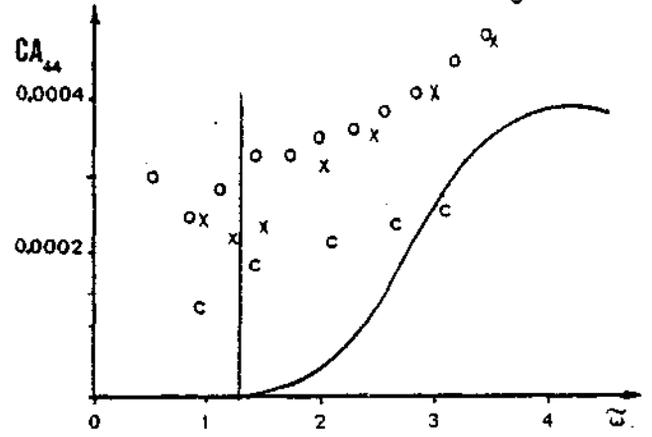
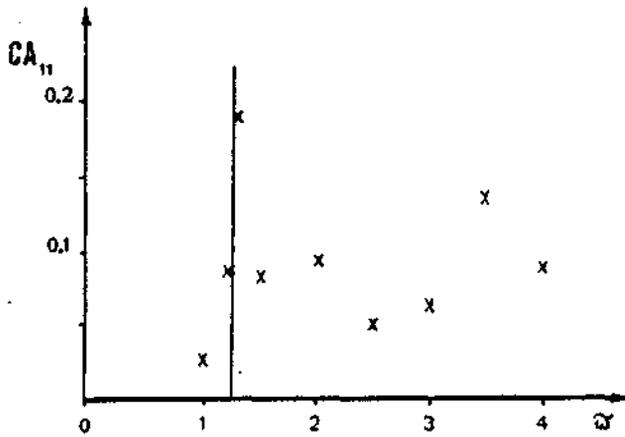


figure 11.d

Séries 60 C_p 0.70 (27 facettes sur la demi-carène). Profondeur infinie.

Nombre de Froude : $F = 0.20$

Longueur : $L = 121.92$ m

● résultats de J.H.VUGTS (modèle complet)

○ résultats de J.H.VUGTS (somme des sections)

c résultats de M.S.CHANG

x résultats des présents calculs

$$CM_{ij} = \frac{MA_{ij}}{\rho VL}$$

$$CA_{ij} = \frac{TA_{ij}}{\rho VL/g/L}$$

— Méthode des tranches

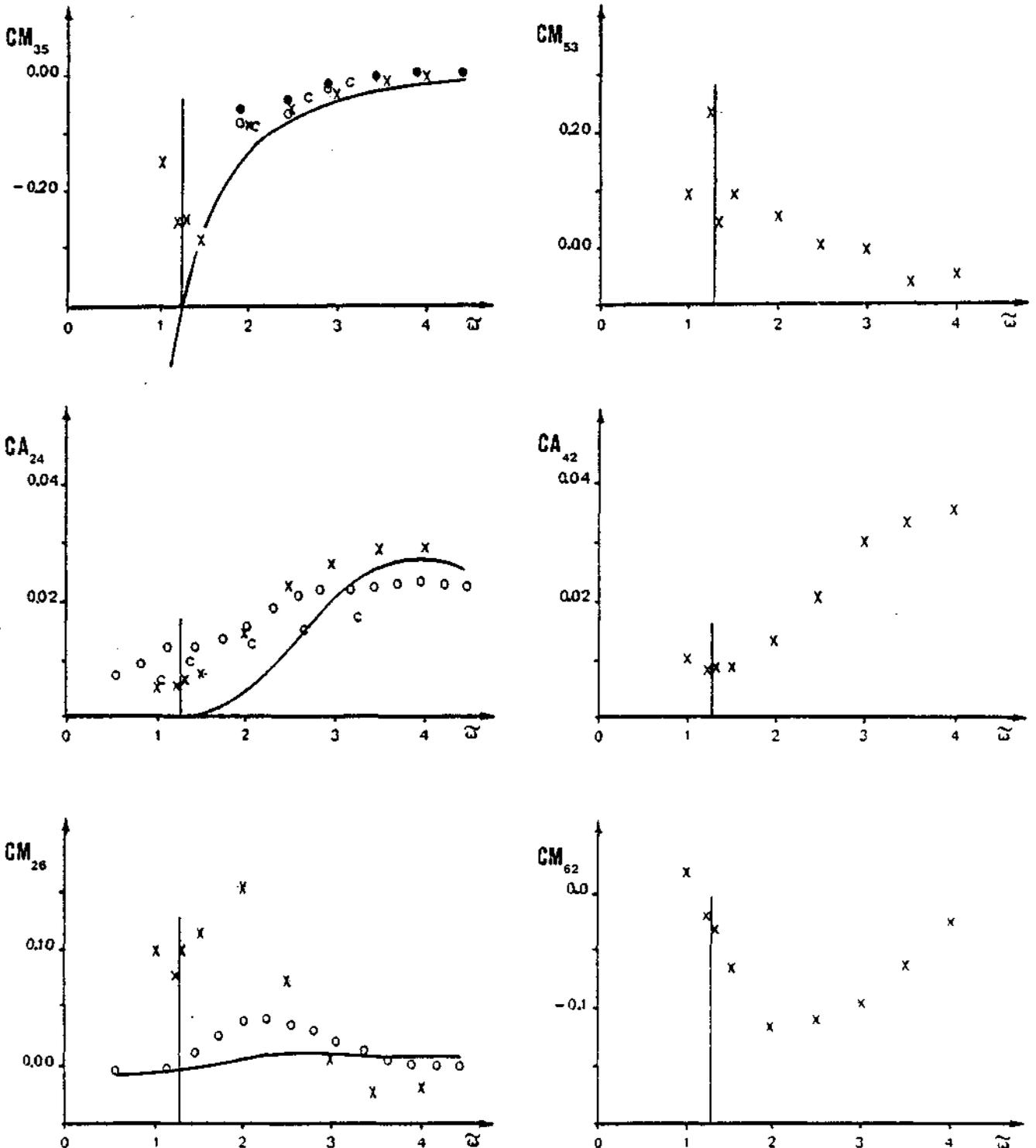


figure 11.e

11.4 - CONCLUSION

Les différents tests que nous avons réalisés mettent en évidence un accord convenable entre les résultats obtenus au moyen des deux distributions, ainsi que la validité des résultats du programme de calcul fondé sur la distribution de sources par comparaison avec les points expérimentaux de J.H. VUGTS.

D'autres tests devront être effectués pour délimiter complètement le domaine de validité des programmes de calcul, en particulier, dans le cas de grands nombres de Froude et lorsque la profondeur est faible.



CONCLUSION

L'étude que nous venons d'exposer dans ce mémoire nous a permis de contribuer à l'acquisition d'une meilleure connaissance du phénomène de la diffraction-radiation avec vitesse d'avance et de sa modélisation numérique.

Bien que nous n'ayons pas tenté de formuler le problème linéarisé en termes d'analyse fonctionnelle et que nous ne puissions donc pas avoir d'idée rigoureuse au sujet de l'existence d'une solution et de son unicité, la qualité des résultats numériques obtenus dans des conditions défavorables (faible nombre de facettes, peu de points d'intégration, flotteurs massifs...) laisse supposer que ce dernier est bien posé. Il est évident qu'un long travail sera nécessaire pour régler définitivement cette question.

Par ailleurs, certains points tels que l'influence de la discrétisation sur les résultats et plus particulièrement sur le cavement (maillages plus fins, facettes plus petites au voisinage de la surface libre), l'extension du programme de calcul fondé sur la distribution mixte de Green pour les carènes quelconques, la suppression d'éventuelles fréquences irrégulières pour le programme de calcul fondé sur la distribution de sources, méritent d'être analysés de manière encore plus approfondie, afin de recevoir des solutions satisfaisantes.

L'inexistence de résultats expérimentaux et numériques a rendu impossible le test des programmes relatifs au cas d'une profondeur limitée pour des nombres de Froude usuels en eau peu profonde. Cependant, nous espérons pouvoir confronter prochainement des résultats numériques et expérimentaux puisque des essais sont prévus pour l'année à venir au Bassin d'Essais des Carènes de Paris.

Néanmoins, l'aboutissement le plus concret de ce travail est la mise au point de programmes de calcul d'ores et déjà opérationnels et utilisables à des fins industrielles qui constituent, par ailleurs, un point de départ pour des recherches concernant des sujets tels que la résistance ajoutée ou l'hydroélasticité.



Annexe 1

COUPLAGE ENTRE LA VITESSE D'AVANCE ET LES OSCILLATIONS

A1.1 - CORRECTION DE LA CONDITION DE GLISSEMENT

La condition de glissement relative au potentiel de perturbation $\phi_p(M;t)$ s'écrit sous la forme générale suivante (formule (2.25)) :

$$(A1.1) \quad \frac{\partial}{\partial n} \phi_p(M;t) = \vec{U} \cdot \vec{n} - \frac{\partial}{\partial n} \phi_I(M;t) + [\vec{W} + \vec{\Omega}_\Lambda \vec{O}_\Lambda M] \cdot \vec{n}$$

En vertu de l'hypothèse de linéarité, elle est appliquée sur la position moyenne de la carène. Si nous tenons compte de la rotation de la normale au solide, celle-ci s'écrit :

$$(A1.2) \quad \vec{n} = \vec{n}_0 + \check{\theta}_\Lambda \vec{n}_0$$

où \vec{n}_0 est le vecteur normal moyen. Dès lors, la condition de glissement devient :

$$(A1.3) \quad \left[\begin{aligned} \text{Grad} \phi_p(M;t) \cdot (\vec{n}_0 + \check{\theta}_\Lambda \vec{n}_0) &= \vec{U} \cdot (\vec{n}_0 + \check{\theta}_\Lambda \vec{n}_0) - \text{Grad} \phi_I(M;t) \cdot (\vec{n}_0 + \check{\theta}_\Lambda \vec{n}_0) \\ &+ [\vec{W} + \vec{\Omega}_\Lambda \vec{O}_\Lambda M] \cdot (\vec{n}_0 + \check{\theta}_\Lambda \vec{n}_0) \end{aligned} \right.$$

Puisque nous avons supposé que l'amplitude de la houle et l'amplitude des oscillations du solide sont faibles, les termes $\text{Grad} \phi_p(M;t)$, $\text{Grad} \phi_I(M;t)$, \vec{W} , $\vec{\Omega}$ et $\check{\theta}$ sont petits. En négligeant les produits de deux quelconques de ces grandeurs, nous obtenons au deuxième ordre près :

$$(A1.4) \quad \frac{\partial}{\partial n_0} \phi_p(M;t) = \vec{U} \cdot \vec{n}_0 + \vec{U} \cdot (\check{\theta}_\Lambda \vec{n}_0) - \frac{\partial}{\partial n_0} \phi_I(M;t) + [\vec{W} + \vec{\Omega}_\Lambda \vec{O}_\Lambda M] \cdot \vec{n}_0$$

Nous voyons donc apparaître ici le terme correctif $\vec{U} \cdot (\vec{\theta} \wedge \vec{n}_0)$ qui est égal à $(\vec{U} \wedge \vec{\theta}) \cdot \vec{n}_0$. Or :

$$(A1.5) \quad \vec{U} \wedge \vec{\theta} = U (\vec{i}_{x1} \wedge \vec{\theta}) = U (-\theta_{z1} \vec{i}_{y1} + \theta_{y1} \vec{i}_{z1})$$

La condition de glissement s'écrit alors :

$$(A1.6) \quad \frac{\partial}{\partial n_0} \phi_p(M;t) = \vec{U} \cdot \vec{n}_0 - \frac{\partial}{\partial n_0} \phi_z(M;t) + [\vec{W}' + \vec{\Omega}' \wedge \vec{O}_0 M] \cdot \vec{n}_0$$

Expression dans laquelle le vecteur \vec{W}' est défini par les relations suivantes :

$$(A1.7) \quad \left[\begin{array}{l} W'_{x1} = W_{x1} \\ W'_{y1} = W_{y1} - U \theta_{z1} \\ W'_{z1} = W_{z1} + U \theta_{y1} \end{array} \right.$$

Il est clair que cette correction qui n'affecte que les termes de radiation ne modifie pas les problèmes élémentaires, et se traduit uniquement par des modifications au sein de l'équation de Newton.

A1.2 - CORRECTION DE L'EQUATION DE NEWTON

En utilisant les notations généralisées définies au paragraphe (3.10), nous pouvons écrire :

$$(A1.8) \quad \left[\begin{array}{l} W'_{y1} = (\omega \dot{\chi}_2^{**} - U \dot{\chi}_6^*) \cos \omega t - (\omega \dot{\chi}_2^* + U \dot{\chi}_6^{**}) \sin \omega t \\ W'_{z1} = (\omega \dot{\chi}_3^{**} + U \dot{\chi}_5^*) \cos \omega t - (\omega \dot{\chi}_3^* - U \dot{\chi}_5^{**}) \sin \omega t \end{array} \right.$$

Ainsi, nous devons introduire dans le premier membre de l'équation de Newton la correction suivante :

$$(A1.9) \quad \left[\begin{aligned} \Delta F_i(t) &= -TA_{i2}(-U\lambda_6^* \cos \omega t - U\lambda_6^{**} \sin \omega t) - TA_{i3}(U\lambda_5^* \cos \omega t + U\lambda_5^{**} \sin \omega t) \\ &\quad - MA_{i2}(-U\omega\lambda_6^{**} \cos \omega t + U\omega\lambda_6^* \sin \omega t) - MA_{i3}(U\omega\lambda_5^{**} \cos \omega t - U\omega\lambda_5^* \sin \omega t) \end{aligned} \right.$$

En définitive, seuls les termes hydrodynamiques MA_{i5} , MA_{i6} , TA_{i5} et TA_{i6} sont modifiés. Ils deviennent :

$$(A1.10) \quad \left[\begin{aligned} MA'_{i5} &= MA_{i5} - \frac{U}{\omega^2} TA_{i3} \\ MA'_{i6} &= MA_{i6} + \frac{U}{\omega^2} TA_{i2} \end{aligned} \right.$$

$$(A1.11) \quad \left[\begin{aligned} TA'_{i5} &= TA_{i5} + U MA_{i3} \\ TA'_{i6} &= TA_{i6} - U MA_{i2} \end{aligned} \right.$$



Annexe 2

NOTES AU SUJET DE L'INTÉGRALE DE LIGNE

A2.1 - REMARQUES SUR LA CONSTRUCTION DE LA FONCTION DE GREEN

La méthode que nous avons utilisée pour construire la fonction de Green appelle deux remarques.

L'une concerne le remplacement de l'opérateur \mathcal{L}_1 par son extension \mathcal{L}'_1 à tout le plan d'équation $z = 0$; la condition de surface libre est alors vérifiée sur la surface de flottaison comme sur la surface libre.

L'autre est relative à la formulation intégrale de la fonction $\frac{1}{|MM'|}$ que nous avons adoptée ; elle cesse d'être valable quand z et z' sont simultanément nuls. Puisque cette expression n'est utilisée que pour des points M appartenant au plan de côte nulle, son emploi cesse d'être licite dès que z' s'annule.

Une étude complémentaire est donc nécessaire pour mieux comprendre les différences de nature des fonctions $G(M, M'; t)$ et $G'(M, M'; t)$, ainsi que le rôle joué par l'intégrale de ligne. Nous suivrons le même cheminement que P. GUEVEL, P. VAUSSY et J.M. KOBUS /HY-15/.

A2.2 - REPRESENTATION INTEGRALE D'UNE FONCTION ET DE SES DERIVEES

Soit $\Psi(M, M'; t)$ une fonction que nous écrirons sous la forme suivante :

$$(A2.1) \quad \Psi(M, M'; t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} \hat{\Psi}(\theta, k; t) e^{ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} k dk \right\}$$

et pour laquelle nous supposons qu'il existe une transformation inverse (1) qui est :

$$(A2.2) \quad \hat{\Psi}(\theta, k; t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(M, M'; t) e^{-ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} dx dy$$

Si cette fonction admet deux déterminations différentes sur SL et sur SF, il n'y a plus d'identité entre les dérivées de la transformée de $\Psi(M, M'; t)$ et les transformées des dérivées de $\Psi(M, M'; t)$. Ce sont ces différences que nous nous proposons d'évaluer.

A2.2.1 - Dérivée temporelle

La transformée de la dérivée temporelle dans le repère relatif moyen s'écrit :

$$(A2.3) \quad \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial t_1}(\theta, k; t) = \frac{1}{2\pi} \iint_{SL} \frac{\partial}{\partial t_1} \Psi(M, M'; t) e^{-ik(x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta)} dS + \frac{1}{2\pi} \iint_{SF} \frac{\partial}{\partial t_1} \Psi(M, M'; t) e^{-ik(x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta)} dS$$

Comme dans ce repère les seules fonctions temporelles sont $\cos \omega t$ et $\sin \omega t$, les dérivations par rapport au temps peuvent être sorties des intégrales.

D'où :

$$(A2.4) \quad \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial t_1}(\theta, k; t) = \frac{\partial}{\partial t_1} \left[\frac{1}{2\pi} \iint_{SL} \Psi(M, M'; t) e^{-ik(x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta)} dS + \frac{1}{2\pi} \iint_{SF} \Psi(M, M'; t) e^{-ik(x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta)} dS \right]$$

et ainsi :

$$(A2.5) \quad \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial t_1}(\theta, k; t) = \frac{\partial}{\partial t_1} \hat{\Psi}(\theta, k; t)$$

(1) Ceci ne sera vérifié que si $\Psi(M, M'; t)$ appartient à un espace dans lequel la différence entre $\Psi(M, M'; t)$ et l'application de (A2.1) à (A2.2) est nulle presque partout, ce que nous admettrons ici.

De même, nous avons :

$$(A2.6) \quad \frac{\widehat{\partial^2 \Psi}}{\partial t_1^2}(\theta, k; t) = \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \widehat{\Psi}(\theta, k; t)$$

A2.2.2 - Dérivées spatiales par rapport à x_1

La transformée de la dérivée spatiale par rapport à x_1 est :

$$(A2.7) \quad \frac{\widehat{\partial \Psi}}{\partial x_1}(\theta, k; t) = \frac{1}{2\pi} \iint_{SL} \frac{\partial}{\partial x_1} \Psi(M, M'; t) e^{-ik(x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta)} dS + \frac{1}{2\pi} \iint_{SF} \frac{\partial}{\partial x_1} \Psi(M, M'; t) e^{-ik(x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta)} dS$$

Ce qui s'écrit encore en intégrant par partie :

$$(A2.8) \quad \frac{\widehat{\partial \Psi}}{\partial x_1}(\theta, k; t) = \frac{1}{2\pi} \iint_{SL} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left[\Psi(M, M'; t) e^{-ik(x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta)} \right] \right] dS + \frac{1}{2\pi} \iint_{SF} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left[\Psi(M, M'; t) e^{-ik(x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta)} \right] \right] dS \\ + \frac{1}{2\pi} \iint_{SL} \Psi(M, M'; t) ik \cos \theta e^{-ik(x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta)} dS + \frac{1}{2\pi} \iint_{SF} \Psi(M, M'; t) ik \cos \theta e^{-ik(x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta)} dS$$

Il vient ainsi :

$$(A2.9) \quad \frac{\widehat{\partial \Psi}}{\partial x_1}(\theta, k; t) = ik \cos \theta \widehat{\Psi}(\theta, k; t) + \frac{1}{2\pi} \int_{\vec{r}} [[\Psi(M, M'; t)]] e^{-ik(x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta)} dy_1$$

En réitérant l'opération, nous obtenons les expressions des dérivées secondes :

$$(A2.10) \quad \frac{\widehat{\partial^2 \Psi}}{\partial t_1 \partial x_1}(\theta, k; t) = \frac{\partial}{\partial t_1} \left[ik \cos \theta \widehat{\Psi}(\theta, k; t) + \frac{1}{2\pi} \int_{\vec{r}} [[\Psi(M, M'; t)]] e^{-ik(x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta)} dy_1 \right]$$

$$(A2.11) \quad \frac{\widehat{\partial^2 \Psi}}{\partial x_1^2}(\theta, k; t) = -k^2 \cos^2 \theta \widehat{\Psi}(\theta, k; t) + \frac{1}{2\pi} \int_{\vec{r}} \left[\left[\frac{\partial}{\partial x_1} \Psi(M, M'; t) \right] + ik \cos \theta [[\Psi(M, M'; t)]] \right] e^{-ik(x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta)} dy_1$$

Dans ces expressions, $[[\Psi(M, M'; t)]]$ désigne la discontinuité de la fonction $\Psi(M, M'; t)$ considérée avec le signe induit par l'application de la formule de Stokes ; c'est-à-dire :

$$(A2.12) \quad [[\Psi(M, M'; t)]] = \Psi(M, M'; t) \Big|_{SL} - \Psi(M, M'; t) \Big|_{SF}$$

A2.2.3 - Autres dérivées spatiales

Il est évident que les dérivations spatiales par rapport à y_1 conduisent à des résultats analogues à celles relatives à la variable x_1 :

$$(A2.13) \quad \frac{\widehat{\partial \Psi}}{\partial y_1}(\theta, k; t) = ik \sin \theta \widehat{\Psi}(\theta, k; t) - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left[\Psi(M, M'; t) \right] e^{-ik(x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta)} dx_1$$

$$(A2.14) \quad \frac{\widehat{\partial^2 \Psi}}{\partial y_1^2}(\theta, k; t) = -k^2 \sin^2 \theta \widehat{\Psi}(\theta, k; t) - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left[\left[\frac{\partial}{\partial y_1} \Psi(M, M'; t) \right] + ik \sin \theta \left[\Psi(M, M'; t) \right] \right] dx_1$$

En ce qui concerne les dérivations spatiales par rapport à la variable z_1 , les résultats ne sont plus analogues à ceux obtenus dans les deux autres cas, et nous avons simplement (1) :

$$(A2.15) \quad \frac{\widehat{\partial \Psi}}{\partial z_1}(\theta, k; t) = \frac{\partial}{\partial z_1} \widehat{\Psi}(\theta, k; t)$$

A2.5 - APPLICATION A LA FONCTION POTENTIEL DES VITESSES

Soit une distribution de singularités (distribution de sources ou distribution mixte) répartie sur la carène C. Si nous écrivons que le potentiel qu'elle engendre vérifie la condition de surface libre (A2.16) en tenant compte des discontinuités dues à la fonction $\frac{1}{|MM'|}$, nous pourrions mettre en évidence l'intégrale de contour relative à chacune des distributions.

$$(A2.16) \quad \mathcal{L}_1 \left[\Phi(M; t) \right] = 0$$

A2.3.1 - Distribution de sources

Dans le cas d'une distribution de sources $\sigma^*(M') \cos \omega t$, le terme supplémentaire à introduire au second membre se réduit à :

$$(A2.17) \quad \frac{U^2}{8\pi^2} \int_{\Gamma} \sigma^*(M') (\vec{n}' \cdot \vec{i}_x) e^{-ik(x_1' \cos \theta + y_1' \sin \theta)} dy_1' \cos \omega t$$

(1) L'écriture employée ne doit pas faire oublier que $\widehat{\Psi}(\theta, k; t)$ est également une fonction des arguments z et z' .

Ce qui conduit à ajouter à la solution de l'équation différentielle précédemment obtenue le terme suivant :

$$(A2.18) \quad -\frac{U^2}{4\pi g} \int_{\vec{r}} \sigma^*(M)(\vec{n}' \cdot \vec{i}_x) \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ e^{i\omega t} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} \frac{e^{kz} e^{ik\sigma} g^k dk}{(\omega - Uk \cos \theta)^2 - g^k - 2i\epsilon(\omega - Uk \cos \theta)} \right\} \right] \right. \\ \left. + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\omega t} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} \frac{e^{kz} e^{ik\sigma} g^k dk}{(\omega + Uk \cos \theta)^2 - g^k + 2i\epsilon(\omega + Uk \cos \theta)} \right\} \right] \right) dy'_1$$

Ce qui s'écrit encore :

$$(A2.19) \quad -\frac{U^2}{4\pi g} \int_{\vec{r}} \sigma^*(M') \left[G^*(M, M') \cos \omega t + G'^*(M, M') \sin \omega t \right] (\vec{n}' \cdot \vec{i}_x) dy'_1$$

Ce résultat correspond à l'intégrale de contour de l'équation (4.56).

A2.3.2 - Distribution mixte

Dans le cas d'une distribution mixte $\sigma^*(M') \cos \omega t$, $\mu^*(M') \cos \omega t$, il faut introduire dans le second membre les termes supplémentaires suivants :

$$(A2.20) \quad \left[\begin{array}{l} -\frac{\omega U}{4\pi^2} \int_{\vec{r}} \mu^*(M') e^{-ik(x' \cos \theta + y' \sin \theta)} dy'_1 \sin \omega t \\ + \frac{U^2}{8\pi^2} \int_{\vec{r}} \left[\sigma^*(M')(\vec{n}' \cdot \vec{i}_x) - \frac{\partial \mu^*(M')}{\partial \ell'} (\vec{\ell}' \cdot \vec{i}_x) - \frac{\partial \mu^*(M')}{\partial s'} (s' \cdot \vec{i}_x) \right] e^{-ik(x' \cos \theta + y' \sin \theta)} dy'_1 \cos \omega t \\ - \frac{U^2}{8\pi^2} \int_{\vec{r}} \mu^*(M') ik \cos \theta e^{-ik(x' \cos \theta + y' \sin \theta)} dy'_1 \cos \omega t \end{array} \right]$$

Ce qui conduit au résultat du paragraphe 4.8.

A2.4 - CONVERGENCE DES INTEGRALES

Ainsi que l'a montré P. GUEVEL /HY-15/, l'intégrale de ligne et l'intégrale de surface présentent chacune une infinitude (due à la repré-

sentation intégrale de $\frac{1}{|MM'|}$) quand z est nul, mais leur somme est finie.

Ceci peut être mis en évidence après discrétisation de la carène en facettes polygônales planes puisqu'alors l'intégrale de surface se transforme en une intégrale de contour sur chaque facette et, sur les segments inclus dans le plan de la surface libre, les deux intégrales curvilignes peuvent être ajoutées pour obtenir un résultat fini quand z est nul.



PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES FONCTIONS EXPONENTIELLES INTÉGRALES

A3.1 - FONCTION EXPONENTIELLE INTÉGRALE $E_1(\zeta)$ A3.1.1 - Définition

$$(A3.1) \quad E_1(\zeta) = \int_{\zeta}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \quad -\pi < \text{Arg } \zeta < +\pi$$

$$(A3.2) \quad E_1(\zeta) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-\zeta t}}{t} dt \quad \text{Re } \zeta > 0$$

A3.1.2 - Développement en série

$$(A3.3) \quad E_1(\zeta) = -\psi - \text{Log } \zeta - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\zeta^n}{n n!} \quad -\pi < \text{Arg } \zeta < +\pi$$

$$\psi = 0.5772156649 \quad (\text{constante d'Euler})$$

A3.1.3 - Développement asymptotique

$$(A3.4) \quad E_1(\zeta) = \frac{e^{-\zeta}}{\zeta} \left[\sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \frac{n!}{\zeta^n} + o(|\zeta|^{-N}) \right] \quad |\zeta| \rightarrow \infty ; -\pi < \text{Arg } \zeta < +\pi$$

A3.1.4 - Propriétés fondamentales

$$(A3.5) \quad E_1(\bar{z}) = \overline{E_1(z)} \quad -\pi < \text{Arg } z < +\pi$$

$$(A3.6) \quad \frac{d}{dz} E_1(z) = -E_0(z) = -\frac{e^{-z}}{z} \quad -\pi < \text{Arg } z < +\pi$$

$$(A3.7) \quad \int E_1(z) dz = z E_1(z) - e^{-z} + c \quad -\pi < \text{Arg } z < +\pi$$

$$(A3.8) \quad E_1(-x \pm i0) = -E_1(x) \mp i\pi \quad x > 0$$

$$(A3.9) \quad E_1(x) = -\int_{-x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \gamma + \text{Log } x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n n!} \quad x > 0$$

$$(A3.10) \quad \int_a^{\infty} \frac{e^{-ct}}{b+t} dt = e^{bc} E_1[(2+b)c] \quad \text{Re } c > 0$$

A3.2 - FONCTION EXPONENTIELLE INTEGRALE MODIFIEE $\xi_1(z)$

A3.2.1 - Définition

$$(A3.11) \quad \left[\begin{array}{l} \xi_1(z) = E_1(z) \quad \text{Im } z > 0 \\ \xi_1(z) = E_1(z+i0) \quad \text{Im } z = 0 \\ \xi_1(z) = E_1(z) - 2i\pi \quad \text{Im } z < 0 \end{array} \right.$$

A3.2.2 - Développement en série

$$(A3.12) \quad \xi_1(z) = -\gamma - \text{Log } z - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n n!} z^n \quad 0 < \text{Arg } z < 2\pi$$

A3.2.3 - Propriétés fondamentales

$$(A3.13) \quad \xi_1(\bar{z}) = \overline{\xi_1(z)}$$

$$(A3.14) \quad \xi_1(-x) = -E_1(x) - i\pi$$

A3.3 - FONCTIONS G1(z), G2(z), G3(z)

A3.3.1 - Définitions

$$(A3.15) \quad G1(z) = e^z \xi_1(z) \quad 0 < \text{Arg } z < 2\pi$$

$$(A3.16) \quad G2(z) = e^z E_1(z) \quad -\pi < \text{Arg } z < +\pi$$

$$(A3.17) \quad G3(z) = e^z [\xi_1(z) + 2i\pi] = G1(z) + 2i\pi e^z \quad 0 < \text{Arg } z < 2\pi$$

A3.3.2 - Propriétés fondamentales

$$(A3.18) \quad \frac{d}{dz} G1(z) = G1(z) - \frac{1}{z} \quad 0 < \text{Arg } z < 2\pi$$

$$(A3.19) \quad \frac{d}{dz} G2(z) = G2(z) - \frac{1}{z} \quad -\pi < \text{Arg } z < +\pi$$

$$(A3.20) \quad \frac{d}{dz} G3(z) = G3(z) - \frac{1}{z} \quad 0 < \text{Arg } z < 2\pi$$

$$(A3.21) \quad \int G1(z) dz = G1(z) + \text{Log } z + c^E \quad 0 < \text{Arg } z < 2\pi$$

$$(A3.22) \quad \int G2(z) dz = G2(z) + \text{Log } z + c^E \quad -\pi < \text{Arg } z < +\pi$$

$$(A3.23) \quad \int G3(z) dz = G3(z) + \text{Log } z + c^E \quad 0 < \text{Arg } z < 2\pi$$

A3.4 - APPLICATION DES FONCTIONS EXPONENTIELLES INTEGRALES

Les fonctions exponentielles intégrales permettent d'exprimer les intégrales suivantes :

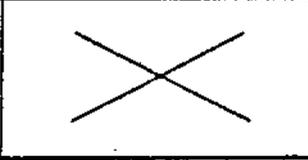
$$(A3.24) \quad I_1 = \int_0^{\infty} \frac{e^{-kz}}{k - K_0} dk \quad X = \operatorname{Re} Z > 0$$

$$(A3.25) \quad I_2 = \int_0^{\infty} \frac{e^{-kY}}{k - K_0} dk \quad Y \neq 0$$

A3.4.1 - Expressions de I_1

En posant : $\zeta = -K_0 Z$ avec $K_0 = k_0 + im_0$, les différentes expressions de $I_1(\zeta)$ sont données en fonction de k_0 et m_0 , par le tableau A3.I.

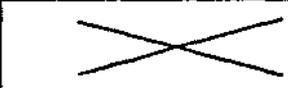
tableau A3.I

	$k_0 < 0$	$k_0 = 0$	$k_0 > 0$
$m_0 < 0$	$e^{\zeta} \cdot E_1(\zeta)$	$e^{\zeta} \cdot E_1(\zeta)$	$e^{\zeta} \cdot \mathcal{E}_1(\zeta)$
$m_0 = 0$	$e^{\zeta} \cdot E_1(\zeta)$		$e^{\zeta} [\mathcal{E}_1(\zeta) + i\pi]$
$m_0 > 0$	$e^{\zeta} \cdot E_1(\zeta)$	$e^{\zeta} \cdot E_1(\zeta)$	$e^{\zeta} [\mathcal{E}_1(\zeta) + 2i\pi]$

A3.4.2 - Expressions de I_2

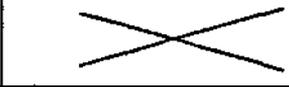
En posant $\zeta = -iK_0 Y$ avec $K_0 = k_0 + im_0$, les différentes expressions de $I_2(\zeta)$ sont données en fonction de k_0 et m_0 , par le tableau A3.II, pour Y strictement négatif.

tableau A3. II

	$k_0 < 0$	$k_0 = 0$	$k_0 > 0$
$m_0 < 0$	$e^{\zeta} \cdot E_1(\zeta)$	$e^{\zeta} \cdot E_1(\zeta)$	$e^{\zeta} \cdot \mathcal{E}_1(\zeta)$
$m_0 = 0$	$e^{\zeta} \cdot E_1(\zeta)$		$e^{\zeta} [\mathcal{E}_1(\zeta) + i\pi]$
$m_0 > 0$	$e^{\zeta} \cdot E_1(\zeta)$	$e^{\zeta} [\mathcal{E}_1(\zeta) + 2i\pi]$	$e^{\zeta} [\mathcal{E}_1(\zeta) + 2i\pi]$

Lorsque γ est strictement positif, les expressions de $I_2(\zeta)$ en fonction de k_0 et m_0 sont données par le tableau A3.III.

tableau A3. III

	$k_0 < 0$	$k_0 = 0$	$k_0 > 0$
$m_0 < 0$	$e^{\zeta} \cdot E_1(\zeta)$	$e^{\zeta} \cdot \mathcal{E}_1(\zeta)$	$e^{\zeta} \cdot \mathcal{E}_1(\zeta)$
$m_0 = 0$	$e^{\zeta} \cdot E_1(\zeta)$		$e^{\zeta} [\mathcal{E}_1(\zeta) + i\pi]$
$m_0 > 0$	$e^{\zeta} \cdot E_1(\zeta)$	$e^{\zeta} \cdot E_1(\zeta)$	$e^{\zeta} [\mathcal{E}_1(\zeta) + 2i\pi]$

A3.5 - FONCTIONS D'APPROXIMATION

$$(A3.26) \quad e^{\zeta} E_1(\zeta) = \frac{M+N}{D} + \varepsilon(\zeta) \quad ; \quad 0 < |\zeta| < \infty \quad ; \quad |\varepsilon(\zeta)| \leq 7 \cdot 10^{-6}$$

$$(A3.27) \quad M = -[1 + m_1 \zeta + m_2 \zeta^2 + m_3 \zeta^3 + m_4 \zeta^4] \text{Log } \zeta \quad -\pi < \text{Arg } \zeta < +\pi$$

$$(A3.28) \quad N = -\gamma [n_0 + n_1 \zeta + n_2 \zeta^2 + n_3 \zeta^3 + n_4 \zeta^4 + n_5 \zeta^5]$$

$$(A3.29) \quad D = 1 + d_1 \zeta + d_2 \zeta^2 + d_3 \zeta^3 + d_4 \zeta^4 + d_5 \zeta^5 + d_6 \zeta^6$$

avec :

$v = 0.5772156649$	$n_0 = 0.99999207$	$d_1 = -0.76273617$
$m_1 = 0.23721365$	$n_1 = -1.49545886$	$d_2 = 0.28388363$
$m_2 = 0.020654300$	$n_2 = 0.041806426$	$d_3 = -0.066786033$
$m_3 = 0.00076329700$	$n_3 = -0.03000591$	$d_4 = 0.012982719$
$m_4 = 0.0000097087007$	$n_4 = 0.0019387339$	$d_5 = -0.00087008610$
	$n_5 = -0.00051801555$	$d_6 = 0.00029892040$



RÉSULTATS GÉNÉRAUX DU PRINCIPE DE LA PHASE STATIONNAIRE

A4.1 - PRINCIPE DE LA PHASE STATIONNAIRE (Cauchy - Lord Kelvin)

Soit l'intégrale suivante :

$$(A4.1) \quad I(\lambda) = \int_a^b f(\theta, \lambda) e^{i\lambda g(\theta)} d\theta$$

dans laquelle λ désigne une constante réelle suffisamment grande pour que $e^{i\lambda g(\theta)}$ oscille très rapidement dans l'intervalle (a, b) , sauf peut être au voisinage des points où la phase $g(\theta)$ est stationnaire. La fonction $f(\theta, \lambda)$ est continue, bornée (et donc sommable sur (a, b)), n'oscillant pas rapidement dans l'intervalle considéré. On conçoit que si la dérivée $g'(\theta)$ de la fonction $g(\theta)$ ne s'annule pas dans l'intervalle (a, b) , l'intégrale $I(\lambda)$ sera très faible car il y aura une quasi compensation des contributions positives et négatives. Par contre, si la fonction $g'(\theta)$ s'annule pour une valeur α de l'intervalle (a, b) , la fonction $e^{i\lambda g(\theta)}$ n'oscillera plus au voisinage de α , il n'y aura plus de compensation et la contribution d'un élément d'intégration centré sur le point d'abscisse α ne sera plus négligeable.

L'expression de $I(\lambda)$ sera conditionnée essentiellement par le comportement du noyau au voisinage des points α_i pour lesquels la dérivée $g'(\theta)$ s'annule.

L'application du principe de la phase stationnaire permet de déterminer le terme principal de l'intégrale $I(\lambda)$ à un terme d'ordre supérieur près.

A4.2 - EXPRESSION GENERALE DE L'INTEGRALE I(λ)

Nous nous limiterons ici à donner l'expression générale de l'intégrale I(λ). La démonstration de ces résultats est donnée par P. GUEVEL /HY-14/.

Lorsque sur l'intervalle (a,b) la fonction g(θ) présente des maxima aux points θ = α_M, des minima aux points θ = α_m et des points d'inflexion à tangente horizontale aux points θ = α_i, on a :

$$(A4.2) \quad \left[\begin{aligned} I(\lambda) = & \sum_{\alpha_m} f(\alpha_m, \lambda) \sqrt{\frac{2\pi}{|g''(\alpha_m)|}} e^{i[\lambda g(\alpha_m) - \frac{\pi}{4}]} \lambda^{-1/2} [1 + O(\lambda^{-1/2})] \\ & + \sum_{\alpha_M} f(\alpha_M, \lambda) \sqrt{\frac{2\pi}{|g''(\alpha_M)|}} e^{i[\lambda g(\alpha_M) + \frac{\pi}{4}]} \lambda^{-1/2} [1 + O(\lambda^{-1/2})] \\ & + \sum_{\alpha_i} f(\alpha_i, \lambda) \frac{\Gamma(\frac{4}{3})}{\sqrt{3}} \left[\frac{6}{|g'''(\alpha_i)|} \right]^{1/3} e^{i\lambda g(\alpha_i)} \lambda^{-1/3} [1 + O(\lambda^{-1/3})] \end{aligned} \right.$$

Si l'un des points stationnaires [g'(α) = 0 ; g''(α) ≠ 0] coïncide avec une des limites d'intégration, sa contribution est égale à la moitié de la valeur donnée par (A4.2). Par contre, si à l'une des limites d'intégration on a : g'(α) = 0, g''(α) = 0 et g'''(α) ≠ 0, la contribution diffère à la fois par un facteur numérique et par un facteur de phase ; elle est alors :

$$(A4.3) \quad f(a, \lambda) \frac{\Gamma(\frac{4}{3})}{3} \left[\frac{6}{|g'''(a)|} \right]^{1/3} e^{i[\lambda g(a) \pm \frac{\pi}{6}]} \lambda^{-1/3} [1 + O(\lambda^{-1/3})]$$

$$(A4.4) \quad f(b, \lambda) \frac{\Gamma(\frac{4}{3})}{3} \left[\frac{6}{|g'''(b)|} \right]^{1/3} e^{i[\lambda g(b) \pm \frac{\pi}{6}]} \lambda^{-1/3} [1 + O(\lambda^{-1/3})]$$

Le signe + correspond aux cas où g'''(a) > 0 et g'''(b) < 0 ;

Le signe - correspond aux cas où g'''(a) < 0 et g'''(b) > 0 .



Annexe 5

INTÉGRATION DE LA FONCTION $\frac{1}{|MM'|}$ ET DE SES DÉRIVÉES
SUR UNE FACETTE POLYGONALE PLANE

Soit S une facette polygonale plane dont le contour est composé de m côtés numérotés en progressant dans le sens direct induit par le vecteur normal unitaire de composantes p, q, r.

Soit $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un point quelconque de la facette. Nous désignons par P_k et P_{k+1} les extrémités du côté k, et nous poserons :

$$(A5.1) \quad \left[\begin{array}{l} R_k = \sqrt{(x-x'_k)^2 + (y-y'_k)^2 + (z-z'_k)^2} \\ d_k = \sqrt{(x'_{k+1}-x'_k)^2 + (y'_{k+1}-y'_k)^2 + (z'_{k+1}-z'_k)^2} \\ \Delta = (x-x_0)p + (y-y_0)q + (z-z_0)r \\ a_k = \frac{1}{d_k} [(x-x'_k)a_k + (y-y'_k)b_k + (z-z'_k)c_k] \\ a_k = q(z'_{k+1}-z'_k) - r(y'_{k+1}-y'_k) \\ b_k = r(x'_{k+1}-x'_k) - p(z'_{k+1}-z'_k) \\ c_k = p(y'_{k+1}-y'_k) - q(x'_{k+1}-x'_k) \end{array} \right.$$

Les intégrales sur S de la fonction $\frac{1}{|MM'|}$ et de ses dérivées s'expriment en fonction des termes donnés par (A5.1).

A5.1 - INTEGRATION DE $\frac{1}{|MM'|}$

$$(A5.2) \quad \iint_S \frac{1}{|MM'|} dS(M') = \sum_{k=1}^m \left\{ z_k \operatorname{Log} \left[\frac{R_{k+1} + R_k + d_k}{R_{k+1} + R_k - d_k} \right] - 2|\Delta| \operatorname{Arctg} \left[\frac{2z_k d_k}{(R_{k+1} + R_k)^2 - d_k^2 + 2|\Delta|(R_{k+1} + R_k)} \right] \right\}$$

A5.2 - INTEGRATION DE $\frac{\partial}{\partial n'} \left[\frac{1}{|MM'|} \right]$

$$(A5.3) \quad \iint_S \left[\frac{\partial}{\partial n'} \left[\frac{1}{|MM'|} \right] \right] dS(M') = 2 \frac{\Delta}{|\Delta|} \sum_{k=1}^m \operatorname{Arctg} \left[\frac{2z_k d_k}{(R_{k+1} + R_k)^2 - d_k^2 + 2|\Delta|(R_{k+1} + R_k)} \right]$$

A5.3 - INTEGRATION DE $\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{|MM'|} \right]$, $\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{|MM'|} \right]$ et $\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{|MM'|} \right]$

Les composantes $\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{|MM'|} \right]$, $\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{|MM'|} \right]$ et $\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{|MM'|} \right]$ sont exprimées dans un système d'axes local, tel que le plan xoy coïncide avec le plan de la facette.

$$(A5.4) \quad \iint_S \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{|MM'|} \right] dS(M') = - \sum_{k=1}^m \left[\frac{y'_{k+1} - y'_k}{d_k} \right] \operatorname{Log} \left[\frac{R_{k+1} + R_k + d_k}{R_{k+1} + R_k - d_k} \right]$$

$$(A5.5) \quad \iint_S \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{|MM'|} \right] dS(M') = + \sum_{k=1}^m \left[\frac{x'_{k+1} - x'_k}{d_k} \right] \operatorname{Log} \left[\frac{R_{k+1} + R_k + d_k}{R_{k+1} + R_k - d_k} \right]$$

$$(A5.6) \quad \iint_S \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{|MM'|} \right] dS(M') = - 2 \frac{z}{|z|} \sum_{k=1}^m \operatorname{Arctg} \left[\frac{2z_k d_k}{(R_{k+1} + R_k)^2 - d_k^2 + 2|z|(R_{k+1} + R_k)} \right]$$

avec ici :

$$(A5.7) \quad \left[\begin{array}{l} R_k = \sqrt{(x-x'_k)^2 + (y-y'_k)^2 + z^2} \\ d_k = \sqrt{(x'_{k+1}-x'_k)^2 + (y'_{k+1}-y'_k)^2} \\ \lambda_k = \frac{1}{d_k} \left[(x'_{k+1}-x'_k)(y-y'_k) - (y'_{k+1}-y'_k)(x-x'_k) \right] \end{array} \right.$$

Les expressions (A5.4) et (A5.5) sont exactement celles qui ont été établies par J.L. HESS et A.M.O. SMITH. Par contre, la formule (A5.6) est exprimée sous une forme différente que celle qui a été obtenue par ces auteurs /HY-14/.

A5.4 - INTEGRATION DE $\frac{\partial^2}{\partial x \partial n'} \left[\frac{1}{|MM'|} \right]$

$$(A5.8) \quad \iint_S \frac{\partial^2}{\partial x \partial n'} \left[\frac{1}{|MM'|} \right] dS(M') = 2 \frac{\Delta}{|\Delta|} \sum_{k=1}^m V_k$$

avec :

$$(A5.9) \quad \left[\begin{array}{l} V_k = \frac{1}{1+\mathcal{D}_k^2} \left[2 \mathcal{D}_k - \mathcal{D}_k \left[(R_{k+1} + R_k + |\Delta|) \left(\frac{x-x'_{k+1}}{R_{k+1}} + \frac{x-x'_k}{R_k} \right) + p(R_{k+1}, R_k) \frac{\Delta}{|\Delta|} \right] \right] \frac{\mathcal{D}_k}{2 \lambda_k d_k} \\ \mathcal{D}_k = \frac{2 \lambda_k \mathcal{D}_k}{(R_{k+1} + R_k)^2 - d_k^2 + 2 |\Delta| (R_{k+1} + R_k)} \end{array} \right.$$

Expressions dans lesquelles les différents termes sont définis par les formules (A5.1).

A5.5 - FORMULES ASYMPTOTIQUES

Quand le point M est suffisamment éloigné du segment k, ou de la face, les formules précédentes se simplifient. Nous n'avons pas reproduit ici les formules asymptotiques qui ne présentent un intérêt que pour la programmation. Elles sont données dans le cours d'Hydrodynamique Navale de P. GUEVEL /HY-14/.



INTÉGRATION SUR UNE FACETTE POLYGONALE PLANE D'UNE FONCTION QUELCONQUE
D'UNE VARIABLE DÉFINIE COMME UNE FONCTION COMPLEXE LINÉAIRE
DES COORDONNÉES CARTÉSIENNES

A6.1 - POSITION DU PROBLEME

Soit ζ_j la fonction complexe linéaire des coordonnées cartésiennes définie par :

$$(A6.1) \quad \zeta_j = \alpha \{ \mu h + s_1 z_j + i [(x-x_j) \cos \theta + s_2 (y-y_j) \sin \theta] \}$$

où s_1 et s_2 peuvent prendre arbitrairement les valeurs ± 1 , et où α est un nombre complexe non nul. Le point M_j de coordonnées (x_j, y_j, z_j) est assujéti à décrire une facette polygonale plane S_j définie par m sommets indicés par la variable entière k et numérotés dans le sens direct induit par le vecteur normal unitaire \vec{n}_j de composantes p_j , q_j et r_j ⁽¹⁾. Soit P_j le point de coordonnées (x_{j0}, y_{j0}, z_{j0}) appartenant au plan Π_j qui contient la facette S_j . Nous nous proposons de calculer les intégrales suivantes :

$$(A6.2) \quad I_s = \iint_{S_j} \frac{d^2}{d\zeta_j^2} f(\zeta_j) dS_j$$

$$(A6.3) \quad I_v = \iint_{S_j} \text{grad} \left[\frac{d^2}{d\zeta_j^2} f(\zeta_j) \right] \cdot \vec{n}_j dS_j$$

où f est une fonction complexe trois fois dérivable de la variable ζ_j , continue et bornée sur tout S_j , y compris sur le contour.

(1) Le sens du vecteur normal est imposé par le problème à résoudre, et n'influence que le signe du résultat.

A6.2 - CALCULS PRELIMINAIRES

Ce paragraphe est destiné à établir ou à répertorier les formules générales dont nous aurons besoin pour calculer I_S et I_D .

L'équation du plan Π_j s'écrit :

$$(A6.4) \quad \Pi_j : \vec{P}_j \vec{M}_j \cdot \vec{n}_j = 0 \Leftrightarrow p_j(x_j - x_{j_0}) + q_j(y_j - y_{j_0}) + r_j(z_j - z_{j_0}) = 0$$

Isolons le produit $r_j z_j$ et introduisons le résultat ainsi obtenu dans l'expression du produit $r_j \zeta_j$ tiré de (A6.1). Nous obtenons, sous réserve que r_j ne soit pas nul :

$$(A6.5) \quad \left[\begin{aligned} r_j \zeta_j &= \alpha \{ r_j (\mu h + s_1 z_{j_0}) + s_1 (p_j x_{j_0} + q_j y_{j_0}) + i r_j (x \cos \theta + s_2 y \sin \theta) \\ &\quad - x_j (s_1 p_j + i r_j \cos \theta) - y_j (s_1 q_j + i s_2 r_j \sin \theta) \} \end{aligned} \right.$$

Puisque les dérivées partielles de ζ_j peuvent s'écrire :

$$(A6.6) \quad \frac{1}{\frac{\partial \zeta_j}{\partial x_j}} = - \frac{r_j}{\alpha (s_1 p_j + i r_j \cos \theta)} \quad \text{si} \quad s_1 p_j + i r_j \cos \theta \neq 0$$

$$(A6.7) \quad \frac{1}{\frac{\partial \zeta_j}{\partial y_j}} = - \frac{r_j}{\alpha (s_1 q_j + i s_2 r_j \sin \theta)} \quad \text{si} \quad s_1 q_j + i s_2 r_j \sin \theta \neq 0$$

et que les deux dénominateurs ne sont jamais simultanément nuls ($p_j^2 + q_j^2 + r_j^2 = 1$), nous pouvons écrire au moins l'une des deux égalités suivantes :

$$(A6.8) \quad \frac{d^2}{d\zeta_j^2} f(\zeta_j) = - \frac{r_j}{\alpha (s_1 p_j + i r_j \cos \theta)} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{d}{d\zeta_j} f(\zeta_j) \right]$$

$$(A6.9) \quad \frac{d^2}{d\zeta_j^2} f(\zeta_j) = - \frac{r_j}{\alpha (s_1 q_j + i s_2 r_j \sin \theta)} \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\frac{d}{d\zeta_j} f(\zeta_j) \right]$$

Deux expressions mathématiques classiques nous seront utiles pour poursuivre nos calculs ; l'une est l'égalité (A6.10),

$$(A6.10) \quad \frac{N}{D} = \frac{N'}{D'} = \frac{N+N'}{D+D'}$$

et l'autre est la transformation d'une intégrale de surface en intégrale curviligne, issue du théorème de Stokes :

$$(A6.11) \quad \iint_{S_j} \begin{vmatrix} p_j & q_j & r_j \\ \frac{\partial}{\partial x_j} & \frac{\partial}{\partial y_j} & \frac{\partial}{\partial z_j} \\ L & M & N \end{vmatrix} dS_j = \int_{\mathcal{C}} [Ldx_j + Mdy_j + Ndz_j]$$

A6.3 - CALCUL DE L'INTEGRALE I_S

Si nous rendons réels les dénominateurs des expressions (A6.8) et (A6.9) en multipliant leurs numérateurs et leurs dénominateurs par les quantités conjuguées de leurs dénominateurs respectifs, et si nous appliquons la formule (A6.10), le nouveau dénominateur vaut α (si l'un des deux dénominateurs est nul, l'autre vaut α dès qu'il est multiplié par sa quantité conjuguée). Il vient alors :

$$(A6.12) \quad I_S = \frac{1}{\alpha} \left\{ - (s_1 p_j - i r_j \cos \theta) \iint_{S_j} r_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{d}{d\zeta_j} f(\zeta_j) \right] dS_j - (s_1 q_j - i s_2 r_j \sin \theta) \iint_{S_j} r_j \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\frac{d}{d\zeta_j} f(\zeta_j) \right] dS_j \right\}$$

L'application de la formule de Stokes (A6.11) permet alors d'écrire :

$$(A6.13) \quad I_S = \frac{1}{\alpha} \left\{ - (s_1 p_j - i r_j \cos \theta) \int_{\mathcal{C}} \frac{d}{d\zeta_j} f(\zeta_j) dy_j + (s_1 q_j - i s_2 r_j \sin \theta) \int_{\mathcal{C}} \frac{d}{d\zeta_j} f(\zeta_j) dx_j \right\}$$

La facette étant polygonale, ζ_j est une fonction linéaire d'une seule variable indépendante x_j ou y_j sur chaque segment $(k, k+1)$. Il vient donc :

$$(A6.14) \quad \zeta_j = \zeta_{jk} + \frac{\zeta_{jkm} - \zeta_{jk}}{x_{jkm} - x_{jk}} (x - x_{jk})$$

$$(A6.15) \quad \zeta_j' = \zeta_{jk}' + \frac{\zeta_{jkm}' - \zeta_{jk}'}{y_{jkm} - y_{jk}} (y - y_{jk})$$

sous réserve que $\zeta_{jk+1} - \zeta_{jk}$ ne soit pas nul, nous obtenons :

$$(A6.16) \quad I_S = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^m \frac{(s_1 q_j - i s_2 r_j \sin \theta)(x_{jkm} - x_{jk}) - (s_1 p_j - i r_j \cos \theta)(y_{jkm} - y_{jk})}{\zeta_{jkm} - \zeta_{jk}} \int_{\zeta_{jk}}^{\zeta_{jkm}} \frac{d}{d\zeta_j} f(\zeta_j) d\zeta_j$$

L'intégration de I_S est alors élémentaire. Dans le cas où $\zeta_{jk+1} - \zeta_{jk}$ est nul (ou simplement trop petit pour que les résultats numériques soient convenables), l'intégrale est calculée par la formule de la moyenne.

Nous avons donc en définitive :

$$(A6.17) \quad I_S = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^m C_{jk} \frac{f(\zeta_{jkm}) - f(\zeta_{jk})}{\zeta_{jkm} - \zeta_{jk}} \quad ; \quad |\zeta_{jkm} - \zeta_{jk}| > \varepsilon$$

$$(A6.18) \quad I_S = \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^m C_{jk} \frac{1}{2} \left[\frac{d}{d\zeta_j} f(\zeta_j) \Big|_{\zeta_{jkm}} + \frac{d}{d\zeta_j} f(\zeta_j) \Big|_{\zeta_{jk}} \right] \quad ; \quad |\zeta_{jkm} - \zeta_{jk}| < \varepsilon$$

$$(A6.19) \quad C_{jk} = (s_1 q_j - i s_2 r_j \sin \theta)(x_{jkm} - x_{jk}) - (s_1 p_j - i r_j \cos \theta)(y_{jkm} - y_{jk})$$

A6.4 - CALCUL DE L'INTEGRALE I_D

En explicitant l'intégrand de I_D , nous obtenons :

$$(A6.20) \quad \text{grad} \left[\frac{d^2}{d\zeta_j^2} f(\zeta_j) \right] \cdot \vec{n}_j = \frac{d^2}{d\zeta_j^2} f(\zeta_j) \text{grad} \zeta_j \cdot \vec{n}_j$$

avec :

$$(A6.21) \quad \text{grad}_{S_j} \cdot \vec{n}_j = \alpha \{ -i(p_j \cos \theta + s_2 q_j \sin \theta) + s_1 r_j \}$$

ce qui permet d'écrire I_D sous la forme suivante :

$$(A6.22) \quad I_D = -i\alpha \left[(p_j \cos \theta + s_2 q_j \sin \theta) + i s_1 r_j \right] \iint_{S_j} \frac{d^2}{dS_j^2} \left[\frac{d}{dS_j} f(S_j) \right] dS_j$$

Plutôt que d'appliquer à l'équation (A6.22) les résultats obtenus pour I_S , il est plus judicieux d'appliquer la formule (A6.10) sans rendre réels les dénominateurs, mais après avoir multiplié les numérateurs et les dénominateurs de (A6.8) et (A6.9) respectivement par $\cos \theta$ et $s_2 \sin \theta$. Il vient alors simplement :

$$(A6.23) \quad I_D = i s_1 \left\{ \cos \theta \iint_{S_j} r_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{d^2}{dS_j^2} f(S_j) \right] dS_j + s_2 \sin \theta \iint_{S_j} r_j \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\frac{d^2}{dS_j^2} f(S_j) \right] dS_j \right\}$$

En appliquant la formule de Stokes et en refaisant un raisonnement analogue à celui du paragraphe précédent, nous obtenons :

$$(A6.24) \quad I_D = \sum_{k=1}^m C'_{jk} \frac{\frac{d}{dS_j} f(S_j) \Big|_{S_{jk+1}} - \frac{d}{dS_j} f(S_j) \Big|_{S_{jk}}}{S_{jk+1} - S_{jk}} \quad ; \quad |S_{jk+1} - S_{jk}| > \varepsilon$$

$$(A6.25) \quad I_D = \sum_{k=1}^m C'_{jk} \frac{1}{2} \left[\frac{d^2}{dS_j^2} f(S_j) \Big|_{S_{jk+1}} + \frac{d^2}{dS_j^2} f(S_j) \Big|_{S_{jk}} \right] ; \quad |S_{jk+1} - S_{jk}| < \varepsilon$$

$$(A6.26) \quad C'_{jk} = i s_1 \left[\cos \theta (y_{jk+1} - y_{jk}) - s_2 \sin \theta (x_{jk+1} - x_{jk}) \right]$$

A6.5 - EXTENSION DU DOMAINE DE VALIDITE DES FORMULES

Dans le cas où r_j est nul, le raisonnement doit être refait en supposant p_j (ou q_j) non nul. Un tel calcul mené dans le même esprit que celui que nous venons de faire conduit aux mêmes formules. Ce résultat n'est pas surprenant puisque les formulations finales ne laissent apparaître aucune restriction.



BIBLIOGRAPHIE

B.1 - HYDRODYNAMIQUE

/HY-1/ BAI K.J. - YEUNG R.W.

"Numerical solutions to free-surface flow problems"
10th Symposium on naval hydrodynamics
Cambridge, Massachusetts, 1974.

/HY-2/ BECKER E.

"Das Wellenbild einer unter der Oberfläche eines Stromes
schwerer Flüssigkeit pulsierender Quelle"
Z. angew. Math. Mech. 38 (391-399), 1958.

/HY-3/ BOUGIS J.

"Application de la méthode des tranches à la détermination
des forces et moments de dérive sur houle d'un navire au
point fixe"
Rapport de Recherche - Nantes, 1978.

/HY-4/ BOUGIS J. - CLEMENT A.

"Action de la houle sur un flotteur élané à Froude zéro
en profondeur finie"
Bulletin de l'A.T.M.A. 79 (121-152) - Paris, 1979.

/HY-5/ BRARD R.

"Introduction à l'étude théorique du tangage en marche"
Bulletin de l'A.T.M.A. 47 (455-479) - Paris, 1948.

/HY-6/ BRARD R.

"The representation of a given ship form by singularity
distribution when the boundary condition on the free surface
is linearized"
Journal of Ship Research, Vol. 16, 1 (79-92), 1972.

/HY-7/ CHANG M.S. - PIEN P.C.

"Hydrodynamics forces on a body moving beneath a free surface"
Conference on computational ship hydrodynamics (539-559).
Berkeley, 1975.

/HY-8/ CHANG M.S.

"Computation of three-dimensional ship motions with forward speed"
2nd Conference on computation ship hydrodynamics (124-155)
Berkeley, 1977.

/HY-9/ CLEMENT A.

"Contribution à l'étude théorique et expérimentale des mouvements de corps flottants induits par une houle régulière en profondeur finie uniforme"
Thèse de Docteur-Ingénieur. Nantes, 1979.

/HY-10/ DELHOMMEAU G.

"Contribution à l'étude théorique et à la résolution numérique du problème de la résistance de vagues"
Thèse de Docteur-Ingénieur. Nantes, 1978.

/HY-11/ DERN J.C. - FERNANDEZ G.

"Expression analytique de la fonction de Green du problème de la diffraction radiation avec vitesse d'avance"
Bassin d'Essais des Carènes de Paris. Rapport n° 17639 BA/N, 1979.

/HY-12/ EGGERS K.S.

"Über das Wellenbild einer pulsierenden Störung in Translation"
Schiff. u. Hafen 9 (874-878), 1957.

/HY-13/ EUVRARD D. - JAMI A. - MORICE C. - OUSSET Y.

"Calcul numérique des oscillations d'un navire engendrées par la houle"
Journal de Mécanique, Vol. 16, 2 (289-326), 3 (327-394). 1977.

/HY-14/ GUEVEL P.

"Hydrodynamique navale"
Cours de la Section Spéciale d'Hydrodynamique Navale Avancée.
Nantes, 1979.

/HY-15/ GUEVEL P. - VAUSSY P. - KOBUS J.M.

"The distribution of singularities kinematically equivalent to a moving hull in the present of a free surface"
International Shipbuilding Progress, Vol. 21, n°243 (311-324), 1974.

/HY-16/ GUEVEL P. - DELHOMMEAU G.

"Méthodes de calcul de la résistance de vagues"
Rapport I.R.C.N. Nantes, 1977.

/HY-17/ GUEVEL P. - DAUBISSE J.C. - DELHOMMEAU G.

"Oscillations des corps flottants soumis à l'action de la houle"
Bulletin de l'A.T.M.A. 78 (145-165). Paris, 1978.

/HY-18/ GUEVEL P. - BOUGIS J. - HONG D.C.

"Formulation du problème des oscillations des corps flottants animés d'une vitesse de route moyenne constante et sollicités par la houle"
4^{ème} Congrès Français de Mécanique. Nancy, 1979.

/HY-19/ HANAOKA T.

"On the velocity potential in MICHELL's system and the configuration of the wave-ridges due to a moving ship.
J. Zōsen Kyōkai 93 (1-10). 1953.

/HY-20/ HASKIND M.D.

"The hydrodynamic theory of ship oscillating in rolling and pitching"
Prikl. Mat. Mekh. 10 (33-66). 1946.

/HY-21/ HAVELOCK T.H.

"The effect of speed of advance upon the damping of Heave and pitch"
Transaction of the Royal Institution of Naval Architect 100 (131-135). 1958.

/HY-22/ HESS J.L. - SMITH A.M.O.

"Calculation of non lifting potential flow about arbitrary three - dimensional bodies"
Theoretical Aerodynamics Section, Douglas Aircraft Company.
Report E.S. 40622. 1962.

/HY-23/ KOBUS J.M.

"Application de la méthode des singularités au problème des flotteurs cylindriques soumis à des oscillations harmoniques forcées de faible amplitude"
Thèse de Docteur-Ingénieur. Nantes, 1976.

/HY-24/ KORVIN-KROUKOVSKY B.V.

"Investigation of ship motions in regular waves"
Transaction S.N.A.M.E. Vol. 63 (385-435). 1955.

/HY-25/ LEBRETON J.C. - MARGNAC A.

"Calcul des mouvements d'un navire ou d'une plateforme amarrés dans la houle"
La Houille Blanche 5 (379-389). 1968.

/HY-26/ LIDTHILL M.J.

"On waves generated in dispersive systems by travelling forcing effects, with applications to the dynamics of rotating fluids"
Journal of Fluid Mechanics, Vol. 27 Part 4 (725-752). 1967.

/HY-27/ LOKEN A.E. - OLSEN O.A. - D.N.V.

"Diffraction theory and statistical methods to predict wave induced motions and loads for large structures"
Papers number, O.T.C., 2502, 1976.

/HY-28/ LUNDE J.K.

"On the linearized theory of wave resistance for displacement ships in steady and accelerated motion"
Transaction S.N.A.M.E., Vol. 59 (24-85). 1951.

/HY-29/ NEWMAN J.N.

"Marine Hydrodynamics"
The M.I.T. Press. Cambridge, Massachusetts, 1977.

/HY-30/ NEWMAN J.N.

"The damping and wave resistance of a pitching and heaving ship"
Journal of Ship Research, Vol. 3, 1959.

/HY-31/ SALVESEN N. - TUCK E.O. - FALTINSEN O.

"Ship motions and sea loads"
Transaction S.N.A.M.E., Vol. 78 (250-287). 1970.

/HY-32/ ST DENIS M. - WILLARD J. - PIERSON J.

"On the motions of ships in confused seas"
Transaction S.N.A.M.E., Vol. 61 (280-357). 1953.

/HY-33/ SRETENSKII L.N.

"The motion of a vibrator under the surface of a fluid"
Trudy Moskov. Mat. Obshch. 3 (3-14). 1954.

/HY-34/ TODD F.H.

"Some further experiments on single-screw merchant ship forms-series 60"
Transaction S.N.A.M.E., Vol. 61 (516-589). 1953.

/HY-35/ VUGTS J.H.

"The hydrodynamic forces and ship motions in waves"
Ph. D. Thesis. Delft, 1970.

/HY-36/ WEHAUSEN J.V. - LAITONE E.V.

"Surface waves"
Handbuch der Physik, Vol. 9 (446-778). Berlin, 1960.

/HY-37/ WEHAUSEN J.V.

"The motion of floating bodies"
Annual Review of Fluid Mechanics (237-268). 1971.

/HY-38/ ASSOCIATION DE RECHERCHES ACTION DES ÉLÉMENTS

"Comparison of the main numerical methods in water
wave diffraction and radiation"
Rapport I.F.P. 25987. 1978.

B.2 - MATHEMATIQUES

/MA-1/ ABRAMOWITZ M. - STEGUN I.A.

"Handbook of mathematical functions"
Dover Publications. 1967.

/MA-2/ ANGOT A.

"Compléments de mathématiques à l'usage des ingénieurs"
Masson & Cie. Paris, 1972.

/MA-3/ BASS J.

"Cours de mathématiques"
Masson & Cie. Paris, 1968 (3 volumes).

/MA-4/ COURANT R. - HILBERT D.

"Methoden der Mathematischen Physik"
Springer. Berlin, 1937 (2 volumes).

/MA-5/ GUEVEL P.

"Compléments de mathématiques"
Cours de la Section Spéciale d'Hydrodynamique Navale.
Nantes, 1973.

- /MA-6/ HELMS L.L.
"Introduction to potential theory"
John Wiley & Sons. New York, 1969.
- /MA-7/ IRVING J. - MULLINEUX N.
"Mathematics in physics and engineering"
Academic Press. New York and London, 1959.
- /MA-8/ KELLOG O.D.
"Foundation of potential theory"
Frederick Ungar Publishing Company. New York, 1929.
- /MA-9/ NEČAS J.
"Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques"
Masson & Cie. Paris, 1967.
- /MA-10/ RIESZ F. - NAGY B. Sz.
"Leçons d'analyse fonctionnelle"
Gauthiers-Villars. Paris, 1968.
- /MA-11/ ZABREYKO P.P. - KOSHELEV A.I. - KRASNOSEL'SKII M.A. - MIKHLIN S.G.
RAKOVSHCHIK L.S. - STET'SENKO V. Ya.
"Integral equations - a reference text"
Noordhoff International Publishing. Leyden, 1975.

B.3 - ANALYSE NUMERIQUE

- /AN-1/ DAUBISSE J.C.
"Some results on the smoothing by exponential series
for hydrodynamics problems"
A paraître.
- /AN-2/ DEMIDOVITCH B. - MARON I.
"Éléments de calcul numérique"
Editions Mir. Moscou 1973.
- /AN-3/ GERALD C.F.
"Applied Numerical analysis"
Addison-Wesley Publishing Company. New York, 1970.
- /AN-4/ NIELSEN K.L.
"Methods in numerical analysis"
Macmillan Company. New York, 1964.