

# **Les houles périodiques simples**

**Institut des Sciences de l'Ingénieur  
de Toulon et du Var**

**UNIVERSITE DE TOULON ET DU VAR**

par

Jean BOUGIS

1993

# Sommaire

<b>1. Introduction</b>	<b>01-05</b>
<b>2. Les modèles de houle</b>	<b>02-01</b>
2.1. Différents modèles de houle	02-01
2.2. Paramètres de description de la houle	02-02
2.3. Classification des modèles de houle	02-03
<b>3. Houle infinitésimale d'Airy</b>	<b>03-01</b>
3.1. Hypothèses et définitions	03-01
3.2. Construction de la fonction potentiel des vitesses	03-01
3.3. Equation de la surface libre	03-04
3.4. Champ de pression	03-05
3.5. Cinématique de la houle	03-06
3.5.1. Expression des vitesses	03-06
3.5.2. Expression des accélérations	03-07
3.5.3. Lignes de courant	03-08
3.5.4. Trajectoires	03-09
3.6. Energie de la houle	03-11
3.6.1. Energie potentielle de la houle	03-12
3.6.2. Energie cinétique de la houle	03-12
3.6.3. Energie totale de la houle	03-13
3.6.4. Répartition verticale de l'énergie de la houle	03-13
3.6.5. Transmission de l'énergie par la houle	03-15
3.6.6. Vitesse de propagation de l'énergie	03-17
3.6.7. Conservation du flux d'énergie	03-17
3.6.8. Signification de la vitesse de groupe	03-18
3.6.9. Domaine de validité de la houle d'Airy	03-19
<b>4. Houle d'amplitude finie</b>	<b>04-01</b>
4.1. Hypothèses et définitions	04-01
4.2. Construction de la fonction potentiel des vitesses	04-02
4.3. Equation de la surface libre	04-05
4.4. Champ de pression	04-07
4.5. Cinématique de la houle	04-07
4.5.1. Expression des vitesses	04-07
4.5.2. Expression des accélérations	04-09
4.6. Autres caractéristiques de la houle	04-10
4.7. Houles du troisième ordre	04-11
4.8. Houles de Miche	04-12
4.9. Domaine de validité	04-12
<b>5. Houle de Gerstner</b>	<b>05-01</b>
5.1. Equation de continuité	05-01
5.2. Champ de pression	05-02
5.3. Equation de la surface libre	05-04
5.3.1. Surfaces isobares	05-04
5.3.2. Surface libre	05-04
5.3.3. Profil limite de la surface libre	05-06
5.4. Cinématique de la houle	05-06
5.4.1. Expression de la vitesse	05-06
5.4.2. Expression de l'accélération	05-06

5.5. Vecteur tourbillon	05-07
5.6. Energie de la houle	05-07
5.6.1. Energie potentielle de la houle	05-07
5.6.2. Energie cinétique de la houle	05-08
5.6.3. Energie totale de la houle	05-08
5.7. Domaine de validité	05-09
<b>6. Les modèles de houle en faibles profondeurs</b>	<b>06-01</b>
6.1. Le modèle de houle cnoïdale	06-01
6.2. Le modèle de vague solitaire	06-02
<b>7. Les modèles numériques de houle</b>	<b>07-01</b>
7.1 Hypothèses et définitions	07-01
7.2. Développement de la fonction de courant	07-01
7.3. Domaine de validité	07-02
<b>8. Références</b>	<b>08-01</b>

# 1. Introduction

Le nom de vagues peut servir à désigner de nombreux phénomènes physiques de diverses origines (action du vent, tremblement de terre, explosion sous-marine, passage d'un navire, ...). Les seiches ou oscillations de longue période dans les ports, les barres des estuaires, les ondes de marée, les écoulements provenant de la rupture d'une digue ou d'un barrage sont aussi des vagues.

En mer, les vagues engendrées par le vent présentent des formes complexes. Le milieu étant dispersif, des ondes longues rattrapent des ondes plus courtes et les dépassent. Elles ne se propagent pas toutes dans la même direction, se croisent, donnant à la mer cet aspect chaotique et changeant d'un instant à l'autre. Le vent ou la variation de la bathymétrie entraînent des déferlements, les vagues se brisant dans un bouillonnement d'écume blanche.

Etant donné la grande diversité d'origine des vagues, il est certain qu'elles ne peuvent toutes être décrites par un même modèle mathématique, l'aspect de la mer étant fort différent de celui des houles sinusoïdales créées par un batteur dans un canal.

La propagation de la houle a fait l'objet de très nombreux développements mathématiques. Les différentes théories qui ont été élaborées rendent compte avec plus ou moins de précision des divers aspects de la houle : forme de la surface libre, vitesse et accélérations, transport de masse, champ des pressions, ...

L'objectif de ce document n'est évidemment pas de décrire tous ces types de vagues en leur associant un ou plusieurs modèles mathématiques, mais, plus modestement, de donner une vision d'ensemble des houles simples et des méthodes utilisées pour les décrire ou les prévoir.

## 2. Les modèles de houle

### 2.1. Différents modèles de houle

La propagation des ondes périodiques simples a fait l'objet de très nombreux développements mathématiques. Les différentes théories qui ont été élaborées rendent compte avec plus ou moins de précision des divers aspects de la houle : forme de la surface libre, vitesses et accélérations, transport de masse, champ des pressions, ...

Les hydrodynamiciens se sont intéressés à ces houles simples dans la mesure où il est possible, sinon aisé, d'étudier leurs propriétés à partir de modèles mathématiques (équations) ou physiques (canal à houle).

Les houles simples se classent en cinq grandes catégories, qui sont caractérisées par les fonctions ou les méthodes mathématiques qui servent à les décrire. Elles correspondent à des approches mathématiques différentes d'une seule et même réalité physique dans la mesure où des lames venant du large passent progressivement du stade de houle sinusoïdale à celui de la houle de Miche, puis à celui de la houle cnoïdale et de l'onde solitaire avant de déferler sur la côte.

**Les houles simples sinusoïdales** dont les études ont été réalisées successivement par F.J. Gerstner /1802/, S.D. Poisson /1816/, G. Green /1839/, G.B. Airy /1845/, G.G. Stokes /1847/, W.J.M. Rankine /1863/, Lord Rayleigh /1876/, T. Levi-Civita /1925/, A.I. Nekrasov /1921/, D.J. Struik /1926/, Dubreuil-Jacotin /1934/, L. Skjelbreia et J.A. Hendrinks /1961/.

**Les houles de Miche** dont la découverte et l'étude théorique est due à R. Miche /1944/.

**Les houles cnoïdales** qui empruntent leur nom aux fonctions trigonométriques elliptiques dont le cosinus est noté "cn". Elles ont été étudiées par J. Boussinesq /1891/, D.J. Korteweg et G. de Vries /1895/, G.H. Keulegan et G.W. Patterson /1940/, J.B. Keller /1948/, W. Littman /1957/, R.L. Wiegel /1960/, J.D. Fenton /1979/.

**Les ondes solitaires** qui correspondent au cas limite des houles cnoïdales de périodes et de longueur d'onde infinies. Leur étude est due à J.S. Russel /1838/, J. Boussinesq /1872/, Lord Rayleigh /1876/, J.M.A. Cowan /1891/, Weinstein /1926/, G.H. Keulegan et G.W. Patterson /1940/, R.A. Bagnold /1947/, G.H. Keulegan /1948/, W.H. Munk /1949/, Y. Iwasa /1955/, J.G. Housley et D.C. Taylor /1959/.

**Les modèles numériques de houles** sont obtenus à partir de méthodes d'optimisation numérique. La plus connue d'entre elle est la fonction de courant. Les principaux travaux dans ce domaine sont dus à J.E. Chapple /1961/ et R.G. Dean /1965/.

Il convient également de citer les travaux concernant la superposition de la houle et du courant, et en particulier ceux dus à A.J. Abdullah /1949/, P.D. Thompson /1949/, F. Biesel /1950/, J.C. Burns /1953/, J.N. Hunt /1955/, J. Wehausen /1965/, O.H. Shemdin /1972/, D. Fenton /1979/.

## 2.2. Paramètres de description de la houle

Une houle simple, également appelée onde périodique simple, est la propagation, à vitesse constante, et sans altération de forme, d'un mouvement périodique spatial.

Tous les modèles de houle sont définis à partir des mêmes paramètres explicités ci-après.

- La houle incidente, se propage en ligne droite dans la direction définie par l'angle  $\beta$  que font avec l'axe  $Ox$  les plans directeurs de l'écoulement ( $\beta=0$  correspond à une houle se propageant suivant l'axe  $Ox$ ). Les équations seront écrites dans le plan directeur  $O;r,z$  où  $r=x\cos\beta+y\sin\beta$ .
- La longueur d'onde  $\lambda$  de la houle est, par définition, la distance qui sépare deux crêtes ou deux creux consécutifs.
- La houle est périodique en temps et en espace, c'est à dire que pour un observateur immobile, le phénomène se reproduit à l'identique avec une période  $T$  ;  $\omega$  désigne la pulsation du phénomène.  $T$  est l'intervalle de temps qui sépare le passage au même endroit de deux crêtes consécutives.
- la hauteur crête à creux  $H$  de la houle est la différence de niveau entre les crêtes et les creux de la houle. Elle est égale à deux fois l'amplitude  $a$  dans le cas d'une onde sinusoïdale.
- La vitesse de propagation, ou célérité, de l'onde est la vitesse à laquelle le mouvement périodique se propage sans altération de forme.
- la profondeur du fluide  $h$  qui sépare le fond de la position de la surface libre au repos.

Dans l'étude des vagues, il est souvent plus fructueux d'utiliser des paramètres sans dimension définis ci-après.

- La cambrure  $\varepsilon_c$  de la houle est le rapport  $H/\lambda$  entre sa hauteur crête à creux  $H$  et sa longueur d'onde  $\lambda$ .
- La hauteur relative  $\varepsilon_H$  de la houle est le rapport  $H/h$  entre sa hauteur crête à creux  $H$  et la profondeur  $h$ .
- La longueur d'onde relative de la houle  $\varepsilon_\lambda$  est le rapport  $\lambda/h$  entre sa longueur d'onde  $\lambda$  et la profondeur  $h$ .
- Le paramètre d'Ursell  $\varepsilon_U = \varepsilon_c \cdot \varepsilon_\lambda^3$  est défini par  $H\lambda^2/h^3$ .

A l'origine des temps ( $t=0$ ), la houle incidente possède une crête située à l'origine des abscisses dans le repère de l'étude. La figure 2.1 matérialise ces différents paramètres.

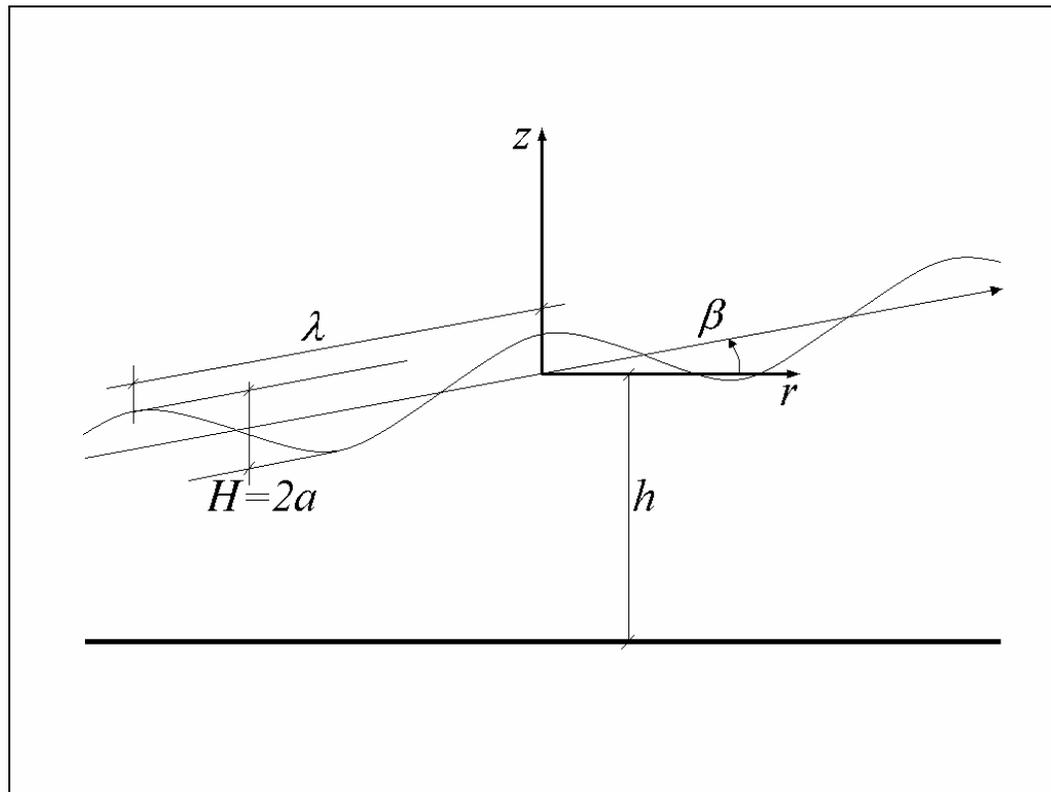


Figure 2.1 : Paramètres de définition de la houle.

### 2.3. Classification des modèles de houle

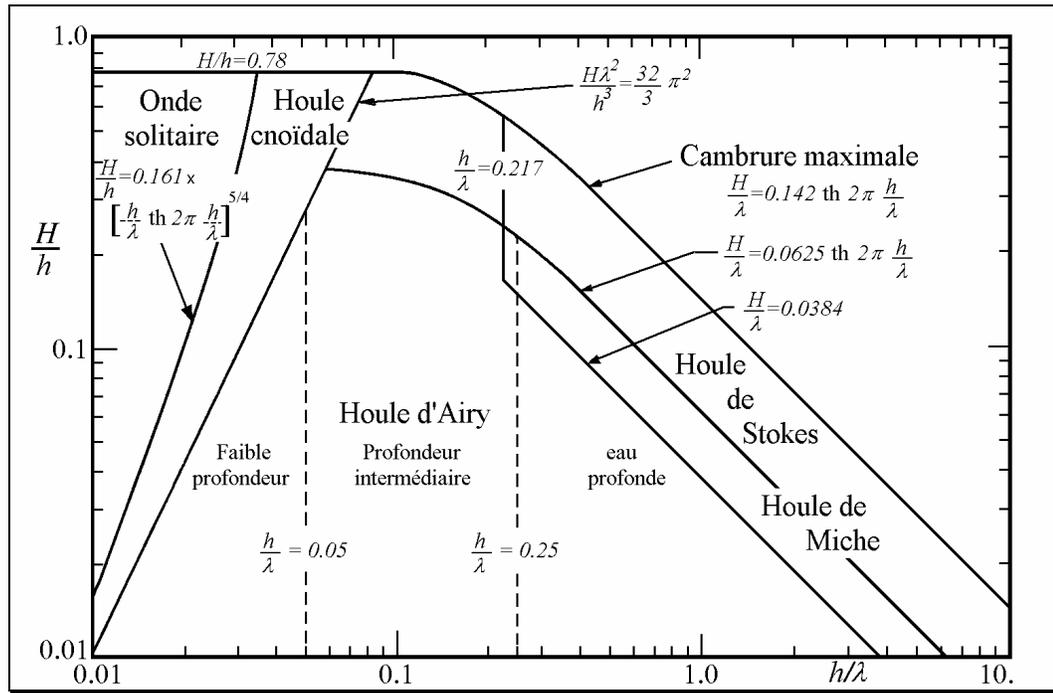
Le tableau 2.1 donne une idée de ces différentes théories de houles.

Modèle	Houle	Linéarité	Rotationalité	Profondeur	Pression Hydrostatique	Transport de masse	$\varepsilon_H = H/h$	$\varepsilon_U = H\lambda^2/h^3$	$\varepsilon_\lambda = \lambda/h$	$\varepsilon_c = H/\lambda$
Airy	faible hauteur	oui	non	grande	non	non	$\varepsilon_H \ll 1$	$\varepsilon_U \ll 1$	$\varepsilon_\lambda < 2$	$\varepsilon_c \ll 1 - 1^{\text{er}} \text{ ordre}$
Airy	faible hauteur	oui	non	finie	non	non	$\varepsilon_H \ll 1$	$\varepsilon_U \ll 1$	$2 < \varepsilon_\lambda < 20$	$\varepsilon_c \ll 1 - 1^{\text{er}} \text{ ordre}$
Airy	onde longue	oui	non	faible	oui	non	$\varepsilon_H \ll 1$	$\varepsilon_U \ll 1$	$20 < \varepsilon_\lambda$	$\varepsilon_c \ll 1 - 1^{\text{er}} \text{ ordre}$
Stokes	faible hauteur	non	non	finie	non	faible	$\varepsilon_H \ll 1$	$\varepsilon_U < 10$	$2 < \varepsilon_\lambda < 20$	$\varepsilon_c \ll 1 - n^{\text{ème}} \text{ ordre}$
Miche	faible hauteur	non	oui	finie	non	non	$\varepsilon_H \ll 1$	$\varepsilon_U < 10$	$2 < \varepsilon_\lambda < 20$	$\varepsilon_c \ll 1 - n^{\text{ème}} \text{ ordre}$
Dubreuil-Jacotin	faible hauteur	non	oui	finie	non	non	$\varepsilon_H \ll 1$	$\varepsilon_U < 10$	$2 < \varepsilon_\lambda < 20$	$\varepsilon_c \ll 1 - n^{\text{ème}} \text{ ordre}$
Gertsner	trochoïdale	non	oui	grande	non	non	$\varepsilon_H \ll 1$	$\varepsilon_U < 10$	$\varepsilon_\lambda < 2$	$\varepsilon_c < 1/\pi = 0.318$
Korteweg - De Vries	cnoidale	non	non	faible	oui	faible	$\varepsilon_H < 1 - n^{\text{ème}} \text{ ordre}$	$\varepsilon_U \sim 1$	$10 < \varepsilon_\lambda$	-
Scott - Russel	onde solitaire	non	non	faible	oui	oui	$\varepsilon_H < 1 - n^{\text{ème}} \text{ ordre}$	$\varepsilon_U \sim 1$	$10 < \varepsilon_\lambda$	-
Boussinesq	onde solitaire	non	oui	faible	non	oui	$\varepsilon_H < 1 - 1^{\text{er}} \text{ ordre}$	$\varepsilon_U \sim 1$	$10 < \varepsilon_\lambda$	-
Dean	fonction courant	non	non	finie	oui	faible	-	-	-	numérique 2D
Airy	onde longue	non	non	très faible	oui	oui	-	$1 \ll \varepsilon_U$	$20 < \varepsilon_\lambda$	numérique 2D
Riemann-Massau-Stockler	onde longue	non	non	très faible	oui	oui	-	$1 \ll \varepsilon_U$	$20 < \varepsilon_\lambda$	caractéristiques 1D

Tableau 2.1 : Caractéristiques des principaux modèles de houles.

Les modèles les plus utilisés sont :

- la houle infinitésimale d'Airy du premier ordre ;
- les houles d'amplitudes finies de Stokes d'ordre supérieurs ou égaux à deux ;
- la houle cnoidale ;
- la vague solitaire ;
- la fonction de courant de Dean.



**Figure 2.2 :** Domaines d'applications des différentes théories de houle en fonctions de la profondeur et de la longueur d'onde relatives d'après P.D. Komar, complétée pour la houle de R. Miche d'après J. Larras

### 3. Houle infinitésimale d'Airy

#### 3.1. Hypothèses et définitions

Les hypothèses sous lesquelles le modèle de Stokes du premier ordre, généralement appelé houle d'Airy, a été établi sont les suivantes :

- Le fluide est parfait, incompressible et pesant.
- L'écoulement est irrotationnel dans le champ de pesanteur terrestre.
- La profondeur d'eau est constante, voire infinie.
- La pression atmosphérique au dessus de la surface libre est constante.
- L'amplitude et la cambrure de la houle incidente sont suffisamment faibles pour que les termes d'ordres supérieurs à l'unité soient négligeables (en particulier, les carrés des vitesses et des accélérations absolues des particules fluides à proximité de la surface libre) et qu'il soit possible d'écrire la condition de surface libre sur le plan horizontal qui coïncide avec l'interface liquide-atmosphère à l'équilibre statique.

#### 3.2. Construction de la fonction potentiel des vitesses

D'après ces différentes hypothèses, le modèle de houle d'Airy est défini par une fonction potentiel des vitesses  $\phi(M;t)$  solution du problème aux limites :

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \Delta\phi(M;t) &= 0 & \forall M \in D & \quad (-h \leq z \leq 0) \\ \frac{\partial}{\partial z} \phi(M;t) &= 0 & \forall M \in F & \quad (z = -h) \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(M;t) + g \frac{\partial}{\partial z} \phi(M;t) &= 0 & \forall M \in SL & \quad (z = 0) \end{aligned}$$

La solution périodique de ce problème peut être recherchée par la méthode de séparation des variables, c'est à dire sous la forme d'un produit de Laplace :

$$(3.2) \quad \phi(M, t) = R(r) Z(z) F(t)$$

L'équation de Laplace se traduit alors par la relation :

$$(3.3) \quad \frac{\Delta\phi(M;t)}{R(r)Z(z)F(t)} = \frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$$

Cette relation étant valable pour tout point  $M$  du domaine fluide, elle impose :

$$(3.4) \quad \frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} = +K \quad \text{et} \quad \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -K$$

expressions dans lesquelles  $K$  désigne une constante.

La périodicité suivant l'axe  $Or$  de la solution recherchée conduit naturellement à poser :  $K=-k^2$ . Le potentiel des vitesses se présente alors sous la forme :

$$(3.5) \quad \phi(M, t) = A \sin(kr + \psi_r) [B \operatorname{sh} kz + C \operatorname{ch} kz] F(t)$$

La prise en compte de la condition de glissement sur le fond permet d'écrire :

$$(3.6) \quad \phi(M, t) = A \frac{\operatorname{ch} k(z+h)}{\operatorname{ch} kh} \sin(kr + \psi_r) F(t)$$

La condition de surface libre impose que la fonction temporelle soit solution de l'équation :

$$(3.7) \quad \ddot{F}(t) + (gk \operatorname{th} kh) F(t) = 0$$

d'où la forme générale de  $F(t)$  :

$$(3.8) \quad F(t) = D \sin(\omega t + \psi_t)$$

avec la relation de dispersion qui relie la période, la longueur d'onde et célérité :

$$(3.9) \quad \omega^2 = gk \operatorname{th} kh$$

Il en résulte donc la forme périodique la plus générale du potentiel des vitesses :

$$(3.10) \quad \phi(M, t) = \frac{A \operatorname{ch} k(z+h)}{2 \operatorname{ch} kh} [\cos(kr - \omega t + \psi_r - \psi_t) - \cos(kr + \omega t + \psi_r + \psi_t)]$$

qui met en évidence l'existence de deux ondes progressives, l'une se propage dans le sens des  $r$  croissants et qui correspond donc à la solution recherchée, l'autre se propage dans le sens des  $r$  décroissants et doit donc être éliminée. D'où :

$$(3.11) \quad \phi(M, t) = \frac{A \operatorname{ch} k(z+h)}{2 \operatorname{ch} kh} \cos(kr - \omega t + \psi_r - \psi_t)$$

Le phénomène correspondant à cette onde est périodique dans le temps avec la période  $T$ , et dans l'espace avec la période  $\lambda$ , ces caractéristiques étant définies ci-après.

Lorsque la profondeur relative est grande ( $h/\lambda \geq M_\infty$ ), ou lorsqu'elle est suffisamment petite ( $h/\lambda \leq M_0$ ), la formule générale admet des comportements asymptotiques dont les limites de validité seront discutées plus loin.

## ➤ Période de la houle

$$\begin{aligned}
 (3.12) \quad T &= \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g}} & \frac{h}{\lambda} \geq M_\infty \\
 T &= \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g} \coth 2\pi \frac{h}{\lambda}} & \forall \frac{h}{\lambda} \\
 T &= \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\lambda}{\sqrt{gh}} \left[ 1 + \frac{2\pi^2}{3} \left( \frac{h}{\lambda} \right)^2 + O\left( \frac{h}{\lambda} \right)^4 \right] & \frac{h}{\lambda} \leq M_0
 \end{aligned}$$

## ➤ Longueur d'onde de la houle

$$\begin{aligned}
 (3.13) \quad \lambda &= \frac{2\pi}{k_\infty} = \frac{2\pi g}{\omega^2} = \frac{g}{2\pi} T^2 & \frac{h}{\lambda} \geq M_\infty \\
 \lambda &= \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi g}{\omega^2} \operatorname{th} 2\pi \frac{h}{\lambda} = \frac{g}{2\pi} T^2 \operatorname{th} 2\pi \frac{h}{\lambda} & \forall \frac{h}{\lambda} \\
 \lambda &= \frac{2\pi}{k} = gT^2 \left[ \frac{h}{\lambda} - \frac{4\pi^2}{3} \left( \frac{h}{\lambda} \right)^3 + O\left( \frac{h}{\lambda} \right)^5 \right] & \frac{h}{\lambda} \leq M_0
 \end{aligned}$$

## ➤ Célérité de la houle

$$\begin{aligned}
 (3.14) \quad C &= \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k_\infty} = \frac{g}{\omega} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} & \frac{h}{\lambda} \geq M_\infty \\
 C &= \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} = \frac{g}{\omega} \operatorname{th} 2\pi \frac{h}{\lambda} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \operatorname{th} 2\pi \frac{h}{\lambda}} & \forall \frac{h}{\lambda} \\
 C &= \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{gh} \left[ 1 - \frac{2\pi^2}{3} \left( \frac{h}{\lambda} \right)^2 + O\left( \frac{h}{\lambda} \right)^4 \right] & \frac{h}{\lambda} \leq M_0
 \end{aligned}$$

où  $k_\infty$  désigne le nombre d'onde en profondeur illimitée défini par :

$$(3.15) \quad k_\infty = \frac{\omega^2}{g}$$

et  $k$  le nombre d'onde en profondeur finie, relié à  $k_\infty$  par la relation de dispersion :

$$\begin{aligned}
 (3.16) \quad k &= k_\infty & \frac{h}{\lambda} \geq M_\infty \\
 k \operatorname{th} kh &= k_\infty & \forall \frac{h}{\lambda} \\
 k &= \sqrt{\frac{k_\infty}{h}} \left[ 1 + \frac{2\pi^2}{3} \left( \frac{h}{\lambda} \right)^2 + O\left( \frac{h}{\lambda} \right)^4 \right] & \frac{h}{\lambda} \leq M_0
 \end{aligned}$$

Il convient de remarquer que pour un observateur se déplaçant parallèlement à l'axe  $Or$ , à la vitesse constante  $C$ , le mouvement paraît permanent ; d'où le nom d'onde progressive.

### 3.3. Equation de la surface libre

L'équation de la dénivelée de la surface libre est obtenue en recherchant les altitudes  $\eta(M,t)$  pour lesquelles la pression est nulle dans l'équation de Bernoulli - Lagrange linéarisée. Il vient donc :

$$(3.17) \quad \eta(M;t) = -\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \phi(M;t) \Big|_{z=0} = -\frac{A\omega}{2g} \sin(kr - \omega t + \psi_r - \psi_t)$$

Le potentiel des vitesses n'est défini qu'à une fonction temporelle près. Pour rester compatible avec le problème aux limites (3.1), celui-ci ne peut être que de la forme  $Bt$ . Comme la dénivelée moyenne de la surface libre sur une longueur d'onde est égale à  $-B\lambda/g$ ,  $B$  doit être nulle.

En introduisant la hauteur crête à creux qui est égale à  $H$ , il vient :

$$(3.18) \quad \phi(M;t) = \frac{Hg}{2\omega} \frac{\text{ch } k(z+h)}{\text{ch } kh} \cos(kr - \omega t + \psi_r - \psi_t)$$

Comme, par ailleurs, il a été convenu qu'à l'origine des temps la dénivelée de la houle est à son maximum, la phase  $\Psi_r - \Psi_t$  est égale à  $-\pi/2$  ; d'où l'expression finale de la fonction potentiel des vitesses :

$$(3.19) \quad \phi(M;t) = \frac{Hg}{2\omega} \frac{\text{ch } k(z+h)}{\text{ch } kh} \sin(kr - \omega t)$$

ou encore, en utilisant la relation de dispersion :

$$(3.20.1) \quad \phi(M;t) = \frac{H\lambda}{2T} \frac{\text{ch } k(z+h)}{\text{sh } kh} \sin(kr - \omega t)$$

puis en introduisant la célérité de l'onde :

$$(3.20.2) \quad \phi(M;t) = \frac{C\lambda}{2\pi} \frac{kH}{4} \frac{2}{\text{sh } kh} \text{ch } k(z+h) \sin(kr - \omega t)$$

cette expression peut également s'écrire à partir de notations complexes, sous la forme :

$$(3.21) \quad \phi(M;t) = \Re \left\{ \tilde{\phi}(M) \exp(-i\omega t) \right\}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 (3.22) \quad \tilde{\phi}(M) &= -i \frac{Hg}{2\omega} \exp(k_{\infty} z) \exp(ik_{\infty} r) & \frac{h}{\lambda} &\geq M_{\infty} \\
 \tilde{\phi}(M) &= -i \frac{Hg}{2\omega} \frac{\operatorname{ch} k(z+h)}{\operatorname{ch} kh} \exp(ikr) & \forall \frac{h}{\lambda} & \\
 \tilde{\phi}(M) &= -i \frac{Hg}{2\omega} \left[ 1 + 2\pi^2 \left( \frac{h}{\lambda} \right)^2 \frac{z^2 + 2zh}{h^2} + O\left( \frac{h}{\lambda} \right)^4 \right] \exp(ikr) & \frac{h}{\lambda} &\leq M_0
 \end{aligned}$$

Le problème est donc résolu dès qu'on connaît la hauteur crête à creux  $H$  (ou l'amplitude  $a=H/2$ ) et, soit la longueur d'onde  $\lambda$ , soit la période  $T$ .

L'équation de la surface libre s'écrit en définitive :

$$(3.23) \quad \eta(M; t) = \frac{H}{2} \cos(kr - \omega t)$$

soit, en posant :

$$(3.24) \quad \eta(M; t) = \Re\{\tilde{\eta}(M) \exp(-i\omega t)\}$$

Quelle que soit la profondeur, la dénivelée complexe s'écrit :

$$\begin{aligned}
 (3.25) \quad \tilde{\eta}(M) &= \frac{H}{2} \exp(ikr) & \frac{h}{\lambda} &\geq M_{\infty} \\
 \tilde{\eta}(M) &= \frac{H}{2} \exp(ikr) & \forall \frac{h}{\lambda} & \\
 \tilde{\eta}(M) &= \frac{H}{2} \exp(ikr) & \frac{h}{\lambda} &\leq M_0
 \end{aligned}$$

### 3.4. Champ de pression

La pression est obtenue à partir de son expression tirée de l'équation de Bernoulli - Lagrange linéarisée :

$$(3.26) \quad p(M; t) = -\rho g z - \rho \frac{\partial}{\partial t} \phi(M; t)$$

D'où :

$$(3.27) \quad p(M; t) = -\rho g z + \Re\{\tilde{p}(M) \exp(-i\omega t)\}$$

avec, pour la pression dynamique complexe :

$$\begin{aligned}
 \tilde{p}(M) &= \frac{\rho g H}{2} \exp(k_{\infty} z) \exp(ik_{\infty} r) & \frac{h}{\lambda} &\geq M_{\infty} \\
 \tilde{p}(M) &= \frac{\rho g H}{2} \frac{\operatorname{ch} k(z+h)}{\operatorname{ch} kh} \exp(ikr) & \forall \frac{h}{\lambda} \\
 \tilde{p}(M) &= \frac{\rho g H}{2} \left[ 1 + 2\pi^2 \left( \frac{h}{\lambda} \right)^2 \frac{z^2 + 2zh}{h^2} + O\left( \frac{h}{\lambda} \right)^4 \right] \exp(ikr) & \frac{h}{\lambda} &\leq M_0
 \end{aligned}
 \tag{3.28}$$

Dans ces conditions, une surface isobare, définie par une pression  $p(M;t) = -\rho g z_0 = Cte$ , a pour équation :

$$\begin{aligned}
 z - z_0 &= \frac{H}{2} \exp(k_{\infty} z) \cos(k_{\infty} r - \omega t) & \frac{h}{\lambda} &\geq M_{\infty} \\
 z - z_0 &= \frac{H}{2} \frac{\operatorname{ch} k(z+h)}{\operatorname{ch} kh} \cos(kr - \omega t) & \forall \frac{h}{\lambda} \\
 z - z_0 &= \frac{H}{2} \left[ 1 + 2\pi^2 \left( \frac{h}{\lambda} \right)^2 \frac{z^2 + 2zh}{h^2} + O\left( \frac{h}{\lambda} \right)^4 \right] \cos(kr - \omega t) & \frac{h}{\lambda} &\leq M_0
 \end{aligned}
 \tag{3.29}$$

soit en tenant compte du caractère infinitésimal de la perturbation de pression :

$$\begin{aligned}
 z - z_0 &= \frac{H}{2} \exp(k_{\infty} z_0) \cos(k_{\infty} r - \omega t) & \frac{h}{\lambda} &\geq M_{\infty} \\
 z - z_0 &= \frac{H}{2} \frac{\operatorname{ch} k(z_0+h)}{\operatorname{ch} kh} \cos(kr - \omega t) & \forall \frac{h}{\lambda} \\
 z - z_0 &= \frac{H}{2} \left[ 1 + 2\pi^2 \left( \frac{h}{\lambda} \right)^2 \frac{z_0^2 + 2z_0 h}{h^2} + O\left( \frac{h}{\lambda} \right)^4 \right] \cos(kr - \omega t) & \frac{h}{\lambda} &\leq M_0
 \end{aligned}
 \tag{3.30}$$

L'isobare  $p(M;t) = -\rho g z_0 = Cte$  est donc une surface qui se déduit de la dénivelée de la surface libre par une translation verticale  $z_0$  et une affinité de rapport :

$$\begin{aligned}
 &\exp(k_{\infty} z_0) & \frac{h}{\lambda} &\geq M_{\infty} \\
 &\frac{\operatorname{ch} k(z_0+h)}{\operatorname{ch} kh} & \forall \frac{h}{\lambda} \\
 &\left[ 1 + 2\pi^2 \left( \frac{h}{\lambda} \right)^2 \frac{z_0^2 + 2z_0 h}{h^2} + O\left( \frac{h}{\lambda} \right)^4 \right] & \frac{h}{\lambda} &\leq M_0
 \end{aligned}
 \tag{3.31}$$

### 3.5. Cinématique de la houle

#### 3.5.1. Expression des vitesses

La vitesse du fluide est obtenue en chaque point à partir de la relation :

$$(3.32) \quad \vec{V}(M;t) = \vec{\nabla} \phi(M;t)$$

D'où en posant :

$$(3.33) \quad \vec{V}(M;t) = \Re \left\{ \vec{\tilde{V}}(M) \exp(-i\omega t) \right\}$$

il vient, en grande profondeur relative  $\frac{h}{\lambda} \geq M_\infty$  :

$$(3.34.1) \quad \begin{aligned} \tilde{V}_r(M) &= +\frac{H}{2} \omega \exp(k_\infty z) \exp(ik_\infty r) \\ \tilde{V}_z(M) &= -i \frac{H}{2} \omega \exp(k_\infty z) \exp(ik_\infty r) \end{aligned}$$

dans le cas général  $\forall \frac{h}{\lambda}$  :

$$(3.34.2) \quad \begin{aligned} \tilde{V}_r(M) &= +\frac{H}{2} \omega \frac{\text{ch } k(z+h)}{\text{sh } kh} \exp(ikr) \\ \tilde{V}_z(M) &= -i \frac{H}{2} \omega \frac{\text{sh } k(z+h)}{\text{sh } kh} \exp(ikr) \end{aligned}$$

et en faible profondeur relative  $\frac{h}{\lambda} \leq M_0$  :

$$(3.34.3) \quad \begin{aligned} \tilde{V}_r(M) &= +\frac{H}{2} \omega \frac{1}{2\pi} \left(\frac{h}{\lambda}\right)^{-1} \left[ 1 + 2\pi^2 \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 \left( \frac{z^2 + 2zh}{h^2} + \frac{2}{3} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{h}{\lambda}\right)^4 \right] \exp(ikr) \\ \tilde{V}_z(M) &= -i \frac{H}{2} \omega \frac{z+h}{h} \left[ 1 + \frac{2}{3} \pi^2 \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 \frac{z^2 + 2zh}{h^2} + \mathcal{O}\left(\frac{h}{\lambda}\right)^4 \right] \exp(ikr) \end{aligned}$$

En tout point et à chaque instant, la composante horizontale de la vitesse et la dénivelée de la surface libre sont en phase.

Dans la crête, la vitesse horizontale passe par un maximum dirigé dans le sens de la propagation de la houle, tandis que dans les creux elle atteint son maximum dans le sens inverse.

### 3.5.2. Expression des accélérations

L'accélération des particules du fluide est obtenue en chaque point à partir de la relation :

$$(3.35) \quad \vec{\gamma}(M;t) = \frac{d}{dt} \vec{V}(M;t) = \frac{\partial}{\partial t} \vec{V}(M;t) + \left( \vec{V}(M;t) \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{V}(M;t)$$

D'où, en remarquant que le deuxième terme est du second ordre tandis que la dérivée temporelle partielle est du premier ordre, et en posant :

$$(3.36) \quad \bar{\gamma}(M;t) = \Re\left\{\tilde{\gamma}(M)\exp(-i\omega t)\right\}$$

il vient, au premier ordre, en grande profondeur relative  $\frac{h}{\lambda} \geq M_\infty$  :

$$(3.37.1) \quad \begin{aligned} \tilde{\gamma}_r(M) &= -i\frac{H}{2}\omega^2 \exp(k_\infty z) \exp(ik_\infty r) \\ \tilde{\gamma}_z(M) &= -\frac{H}{2}\omega^2 \exp(k_\infty z) \exp(ik_\infty r) \end{aligned}$$

dans le cas général  $\forall \frac{h}{\lambda}$  :

$$(3.37.2) \quad \begin{aligned} \tilde{\gamma}_r(M) &= -i\frac{H}{2}\omega^2 \frac{\text{ch } k(z+h)}{\text{sh } kh} \exp(ikr) \\ \tilde{\gamma}_z(M) &= -\frac{H}{2}\omega^2 \frac{\text{sh } k(z+h)}{\text{sh } kh} \exp(ikr) \end{aligned}$$

et en faible profondeur relative  $\frac{h}{\lambda} \leq M_0$  :

$$(3.37.3) \quad \begin{aligned} \tilde{\gamma}_r(M) &= -i\frac{H}{2}\omega^2 \frac{1}{2\pi} \left(\frac{h}{\lambda}\right)^{-1} \left[1 + 2\pi^2 \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{z^2 + 2zh}{h^2} + \frac{2}{3}\right) + O\left(\frac{h}{\lambda}\right)^4\right] \exp(ikr) \\ \tilde{\gamma}_z(M) &= -\frac{H}{2}\omega^2 \frac{z+h}{h} \left[1 + \frac{2}{3}\pi^2 \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 \frac{z^2 + 2zh}{h^2} + O\left(\frac{h}{\lambda}\right)^4\right] \exp(ikr) \end{aligned}$$

### 3.5.3. Lignes de courant

Puisque l'écoulement est régi par un plan directeur, il est possible d'associer au potentiel des vitesses  $\phi(M;t)$  le potentiel complexe :

$$(3.38) \quad \chi(M;t) = \frac{Hg}{2\pi} \frac{1}{\text{ch } kh} \sin[(kr - \omega t) + ik(z+h)] = \frac{Hg}{2\pi} \frac{1}{\text{ch } kh} \sin 2\pi \left[ \frac{\xi}{\lambda} - \frac{t}{T} \right]$$

Le potentiel complexe est donc une fonction analytique de la variable complexe  $\xi$  définie par :

$$(3.39) \quad \xi = r + i(z+h)$$

La partie imaginaire du potentiel des vitesses complexe étant la fonction de courant  $\psi(M;t)$ , cette dernière a pour expression :

$$(3.40) \quad \psi(M;t) = \frac{Hg}{2\omega} \frac{\text{sh } k(z+h)}{\text{ch } kh} \cos(kr - \omega t)$$

L'équation des lignes de courant tangentes au vecteur vitesse à chaque instant  $t$  sont alors obtenues en écrivant que  $\psi(M;t)$  est constante :

$$(3.41) \quad \text{sh } k(z+h) \cos(kr - \omega t) = Cte$$

La figure 3.1 montre les lignes de courant qui correspondent à la description de l'écoulement dans le mode de représentation d'Euler.

### 3.5.4. Trajectoires

Pour obtenir les équations du mouvement dans le mode de représentation de Lagrange et donc les équations paramétriques des trajectoires, il faut résoudre le système d'équations différentielles :

$$(3.42) \quad \begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= u(r, z; t) = + \frac{H}{2} \omega \frac{\text{ch } k(z+h)}{\text{sh } kh} \cos(kr - \omega t) \\ \frac{dz}{dt} &= v(r, z; t) = + \frac{H}{2} \omega \frac{\text{sh } k(z+h)}{\text{sh } kh} \sin(kr - \omega t) \end{aligned}$$

Si il n'est pas possible de déterminer analytiquement la solution de ce système, il est toutefois possible d'en donner une solution approchée à partir de l'hypothèse des mouvements infinitésimaux.

Les composantes de la vitesse sont de l'ordre de  $H\omega/2$  ; les particules fluides subissent donc, pendant la période  $T$ , des déplacements de l'ordre de  $H/2$ , ce qui était prévisible avant tout calcul pour les composantes verticales.

Durant une période, les termes  $kr=2\pi r/\lambda$  et  $kz=2\pi z/\lambda$  varient ainsi comme le rapport  $\pi H/\lambda$  lequel est faible par hypothèse. Il est donc possible d'écrire :

$$(3.43) \quad \begin{aligned} \frac{dr}{dt} &\approx u(r_0, z_0; t) = + \frac{H}{2} \omega \frac{\text{ch } k(z_0+h)}{\text{sh } kh} \cos(kr_0 - \omega t) \\ \frac{dz}{dt} &\approx v(r_0, z_0; t) = + \frac{H}{2} \omega \frac{\text{sh } k(z_0+h)}{\text{sh } kh} \sin(kr_0 - \omega t) \end{aligned}$$

expressions dans lesquelles  $r_0$  et  $z_0$  désignent les coordonnées des positions moyennes d'une particule déterminée au cours d'une période.

Dans ces conditions l'intégration est immédiate, il vient :

$$(3.44) \quad \begin{aligned} r &\approx -\frac{H}{2} \frac{\operatorname{ch} k(z_0 + h)}{\operatorname{sh} kh} \sin(kr_0 - \omega t) + C_r \\ z &\approx +\frac{H}{2} \frac{\operatorname{sh} k(z_0 + h)}{\operatorname{sh} kh} \cos(kr_0 - \omega t) + C_z \end{aligned}$$

Ce qui montre que les trajectoires sont des ellipses centrées au point  $M_0(C_r, C_z)$ , dont les axes sont parallèles à  $Or$  et  $Oz$ . Les constantes d'intégration s'identifient à  $r_0$  et  $z_0$  d'où les équations des trajectoires :

$$(3.45) \quad \begin{aligned} r &\approx r_0 - \frac{H}{2} \frac{\operatorname{ch} k(z_0 + h)}{\operatorname{sh} kh} \sin(kr_0 - \omega t) \\ z &\approx z_0 + \frac{H}{2} \frac{\operatorname{sh} k(z_0 + h)}{\operatorname{sh} kh} \cos(kr_0 - \omega t) \end{aligned}$$

Le grand axe est horizontal, tandis que le petit axe est vertical. Les longueurs de ces demis axes ont respectivement pour valeurs :

$$(3.46) \quad \begin{aligned} \alpha &= +\frac{H}{2} \frac{\operatorname{ch} k(z_0 + h)}{\operatorname{sh} kh} \\ \beta &= +\frac{H}{2} \frac{\operatorname{sh} k(z_0 + h)}{\operatorname{sh} kh} \end{aligned}$$

Comme  $\alpha$  et  $\beta$  s'annulent avec  $H$ ,  $M_0(r_0, z_0)$  est la position au repos de la particule qui tourne autour de ce point.

La distance focale, qui s'exprime sous la forme :

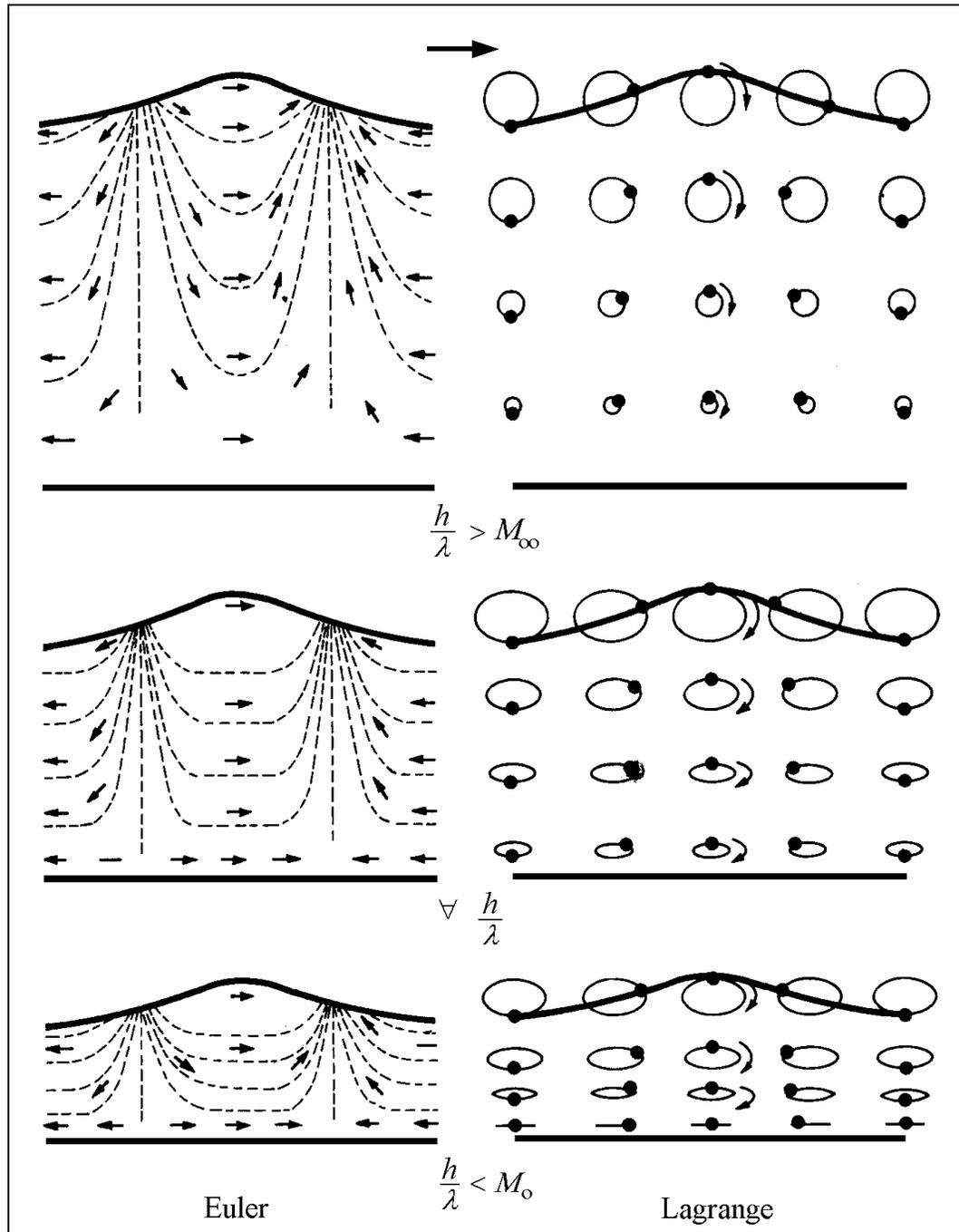
$$(3.47) \quad 2e = 2\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \frac{H}{\operatorname{sh} kh}$$

est indépendante de la position de la particule  $M_0$ , toutes les ellipses ont donc la même distance focale.

Les ellipses, trajectoires des particules, sont décrites en un temps égal à une période  $T$  à vitesse angulaire constante  $\omega$ . Au sommet de leurs orbites, les particules sont animées d'une vitesse horizontale dont la direction est celle de la propagation de l'onde.

Ces ellipses tendent vers des cercles lorsque la profondeur tend vers l'infini.

Les trajectoires étant fermées, il n'y a pas de transport de masse. Au premier ordre, l'eau n'est pas entraînée par l'onde.



**Figure 3.1 :** Mouvements orbitaux dans les houles progressives. Les orbites sont des ellipses d'autant plus aplaties que la profondeur d'eau est faible ou que les particules fluides sont proches du fond. A la fin de chaque cycle de houle, chaque particule revient à sa position initiale.

### 3.6. Energie de la houle

Pour un fluide parfait incompressible, l'énergie totale du volume fluide  $\tau$  contenu entre deux plans d'abscisses  $r$  et  $r+\lambda$  et deux plans directeurs distants d'une longueur unitaire se compose uniquement de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique.

### 3.6.1. Energie potentielle de la houle

En choisissant le plan de cote  $z=0$  comme plan de référence pour la mesure des altitudes, l'énergie potentielle du fluide  $\tau$  a pour expression :

$$(3.48) \quad E_p = \rho g \iiint_S z dr dz$$

en désignant par  $S$  la section du volume  $\tau$  par un plan directeur de l'écoulement.

Il vient donc :

$$(3.49) \quad E_p = \rho g \int_r^{r+\lambda} \int_{-h}^{\eta(M;t)} z dz dr = \frac{1}{2} \rho g \int_r^{r+\lambda} \left[ \frac{H^2}{4} \cos^2(kr - \omega t) - h^2 \right] dr$$

L'énergie potentielle moyenne de la houle par unité de surface  $E_p$  est ainsi égale à :

$$(3.50) \quad E_p = \frac{1}{16} \rho g H^2 \lambda - \frac{1}{2} \rho g h^2 \lambda$$

Le second terme de cette expression représente l'énergie potentielle du fluide  $\tau$  lorsque celui-ci est au repos. L'énergie potentielle attachée à l'existence de la houle est donc seulement :

$$(3.51) \quad E_{ph} = \frac{1}{16} \rho g H^2 \lambda$$

Elle s'annule avec la hauteur de la houle et correspond donc à un niveau d'énergie nul au repos. C'est l'énergie qu'il aurait fallu fournir au fluide  $\tau$  initialement au repos, pour donner à la surface libre sa forme ondulée, le fluide étant supposé encore immobile dans l'état final.

### 3.6.2. Energie cinétique de la houle

L'énergie cinétique du fluide  $\tau$  a pour expression :

$$(3.52) \quad E_{ch} = \frac{1}{2} \rho \iiint_S V^2(M;t) dr dz$$

d'où, en exprimant le carré de la vitesse à partir de ses composantes :

$$(3.53) \quad E_{ch} = \frac{1}{8} \rho g H^2 \int_r^{r+\lambda} \int_{-h}^{\eta(M;t)} \frac{\omega^2}{g} \frac{\text{ch}^2 k(z+h) - \sin^2(kr - \omega t)}{\text{sh}^2 kh} dz dr$$

ce qui donne, une fois l'équation intégrée en  $z$  :

$$(3.54) \quad E_{ch} = \frac{1}{8} \rho g H^2 \int_r^{r+\lambda} \left[ \frac{1}{2} \frac{\text{sh } k(\eta+h) \text{ ch } k(\eta+h)}{\text{sh } kh \text{ ch } kh} + k \left( \frac{1}{2} - \sin^2(kr - \omega t) \right) \frac{\eta+h}{\text{sh } kh \text{ ch } kh} \right] dr$$

En ne gardant que le premier ordre en  $\eta$  puis en intégrant par rapport à  $r$ , il vient :

$$(3.55) \quad E_{ch} = \frac{1}{16} \rho g H^2 \lambda$$

### 3.6.3. Energie totale de la houle

L'énergie totale de la houle, pour une longueur d'onde  $\lambda$  et par unité de longueur de crête, est donc :

$$(3.56) \quad E_h = E_{ph} + E_{ch} = \frac{1}{8} \rho g H^2 \lambda$$

L'énergie potentielle moyenne de la houle par unité de surface  $e_{ph}$  est égale à l'énergie cinétique moyenne de la houle par unité de surface  $e_{ch}$ . L'énergie spécifique de la houle est l'énergie totale moyenne de la houle par unité de surface  $e_h = e_{ph} + e_{ch}$ . Elle a pour expression :

$$(3.57) \quad e_h = \frac{1}{8} \rho g H^2$$

Elle ne dépend, avec le degré d'approximation retenu, que de la hauteur crête à creux de la houle.

### 3.6.4. Répartition verticale de l'énergie de la houle

L'évaluation de la répartition verticale de l'énergie est assez délicate, et il convient tout d'abord de bien préciser le domaine fluide  $\tau(z_0; t)$  dont l'énergie doit être calculée.

Le domaine de calcul est constitué des particules fluides qui se trouvent, au repos, dans le domaine  $\tau_0(z_0)$  limité par deux plans verticaux d'abscisses respectives  $r_0$  et  $r_0 + \lambda$ , deux plans directeurs distants d'une longueur unitaire et deux plans horizontaux de cotes respectives  $z_0$  et  $z=0$  (surface libre).

L'énergie potentielle de la houle  $E_p(z_0)$  comprise entre la surface libre  $\eta(M; t)$  et la surface fluide déformée dont  $z_0$  est la cote au repos s'écrit d'après (3.48) :

$$(3.58) \quad E_p(z_0) = \rho g \int_{r(M_0)}^{r(M_0)+\lambda} \int_{z(M_0)}^{\eta(M_0;t)} z dz dr = \frac{1}{2} \rho g \int_{r(M_0)}^{r(M_0)+\lambda} [\eta^2 - z^2] dr$$

Soit en explicitant la dénivelée de la surface libre et la cote  $z$  en fonction des coordonnées au repos (3.45) :

$$(3.59) \quad E_p(z_0) = \frac{1}{2} \rho g \int_{r_0}^{r_0+\lambda} \left[ \frac{H^2}{4} \cos^2(kr_0 - \omega t) - \left( z_0 + \frac{H}{2} \frac{\text{sh } k(z_0 + h)}{\text{sh } kh} \cos(kr_0 - \omega t) \right)^2 \right] dr_0$$

L'énergie potentielle moyenne de la houle par unité de surface  $E_p(z_0)$  est ainsi égale à :

$$(3.60) \quad E_p(z_0) = \frac{1}{16} \rho g H^2 \lambda \left[ 1 - \frac{\text{sh}^2 k(z_0 + h)}{\text{sh}^2 kh} \right] - \frac{1}{2} \rho g z_0^2 \lambda$$

Le dernier terme de cette expression représente l'énergie potentielle du fluide compris entre la cote  $z_0$  et la surface libre lorsqu'il est au repos. L'énergie potentielle attachée à l'existence de la houle est donc seulement :

$$(3.61) \quad E_{ph}(z_0) = \frac{1}{16} \rho g H^2 \lambda \left[ 1 - \frac{\text{sh}^2 k(z_0 + h)}{\text{sh}^2 kh} \right]$$

Il est évident que lorsque  $z_0$  est égal à  $-h$ , ce résultat s'identifie à celui obtenu au paragraphe 3.6.1. A noter que la définition du domaine était alors moins pointilleuse dans la mesure où le fond plan et horizontal, comme la surface libre, reste une surface fluide à chaque instant de l'écoulement.

D'après (3.53), l'énergie cinétique du fluide compris dans le domaine  $\tau(z;t)$  a pour expression :

$$(3.62) \quad E_{ch}(z_0) = \frac{1}{8} \rho g H^2 \int_{r(M_0)}^{r(M_0)+\lambda} \int_z^{\eta(M_0;t)} \frac{\omega^2}{g} \frac{\text{ch}^2 k(z+h) - \sin^2(kr - \omega t)}{\text{sh}^2 kh} dz dr$$

ce qui donne, une fois intégrée en  $z$  :

$$(3.63) \quad E_{ch}(z_0) = \frac{1}{8} \rho g H^2 \int_{r_0}^{r_0+\lambda} \left[ \frac{\text{sh } k(\eta + h) \text{ch } k(\eta + h) - \text{sh } k(z_0 + h) \text{ch } k(z_0 + h)}{2 \text{sh } kh \text{ch } kh} + k \left( \frac{1}{2} - \sin^2(kr_0 - \omega t) \right) \frac{(\eta + h) - (z_0 + h)}{\text{sh } kh \text{ch } kh} \right] dr_0$$

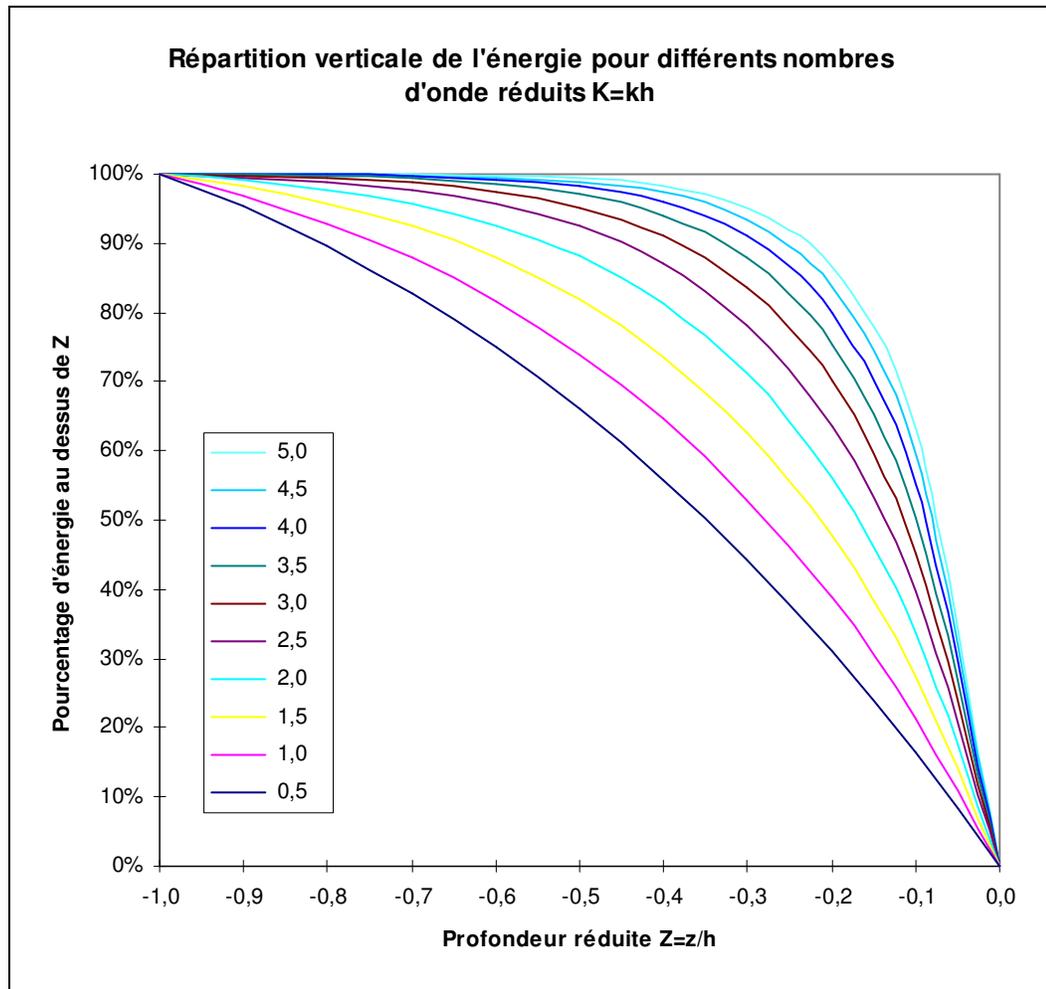
En ne gardant que le premier ordre en  $\eta$  (et donc en  $H$ ) puis en intégrant par rapport à  $r_0$ , il vient :

$$(3.64) \quad E_{ch}(z_0) = \frac{1}{16} \rho g H^2 \lambda \left[ 1 - \frac{\text{sh } 2k(z_0 + h)}{\text{sh } 2kh} \right]$$

D'où l'expression de l'énergie spécifique totale de la houle comprise entre la cote  $z$  et la surface libre :

$$(3.65) \quad e_h(z) = \frac{1}{8} \rho g H^2 \left[ 1 - \frac{\text{sh } 2k(z+h)}{2 \text{sh } 2kh} - \frac{\text{sh}^2 k(z+h)}{2 \text{sh}^2 kh} \right]$$

$$= \frac{1}{8} \rho g H^2 \left[ 1 - \frac{\text{sh } k(z+h) \text{sh } k(z+2h)}{\text{sh } kh \text{sh } 2kh} \right]$$



**Figure 3.2 :** Répartition verticale de l'énergie spécifique de la houle en % d'énergie au dessus de la profondeur réduite  $z/h$ .

### 3.6.5. Transmission de l'énergie par la houle

Soit un plan vertical, d'abscisse invariable  $r$ , et orienté par une normale  $\vec{n}$  dirigée dans le sens de la propagation de la houle. Ce plan partage le fluide en deux domaines, l'un amont  $\tau_1$  et l'autre aval  $\tau_2$ . Le travail que le

milieu  $\tau_1$  exerce sur le milieu  $\tau_2$  par unité de longueur de crête pendant le temps  $dt$  a pour expression :

$$(3.66) \quad d\mathbf{T} = dt \int_{-h}^{\eta(M;t)} \vec{V}(M;t) \cdot (p(M;t)\vec{n}) dz = dt \int_{-h}^{\eta(M;t)} p(M;t)u(M;t) dz$$

soit en remplaçant la pression et la vitesse horizontale par leurs expressions respectives tirées de (3.28) et (3.34) puis en intégrant, il vient :

$$(3.67) \quad d\mathbf{T} = dt \frac{1}{2} \rho g H \frac{\omega}{\text{sh } kh} \cos(kr - \omega t) \left[ I_1 + \frac{H \cos(kr - \omega t)}{2 \text{ch } kh} I_2 \right]$$

avec :

$$(3.68) \quad I_1 = - \int_{-h}^{\eta(M;t)} \text{ch } k(z+h) z dz \quad \text{et} \quad I_2 = + \int_{-h}^{\eta(M;t)} \text{ch}^2 k(z+h) dz$$

En ne retenant que les termes du premier ordre en  $H$  pour  $I_1$  et les termes constants pour  $I_2$ , il vient :

$$(3.69) \quad d\mathbf{T} = +dt \frac{1}{2} \rho g H \frac{\omega}{k^2} \text{th } \frac{kh}{2} \cos(kr - \omega t) + dt \frac{1}{8} \rho g H^2 \frac{\omega}{k} \left[ 1 + \frac{2kh}{\text{sh } 2kh} \right] \cos^2(kr - \omega t)$$

Le flux d'énergie moyen transmis par la houle, par unité de temps et par unité de largeur, a donc pour expression :

$$(3.70) \quad \begin{aligned} \mathbf{P} &= \frac{1}{16} \rho g H^2 C & \frac{h}{\lambda} \geq M_\infty \\ \mathbf{P} &= \frac{1}{16} \rho g H^2 \left[ 1 + \frac{2kh}{\text{sh } 2kh} \right] C & \forall \frac{h}{\lambda} \\ \mathbf{P} &= \frac{1}{16} \rho g H^2 \left[ 2 - \frac{8}{3} \pi^2 \left( \frac{h}{\lambda} \right)^2 + O\left( \frac{h}{\lambda} \right)^4 \right] C & \frac{h}{\lambda} \leq M_0 \end{aligned}$$

Cette puissance moyenne transmise est indépendante de l'abscisse  $r$  du plan de séparation des domaines  $\tau_1$  et  $\tau_2$ . Il y a donc transfert d'énergie dans le sens de la propagation de la houle, ce qui implique l'existence d'une source et d'un puits d'énergie, d'intensités égales.

En laboratoire, l'énergie est fournie, à l'amont, par le batteur de houle, et l'énergie est absorbée, à l'aval, par des amortisseurs.

Dans la nature, l'énergie est fournie, à l'amont, par le vent, et l'énergie est dissipée, à l'aval, au voisinage des côtes.

Cette énergie est considérable : pour  $\lambda=100$  mètres et  $h=10$  mètres, il vient :  $T=10.7$  secondes,  $C=9.3$  mètres par seconde et  $P=13.8 H^2$  C.V. par mètre de côte. Il est regrettable qu'on ne sache pas capter cette très importante source d'énergie.

### 3.6.6. Vitesse de propagation de l'énergie

La puissance transmise à travers un plan vertical, d'abscisse  $r$ , peut se mettre sous la forme :

$$(3.71) \quad P = \frac{1}{8} \rho g H^2 C_g = e_h C_g$$

Le flux d'énergie apparaît donc comme le produit de l'énergie totale moyenne de la houle par la vitesse de groupe  $C_g$  qui est la vitesse à laquelle elle se propage :

$$(3.72) \quad \begin{aligned} C_g &= \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2} C & \frac{h}{\lambda} \geq M_\infty \\ C_g &= \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{2kh}{\text{sh } 2kh} \right] C & \forall \frac{h}{\lambda} \\ C_g &= \frac{d\omega}{dk} = \left[ 1 - \frac{4}{3} \pi^2 \left( \frac{h}{\lambda} \right)^2 + O\left( \frac{h}{\lambda} \right)^4 \right] C & \frac{h}{\lambda} \leq M_0 \end{aligned}$$

Il est clair, d'après sa définition, que la vitesse de groupe est toujours inférieure à la célérité des ondes.

### 3.6.7. Conservation du flux d'énergie

D'après les équations (3.69) et (3.71), le flux d'énergie instantané transmis par la houle, par unité de temps et par unité de largeur, a pour expression :

$$(3.73) \quad E(x,t) = \frac{dT}{dt} = \frac{1}{2} \rho g H \frac{\omega}{k^2} \text{th} \frac{kh}{2} \cos(kr - \omega t) + 2e_h C_g \cos^2(kr - \omega t)$$

La conservation de la moyenne temporelle de l'énergie de la houle s'écrit donc pour une surface de largeur unité et de longueur  $dx$  :

$$(3.74) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_0^T e_h dt dx + \int_0^T E(x+dx,t) dt - \int_0^T E(x,t) dt = 0$$

d'où :

$$(3.75) \quad \frac{\partial}{\partial t}(e_h T) + \frac{\partial}{\partial x}(e_h C_g T) = 0$$

Ce qui s'écrit encore sous la forme :

$$(3.76) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{e_h}{\omega} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{e_h}{\omega} C_g \right) = 0$$

et de manière plus générale en s'affranchissant des coordonnées privilégiées :

$$(3.77) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{e_h}{\omega} \right) + \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{e_h}{\omega} \vec{C}_g \right) = 0$$

### 3.6.8. Signification de la vitesse de groupe

Comme la célérité d'une onde dépend de sa période, les différentes composantes d'un train d'onde se déplacent avec un différentiel de vitesse. Il en résulte une déformation du train d'onde, les ondes les plus longues se déplaçant plus vite que les plus courtes.

La dénivelée complexe de surface libre d'un train d'ondes monodirectionnel de nombres d'ondes voisins de  $k_0$  compris entre  $k_0 - \Delta k$  et  $k_0 + \Delta k$  s'écrit :

$$(3.78) \quad \tilde{\eta}(r;t) = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} \frac{H(k)}{2} \exp[i(kr - \omega(k)t + \psi(k))] dk$$

expression dans laquelle  $\psi(k)$  désigne la phase des composantes du train d'onde à l'origine des temps et de l'espace.

Si l'étendu du domaine de nombres d'onde est suffisamment petite  $\Delta k \ll k_0$ , il est licite de développer la pulsation de la houle au premier ordre au voisinage du nombre d'onde  $k_0$ , et de l'exprimer en fonction de la vitesse de groupe :

$$(3.79) \quad \omega(k) \approx \omega_0 + \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k_0} (k - k_0) = \omega_0 + C_{g0} (k - k_0)$$

L'égalité (3.78) devient alors en développant également la phase :

$$(3.80) \quad \tilde{\eta}(r;t) = \exp[i(k_0 r - \omega_0 t + \psi_0)] \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} \frac{H(k)}{2} \exp[i(k - k_0)(r - C_{g0} t + \psi'_0)] dk$$

L'intégrale qui représente l'enveloppe instantanée de la dénivelée du train de vague n'est fonction que de la variable  $(r - C_{g0} t + \psi'_0)$ . Il en résulte que cette enveloppe se déplace à la vitesse  $C_{g0}$  ; d'où son nom de vitesse de groupe. Comme la vitesse de groupe dépend de la période, les trains d'ondes pour lesquels  $\Delta k$  n'est pas infinitésimal se déforment au cours de leur propagation.

### 3.6.9. Domaine de validité de la houle d'Airy

La houle d'Airy a été obtenue en faisant l'hypothèse qu'au niveau de la surface libre, le terme de l'équation de Bernoulli-Lagrange faisant intervenir le carré des vitesses est négligeable devant le terme instationnaire faisant intervenir la dérivée temporelle du potentiel des vitesses.

Dans ces conditions, si  $\varepsilon$  désigne l'importance relative du terme négligé, la relation suivante doit être vérifiée :

$$(3.81) \quad \frac{1}{2} \left( \frac{H g k}{2 \omega} \right)^2 [1 + \text{th}^2 kh] \leq \varepsilon \frac{H g}{2}$$

d'où :

$$(3.82) \quad \frac{H}{\lambda} \leq \frac{2\varepsilon}{\pi [1 + \text{th}^2 kh]} \text{th} 2\pi \frac{h}{\lambda} \leq \frac{2\varepsilon}{\pi} \text{th} 2\pi \frac{h}{\lambda}$$

Ainsi, en retenant un ordre de grandeur pour les importances relatives  $\varepsilon=0.1$ , il vient :

$$(3.83) \quad \frac{H}{\lambda} \leq 0.0637 \text{th} 2\pi \frac{h}{\lambda}$$

La valeur de 0.0625 proposée par A.M. Muir Wood /1969/ est donc tout à fait justifiée. Elle correspond à  $\varepsilon = 0.0982$ .

Il convient de noter que lorsque la longueur d'onde relative devient très grande, cette relation dégénère pour donner :

$$(3.84) \quad \frac{H}{h} \leq 4\varepsilon$$

soit 0.393 avec la valeur de  $\varepsilon$  retenue.

En ce qui concerne la limite entre la formulation générale et le cas des faibles profondeurs, il suffit de noter qu'en ne conservant que le premier terme de chaque développement, le premier terme négligé est toujours inférieur à :

$$(3.85) \quad \frac{4\pi^2}{3} \frac{h}{\lambda}$$

Il s'en déduit que l'adoption d'une limite pour  $h/\lambda$  égale à 0.05 conduit à une erreur maximale de l'ordre de 3%, tandis qu'une limite de 0.025 permet d'obtenir une précision de 1%.

En ce qui concerne la limite entre la formulation générale et le cas des grandes profondeurs, l'approximation réalisée consiste à assimiler  $\text{th } kh$  à l'unité, et à négliger  $\exp(-2kh)$  devant l'unité. Il s'en déduit que l'adoption d'une limite pour  $h/\lambda$  égale à 0.25 conduit à une erreur maximale de l'ordre de 10%, tandis qu'une limite de 0.50 permet d'obtenir mieux que 1%.

Pour ces raisons, il semble préférable de retenir respectivement pour limites :

$$(3.86) \quad M_0 = 0.025 \quad \text{et} \quad M_\infty = 0.50$$

## 4. Houles d'amplitude finie

Dans le modèle de houle infinitésimal d'Airy, tous les termes faisant intervenir la hauteur de la houle  $H$  à des ordres supérieurs ou égaux à deux ont été négligés. Lorsque la hauteur crête à creux croît, cette approximation n'est plus correcte. Il est alors nécessaire de retenir les termes d'ordre supérieurs pour modéliser la houle.

C'est G.G. Stokes /1880/ qui le premier présenta une théorie de houle d'amplitude finie de deuxième approximation en profondeur finie.

La preuve de la convergence des développements en série dans le cas de la profondeur illimitée fut apportée par A.I. Nekrasov /1924/ et T. Lévi-Civita /1925/, puis en profondeur finie par D.J. Struik /1926/.

Des travaux sur les extensions de la méthode ont été réalisés par L.E. Borgman et J.E. Chappellear /1958/, L. Skjelbreia /1959/ (troisième ordre), L. Skjelbreia et J.A. Hendrickson /1961/ (cinquième ordre). F. Ursell /1953/, S.C. De /1955/ puis L. Skjelbreia /1959/ ont précisé le domaine de validité de ces formulations.

L.W. Schwartz /1974/ a réussi à obtenir des développements de tous ordres après une transformation conforme et des changements de variables.

### 4.1. Hypothèses et définitions

Les hypothèses de base du modèle de Stokes d'ordres supérieurs sont :

- Le fluide est parfait, incompressible et pesant.
- L'écoulement est irrotationnel dans le champ de pesanteur terrestre.
- La profondeur d'eau est constante, voire infinie.
- La pression atmosphérique au dessus de la surface libre est constante.
- L'amplitude et la cambrure de la houle incidente sont finies mais suffisamment faibles pour que le potentiel des vitesses puisse être développée sous la forme :

$$(4.1) \quad \phi(M;t) = H\phi^{(1)}(M;t) + H^2\phi^{(2)}(M;t) + H^3\phi^{(3)}(M;t) + H^4\phi^{(4)}(M;t) + \dots$$

- Lorsque qu'un terme doit être évalué sur la surface libre de cote  $z(M;t)$ , son développement en série de Taylor est supposé être licite. Le potentiel des vitesses pourra donc s'écrire :

$$(4.2) \quad \phi(x, y, z; t) = \phi(x, y, 0; t) + z(x, y; t) \frac{\partial \phi}{\partial z}(x, y, 0; t) + O(z^2)$$

Au voisinage de la surface libre. Les termes  $\phi^{(n)}(M;t)$  sont des fonctions sinusoïdales de  $n[k(x\cos\beta + y\sin\beta) - \omega t]$  qui contiennent les dérivées du potentiel des vitesses. Le premier terme  $H\phi^{(1)}(M;t)$  correspond à la

linéarisation présentée au chapitre précédent. Vue la complexité des développements, ceux-ci ne sont généralement pas poussés au delà du cinquième ordre.

Le développement de Stokes prend comme variable l'amplitude de la composante de Fourier du premier ordre qui serait obtenue par l'analyse d'une telle houle. Le rapport  $H/\lambda$  intervient dans le développement et doit rester petit, ainsi que le rapport  $H/h$ . Par ailleurs, le paramètre d'Ursell  $H\lambda^2/h^3$  ne doit pas dépasser la valeur 10.

Dans ce qui suit, la houle de deuxième ordre en profondeur finie sera construite. Seuls les principaux résultats seront donnés pour les autres ordres d'approximations.

#### 4.2. Construction de la fonction potentiel des vitesses

Etant données les hypothèses faites, les différentes fonctions sont écrites sous la forme suivante :

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \phi(M;t) &= H\phi^{(1)}(M;t) + H^2\phi^{(2)}(M;t) + O(H^3) \\ \vec{V}(M;t) &= H\vec{V}^{(1)}(M;t) + H^2\vec{V}^{(2)}(M;t) + O(H^3) \\ z(M;t) &= Hz^{(1)}(M;t) + H^2z^{(2)}(M;t) + O(H^3) \\ C &= C_0 + HC_1 + O(H^2) \end{aligned}$$

étant rappelé qu'au premier ordre, le problème aux limites (4.4) est toujours vérifié :

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \Delta\phi^{(1)} &= 0 & \forall M \in D \quad (-h \leq z \leq 0) \\ \frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial z} &= 0 & \forall M \in F \quad (z = -h) \\ \frac{\partial^2\phi^{(1)}}{\partial t^2} + g \frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial z} &= 0 & \forall M \in SL \quad (z = 0) \\ gz^{(1)} + \frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial t} &= 0 & \forall M \in SL \quad (z = 0) \end{aligned}$$

en écrivant le problème aux limites non linéaire complet, il vient :

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \Delta\phi &= 0 & \forall M \in D \quad (-h \leq z \leq 0) \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} &= 0 & \forall M \in F \quad (z = -h) \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{\partial V^2}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{V} \cdot \vec{\nabla} V^2 &= 0 & \forall M \in SL \quad (z = 0) \\ gz + \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2} V^2 &= 0 & \forall M \in SL \quad (z = 0) \end{aligned}$$

d'où, en extrayant les termes du deuxième ordre, il vient :

$$\begin{aligned}
 (4.6) \quad & \Delta\phi^{(2)} = 0 && \forall M \in D \quad (-h \leq z \leq 0) \\
 & \frac{\partial}{\partial z} \phi^{(2)} = 0 && \forall M \in F \quad (z = -h) \\
 & \frac{\partial^2 \phi^{(2)}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} = -\frac{\partial V^{(1)2}}{\partial t} - z^{(1)} \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z \partial t^2} - gz^{(1)} \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z^2} && \forall M \in SL \quad (z = 0) \\
 & gz^{(2)} + \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial t} = -z^{(1)} \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z \partial t} - \frac{1}{2} V^{(1)2} = 0 && \forall M \in SL \quad (z = 0)
 \end{aligned}$$

Une fois exprimés les deuxièmes membres des équations en fonction des résultats connus concernant le premier ordre, il s'agit de résoudre le problème aux limites suivant :

$$\begin{aligned}
 (4.7) \quad & \Delta\phi^{(2)} = 0 && \forall M \in D \quad (-h \leq z \leq 0) \\
 & \frac{\partial}{\partial z} \phi^{(2)} = 0 && \forall M \in F \quad (z = -h) \\
 & \frac{\partial^2 \phi^{(2)}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} = -\frac{3}{4} \frac{H^2 g k \omega}{\text{sh } 2kh} \sin 2(kr - \alpha) && \forall M \in SL \quad (z = 0) \\
 & gz^{(2)} + \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial t} = -z^{(1)} \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z \partial t} - \frac{1}{2} V^{(1)2} = 0 && \forall M \in SL \quad (z = 0)
 \end{aligned}$$

Un raisonnement analogue de celui qui a été tenu au chapitre précédent montre, d'une part, que la solution périodique générale du problème homogène est celle du premier ordre et, d'autre part, qu'une solution périodique progressive particulière du problème non homogène ne peut s'écrire que sous la forme suivante :

$$(4.8) \quad \phi^{(2)}(M; t) = \frac{A}{2} \frac{\text{ch } 2k(z+h)}{\text{ch } 2kh} \sin 2(kr - \alpha)$$

La célérité de l'onde étant égale à la dérivée temporelle de la variable d'abscisse  $r=r_0+Ct$ , le premier ordre de la condition cinématique de surface libre permet de déterminer le terme  $C_0$  qui est inchangé. Le deuxième ordre de cette même condition contient un unique terme proportionnel à  $\sin(kr - \alpha)$  qui doit donc être nul, ce qui permet de montrer que le terme  $C_1$  de la célérité est nul. L'égalité des termes proportionnels à  $\sin 2(kr - \alpha)$  permet ensuite de déterminer la constante A. Il vient, une fois les calculs effectués :

$$(4.9) \quad \phi^{(2)}(M; t) = \frac{3\pi H^2}{16T} \frac{\text{ch } 2k(z+h)}{\text{sh } 4kh} \sin 2(kr - \alpha)$$

Cette expression est conforme au choix de phase fait au paragraphe 2.2. Un potentiel du premier ordre en cosinus conduirait à changer le signe du potentiel de deuxième ordre, mais il resterait en sinus.

Le phénomène correspondant à cette onde est périodique dans le temps avec la période  $T$ , et dans l'espace avec la période  $\lambda$ , ces caractéristiques étant définies ci-après.

Lorsque la profondeur relative est grande ( $h/\lambda \geq M_\infty$ ), ou lorsqu'elle est assez petite ( $h/\lambda \leq M_0$ ), la formule générale admet des comportements asymptotiques dont les limites de validité seront discutées plus loin.

➤ **Période de la houle**

$$(4.10) \quad \begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g}} & \frac{h}{\lambda} &\geq M_\infty \\ T &= \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g} \coth 2\pi \frac{h}{\lambda}} & \forall \frac{h}{\lambda} \\ T &= \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\lambda}{\sqrt{gh}} \left[ 1 + \frac{2\pi^2}{3} \left( \frac{h}{\lambda} \right)^2 + O\left( \frac{h}{\lambda} \right)^4 \right] & \frac{h}{\lambda} &\leq M_0 \end{aligned}$$

➤ **Longueur d'onde de la houle**

$$(4.11) \quad \begin{aligned} \lambda &= \frac{2\pi}{k_\infty} = \frac{2\pi g}{\omega^2} = \frac{g}{2\pi} T^2 & \frac{h}{\lambda} &\geq M_\infty \\ \lambda &= \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi g}{\omega^2} \operatorname{th} 2\pi \frac{h}{\lambda} = \frac{g}{2\pi} T^2 \operatorname{th} 2\pi \frac{h}{\lambda} & \forall \frac{h}{\lambda} \\ \lambda &= \frac{2\pi}{k} = gT^2 \left[ \frac{h}{\lambda} - \frac{4\pi^2}{3} \left( \frac{h}{\lambda} \right)^3 + O\left( \frac{h}{\lambda} \right)^5 \right] & \frac{h}{\lambda} &\leq M_0 \end{aligned}$$

➤ **Célérité de la houle**

$$(3.12) \quad \begin{aligned} C &= \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k_\infty} = \frac{g}{\omega} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} & \frac{h}{\lambda} &\geq M_\infty \\ C &= \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} = \frac{g}{\omega} \operatorname{th} 2\pi \frac{h}{\lambda} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \operatorname{th} 2\pi \frac{h}{\lambda}} & \forall \frac{h}{\lambda} \\ C &= \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{gh} \left[ 1 - \frac{2\pi^2}{3} \left( \frac{h}{\lambda} \right)^2 + O\left( \frac{h}{\lambda} \right)^4 \right] & \frac{h}{\lambda} &\leq M_0 \end{aligned}$$

La célérité de l'approximation de deuxième ordre étant inchangée par rapport au premier ordre, la relation de dispersion est la même pour les deux ordres :

$$(4.13) \quad k \operatorname{th} kh = k_\infty$$

où  $k$  désigne le nombre d'onde en profondeur finie, et  $k_\infty$  le nombre d'onde en profondeur illimitée défini par :

$$(4.14) \quad k_{\infty} = \frac{\omega^2}{g}$$

$k$  est relié à  $k_{\infty}$  par la relation de dispersion :

$$(4.15) \quad \begin{aligned} k &= k_{\infty} & \frac{h}{\lambda} &\geq M_{\infty} \\ \text{th } kh &= k_{\infty} h & \forall \frac{h}{\lambda} \\ k &= \sqrt{\frac{k_{\infty}}{h}} \left[ 1 + \frac{2\pi^2}{3} \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 + O\left(\frac{h}{\lambda}\right)^4 \right] & \frac{h}{\lambda} &\leq M_0 \end{aligned}$$

Il convient de remarquer que pour un observateur se déplaçant parallèlement à l'axe  $Or$ , à la vitesse constante  $C$ , le mouvement paraît permanent ; d'où le nom d'onde progressive.

### 4.3. Equation de la surface libre

Le potentiel des vitesses n'est défini qu'à une fonction temporelle près. Pour rester compatible avec les problèmes aux limites (4.4) et (4.6), celle-ci ne peut être que de la forme  $Bt$ .

L'équation de la dénivelée de la surface libre est obtenue en recherchant les altitudes  $z$  pour lesquelles la pression est nulle dans l'équation de Bernoulli-Lagrange. Compte tenu de l'expression de la fonction potentiel des vitesses au deuxième ordre, il vient donc d'après les troisièmes équations des problèmes aux limites (4.4) et (4.6) :

$$(4.16) \quad \eta(M;t) = \frac{H}{2} \cos(kr - \alpha t) + \frac{\pi H^2}{8\lambda} \frac{3 - \text{th}^2 kh}{\text{th}^3 kh} \cos 2(kr - \alpha t) - \frac{\pi H^2}{4\lambda} \frac{1}{\text{sh } 2kh} - \frac{B}{g}$$

La dénivelée moyenne de la surface libre étant nulle, Il s'ensuit que le potentiel des vitesses s'écrit au deuxième ordre :

$$(4.17) \quad \phi(M;t) = + \frac{H\lambda}{2T} \frac{\text{ch } k(z+h)}{\text{sh } kh} \sin(kr - \alpha t) + \frac{3\pi H^2}{16T} \frac{\text{ch } 2k(z+h)}{\text{sh}^4 kh} \sin 2(kr - \alpha t) - \frac{\pi g H^2}{4\lambda} \frac{t}{\text{sh } 2kh}$$

cette expression peut également s'écrire à partir des notations complexes, sous la forme suivante :

$$(4.18) \quad \phi(M;t) = \Re\{\tilde{\phi}^{(1)}(M) \exp(-i\alpha t)\} + \Re\{\tilde{\phi}^{(2)}(M) \exp(-2i\alpha t)\} - \frac{\pi g H^2}{4\lambda} \frac{t}{\text{sh } 2kh}$$

avec, en grande profondeur :

$$(4.19.1) \quad \begin{aligned} \tilde{\phi}^{(1)}(M) &= -i \frac{H\lambda}{2T} \exp(k_{\infty} z) \exp(ik_{\infty} r) \\ \tilde{\phi}^{(2)}(M) &= 0 \end{aligned} \quad \frac{h}{\lambda} \geq M_{\infty}$$

dans le cas général :

$$(4.19.2) \quad \begin{aligned} \tilde{\phi}^{(1)}(M) &= -i \frac{H\lambda}{2T} \frac{\text{ch } k(z+h)}{\text{sh } kh} \exp(ikr) \\ \tilde{\phi}^{(2)}(M) &= -i \frac{3\pi H^2}{16T} \frac{\text{ch } 2k(z+h)}{\text{sh}^4 kh} \exp(2ikr) \end{aligned} \quad \forall \frac{h}{\lambda}$$

et en faible profondeur :

$$(4.19.3) \quad \begin{aligned} \tilde{\phi}^{(1)}(M) &= -i \frac{Hg}{2\omega} \left[ 1 + 2\pi^2 \left( \frac{h}{\lambda} \right)^2 \frac{z^2 + 2zh}{h^2} + O\left( \frac{h}{\lambda} \right)^4 \right] \exp(ikr) \\ \tilde{\phi}^{(2)}(M) &= -i \frac{3\pi H^2}{16T} \frac{1}{(k_{\infty} h)^2} \left[ 1 + 8\pi^2 \left( \frac{h}{\lambda} \right)^2 \left[ \frac{z^2 + 2zh}{h^2} + \frac{1}{3} \right] + O\left( \frac{h}{\lambda} \right)^4 \right] \exp(ikr) \end{aligned} \quad \frac{h}{\lambda} \leq M_0$$

Il apparaît clairement qu'en très grande profondeur, le terme du deuxième ordre disparaît, et qu'alors la houle d'Airy est précise au troisième ordre près. Par contre, en très faible profondeur, le potentiel du deuxième ordre converge avec le rapport  $(H/h)^2$ . Lorsque la profondeur devient faible le rapport des modules des termes du deuxième ordre et du premier ordre se comporte comme :

$$(4.20) \quad \frac{3}{8} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{H}{\lambda} \left( \frac{\lambda}{h} \right)^3 = \frac{3}{64\pi^2} \frac{H}{\lambda} \left( \frac{\lambda}{h} \right)^3$$

qui est, à un coefficient près, le paramètre d'onde d'Ursell. Tant que ce dernier reste petit devant l'unité, le premier ordre est suffisant.

Le problème peut donc être résolu dès qu'on connaît la hauteur crête à creux  $H$  et soit la longueur d'onde  $\lambda$ , soit la période  $T$ .

En définitive, l'équation de la surface libre s'écrit donc :

$$(4.21) \quad \eta(M;t) = \frac{H}{2} \cos(kr - \omega t) + \frac{\pi H^2}{8\lambda} \frac{3 - \text{th}^2 kh}{\text{th}^3 kh} \cos 2(kr - \omega t)$$

soit, en posant :

$$(4.22) \quad \eta(M;t) = \Re \left\{ \tilde{\eta}^{(1)}(M) \exp(-i\omega t) \right\} + \Re \left\{ \tilde{\eta}^{(2)}(M) \exp(-2i\omega t) \right\}$$

il vient pour la dénivelée complexe :

$$(4.23.1) \quad \begin{aligned} \tilde{\eta}^{(1)}(M) &= \frac{H}{2} \exp(ik_{\infty}r) & \frac{h}{\lambda} &\geq M_{\infty} \\ \tilde{\eta}^{(1)}(M) &= \frac{H}{2} \exp(ikr) & \forall \frac{h}{\lambda} & \\ \tilde{\eta}^{(1)}(M) &= \frac{H}{2} \exp(ikr) & \frac{h}{\lambda} &\leq M_0 \end{aligned}$$

$$(4.23.2) \quad \begin{aligned} \tilde{\eta}^{(2)}(M) &= \frac{\pi H^2}{4\lambda} \exp(2ik_{\infty}r) & \frac{h}{\lambda} &\geq M_{\infty} \\ \tilde{\eta}^{(2)}(M) &= \frac{\pi H^2}{8\lambda} \frac{3 - \text{th}^2 kh}{\text{th}^3 kh} \exp(2ikr) & \forall \frac{h}{\lambda} & \\ \tilde{\eta}^{(2)}(M) &= \frac{H}{16} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{H}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{h}\right)^3 \left[ 3 - 16\pi^2 \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 + O\left(\frac{h}{\lambda}\right)^4 \right] \exp(2ikr) & \frac{h}{\lambda} &\leq M_0 \end{aligned}$$

La dénivelée de la surface libre du deuxième ordre est composée de la superposition de celle du premier ordre et d'un harmonique dont l'effet est de surélever à la fois les crêtes et les creux en rendant les premières plus pointues et les seconds plus plats.

#### 4.4. Champ de pression

La pression est obtenue à partir de son expression tirée de l'équation de Bernoulli-Lagrange. D'où :

$$(4.24) \quad \begin{aligned} p(M;t) &= -\rho g z - \frac{1}{4} \rho g H \frac{\pi H}{\lambda} \frac{1}{\text{sh } 2kh} [\text{ch } 2k(z+h) - 1] \\ &+ \Re\{\tilde{p}^{(1)}(M) \exp(-i\alpha t)\} + \Re\{\tilde{p}^{(2)}(M) \exp(-2i\alpha t)\} \end{aligned}$$

avec, pour la pression dynamique complexe :

$$(4.25) \quad \begin{aligned} \tilde{p}^{(1)}(M) &= \frac{1}{2} \rho g H \frac{\text{ch } k(z+h)}{\text{ch } kh} \exp(ikr) \\ \tilde{p}^{(2)}(M) &= \frac{3}{4} \rho g H \frac{\pi H}{\lambda} \frac{1}{\text{sh } 2kh} \left[ \frac{\text{ch } 2k(z+h)}{\text{sh}^2 kh} - \frac{1}{3} \right] \exp(2ikr) \end{aligned}$$

#### 4.5. Cinématique de la houle

##### 4.5.1. Expression des vitesses

La vitesse du fluide est obtenue en chaque point à partir de la relation :

$$(4.26) \quad \vec{V}(M;t) = \vec{\nabla} \phi(M;t)$$

D'où en posant :

$$(4.27) \quad \vec{V}(M;t) = \Re\left\{\tilde{V}^{(1)}(M)\exp(-i\alpha t)\right\} + \Re\left\{\tilde{V}^{(2)}(M)\exp(-2i\alpha t)\right\}$$

il vient :

il vient, en grande profondeur relative  $\frac{h}{\lambda} \geq M_\infty$  :

$$(4.28.1) \quad \begin{aligned} \tilde{V}_r^{(1)}(M) &= +\frac{H}{2}\omega \exp(k_\infty z) \exp(ik_\infty r) \\ \tilde{V}_r^{(2)}(M) &= 0 \\ \tilde{V}_z^{(1)}(M) &= -i\frac{H}{2}\omega \exp(k_\infty z) \exp(ik_\infty r) \\ \tilde{V}_z^{(2)}(M) &= 0 \end{aligned}$$

dans le cas général  $\forall \frac{h}{\lambda}$  :

$$(4.28.2) \quad \begin{aligned} \tilde{V}_r^{(1)}(M) &= +\frac{H}{2}\omega \frac{\text{ch } k(z+h)}{\text{sh } kh} \exp(ikr) \\ \tilde{V}_r^{(2)}(M) &= +\frac{H}{2}\omega \frac{3\pi H}{4\lambda} \frac{\text{ch } 2k(z+h)}{\text{sh}^4 kh} \exp(2ikr) \\ \tilde{V}_z^{(1)}(M) &= -i\frac{H}{2}\omega \frac{\text{sh } k(z+h)}{\text{sh } kh} \exp(ikr) \\ \tilde{V}_z^{(2)}(M) &= -i\frac{H}{2}\omega \frac{3\pi H}{4\lambda} \frac{\text{sh } 2k(z+h)}{\text{sh}^4 kh} \exp(2ikr) \end{aligned}$$

et en faible profondeur relative  $\frac{h}{\lambda} \leq M_0$  :

$$(4.28.3) \quad \begin{aligned} \tilde{V}_r^{(1)}(M) &= +\frac{H}{2}\omega \frac{1}{2\pi} \left(\frac{h}{\lambda}\right)^{-1} \left[ 1 + 2\pi^2 \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 \left( \frac{z^2 + 2zh}{h^2} + \frac{2}{3} \right) + O\left(\frac{h}{\lambda}\right)^4 \right] \exp(ikr) \\ \tilde{V}_r^{(2)}(M) &= +\frac{H}{2}\omega \frac{3H}{64\pi^3 \lambda} \left(\frac{h}{\lambda}\right)^{-4} \left[ 1 + 8\pi^2 \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 \left( \frac{z^2 + 2zh}{h^2} + \frac{2}{3} \right) + O\left(\frac{h}{\lambda}\right)^4 \right] \exp(2ikr) \\ \tilde{V}_z^{(1)}(M) &= -i\frac{H}{2}\omega \frac{z+h}{h} \left[ 1 + \frac{2}{3}\pi^2 \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 \frac{z^2 + 2zh}{h^2} + O\left(\frac{h}{\lambda}\right)^4 \right] \exp(ikr) \\ \tilde{V}_z^{(2)}(M) &= -i\frac{H}{2}\omega \frac{3H}{16\pi^2 \lambda} \frac{z+h}{h} \left(\frac{h}{\lambda}\right)^{-3} \left[ 1 + \frac{8}{3}\pi^2 \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 \frac{z^2 + 2zh}{h^2} + O\left(\frac{h}{\lambda}\right)^4 \right] \exp(2ikr) \end{aligned}$$

### 4.5.2. Expression des accélérations

L'accélération des particules du fluide est obtenue en chaque point à partir de la relation :

$$(4.29) \quad \vec{\gamma}(M;t) = \frac{d}{dt} \vec{V}(M;t) = \frac{\partial}{\partial t} \vec{V}(M;t) + \left( \vec{V}(M;t) \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{V}(M;t)$$

D'où, en ne retenant que la dérivée temporelle partielle, et en posant :

$$(4.30) \quad \vec{\gamma}(M;t) = \Re \left\{ \tilde{\gamma}^{(1)}(M) \exp(-i\omega t) \right\} + \Re \left\{ \tilde{\gamma}^{(2)}(M) \exp(-2i\omega t) \right\}$$

il vient, en grande profondeur relative  $\frac{h}{\lambda} \geq M_\infty$  :

$$(4.31.1) \quad \begin{aligned} \tilde{\gamma}_r^{(1)}(M) &\approx -i \frac{H}{2} \omega^2 \exp(k_\infty z) \exp(ik_\infty r) \\ \tilde{\gamma}_r^{(2)}(M) &\approx 0 \\ \tilde{\gamma}_z^{(1)}(M) &\approx -i \frac{H}{2} \omega^2 \exp(k_\infty z) \exp(ik_\infty r) \\ \tilde{\gamma}_z^{(2)}(M) &\approx 0 \end{aligned}$$

dans le cas général  $\forall \frac{h}{\lambda}$  :

$$(4.31.2) \quad \begin{aligned} \tilde{\gamma}_r^{(1)}(M) &\approx -i \frac{H}{2} \omega^2 \frac{\text{ch } k(z+h)}{\text{sh } kh} \exp(ikr) \\ \tilde{\gamma}_r^{(2)}(M) &\approx -i \frac{H}{2} \omega^2 \frac{3\pi H}{4\lambda} \frac{\text{ch } 2k(z+h)}{\text{sh}^4 kh} \exp(2ikr) \\ \tilde{\gamma}_z^{(1)}(M) &\approx -\frac{H}{2} \omega^2 \frac{\text{sh } k(z+h)}{\text{sh } kh} \exp(ikr) \\ \tilde{\gamma}_z^{(2)}(M) &\approx -\frac{H}{2} \omega^2 \frac{3\pi H}{4\lambda} \frac{\text{sh } 2k(z+h)}{\text{sh}^4 kh} \exp(2ikr) \end{aligned}$$

et en faible profondeur relative  $\frac{h}{\lambda} \leq M_0$  :

(4.31.3)

$$\tilde{\gamma}_r^{(1)}(M) \approx -i \frac{H}{2} \omega^2 \frac{1}{2\pi} \left(\frac{h}{\lambda}\right)^{-1} \left[ 1 + 2\pi^2 \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 \left( \frac{z^2 + 2zh}{h^2} + \frac{2}{3} \right) + O\left(\frac{h}{\lambda}\right)^4 \right] \exp(ikr)$$

$$\tilde{\gamma}_r^{(2)}(M) \approx -i \frac{H}{2} \omega^2 \frac{3H}{64\pi^3 \lambda} \left(\frac{h}{\lambda}\right)^{-4} \left[ 1 + 8\pi^2 \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 \left( \frac{z^2 + 2zh}{h^2} + \frac{2}{3} \right) + O\left(\frac{h}{\lambda}\right)^4 \right] \exp(2ikr)$$

$$\tilde{\gamma}_z^{(1)}(M) \approx -\frac{H}{2} \omega^2 \frac{z+h}{h} \left[ 1 + \frac{2}{3} \pi^2 \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 \frac{z^2 + 2zh}{h^2} + O\left(\frac{h}{\lambda}\right)^4 \right] \exp(ikr)$$

$$\tilde{\gamma}_z^{(2)}(M) \approx -\frac{H}{2} \omega^2 \frac{3H}{16\pi^2 \lambda} \frac{z+h}{h} \left(\frac{h}{\lambda}\right)^{-3} \left[ 1 + \frac{8}{3} \pi^2 \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 \frac{z^2 + 2zh}{h^2} + O\left(\frac{h}{\lambda}\right)^4 \right] \exp(2ikr)$$

#### 4.6. Autres caractéristiques de la houle

Les principales autres caractéristiques de la houle de deuxième approximation sont données ci-après :

##### ➤ Energie de la houle

L'énergie potentielle moyenne de la houle par unité de surface  $E_p$  est égale à l'énergie cinétique moyenne de la houle par unité de surface  $E_c$ . L'énergie totale de la houle  $E_p = E_p + E_c$  a pour expression :

$$(4.32) \quad E = \frac{1}{8} \rho g H^2 \left[ 1 + \frac{\pi^2 H^2}{16\lambda^2} \left( \frac{3 - \text{th}^2 kh}{\text{th}^3 kh} \right)^2 \right]$$

Le flux d'énergie transmis ou puissance transmise par la houle par unité de largeur a pour expression :

$$(4.33) \quad P = E \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{2kh}{\text{sh } 2kh} \right] C$$

##### ➤ Vitesse de groupe de la houle

Le flux d'énergie apparaît donc comme le produit de l'énergie totale moyenne de la houle par la vitesse de groupe  $C_g$  qui est la vitesse à laquelle elle se propage :

$$(4.34) \quad C_g = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{2kh}{\text{sh } 2kh} \right] C$$

##### ➤ Trajectoires de la houle

Les trajectoires des particules ne sont plus fermées il y a un transport de masse ; l'eau est entraînée horizontalement par l'onde à la vitesse moyenne :

$$(4.35) \quad V_t = \frac{H}{2} \omega \frac{\pi H}{2\lambda} \frac{\operatorname{ch} 2k(z+h)}{\operatorname{sh}^2 kh}$$

#### 4.7. Houles du troisième ordre

La formulation les plus couramment utilisées pour l'approximation du troisième ordre sont celles de L. Skjelbreia /1959/ et de L. Skjelbreia et J.A. Hendrickson /1961/.

Ses principales caractéristiques sont données ci-après.

##### ➤ **Dénivelée de la surface libre**

$$(4.35) \quad \begin{aligned} \eta(M;t) = & \frac{H'}{2} \cos(kr - \alpha) \\ & + \frac{H'}{2} \frac{kH'}{4} \frac{\operatorname{ch} kh(2 + \operatorname{ch} 2kh)}{2 \operatorname{sh}^3 kh} \cos 2(kr - \alpha) \\ & + \frac{H'}{2} \left(\frac{kH'}{4}\right)^2 \frac{3(1 + 8 \operatorname{ch}^6 kh)}{16 \operatorname{sh}^6 kh} \cos 3(kr - \alpha) \end{aligned}$$

avec :

$$(4.36) \quad H = H' \left[ 1 + \left(\frac{kH'}{4}\right)^2 \frac{3(1 + 8 \operatorname{ch}^6 kh)}{16 \operatorname{sh}^6 kh} \right]$$

##### ➤ **Relation de dispersion**

$$(4.37) \quad k \operatorname{th} kh \left[ 1 + (kH')^2 \frac{7 + 2 \operatorname{ch}^2 2kh}{8 \operatorname{sh}^4 kh} \right] = k_\infty = \frac{\omega^2}{g}$$

##### ➤ **Période de la houle**

$$(4.38) \quad T = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g} \operatorname{coth} 2\pi \frac{h}{\lambda} \left[ 1 + \left(\frac{2\pi H'}{\lambda}\right)^2 \frac{7 + 2 \operatorname{ch}^2 2kh}{16 \operatorname{sh}^4 kh} \right]}$$

##### ➤ **Longueur d'onde de la houle**

$$(4.39) \quad \lambda = \frac{gT^2}{2\pi} \operatorname{th} 2\pi \frac{h}{\lambda} \left[ 1 + \left(2\pi \frac{H'}{\lambda}\right)^2 \frac{7 + 2 \operatorname{ch}^2 2kh}{8 \operatorname{sh}^4 kh} \right]$$

##### ➤ **Célérité de la houle**

$$(4.40) \quad C = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \operatorname{th} 2\pi \frac{h}{\lambda} \left[ 1 + \left(\frac{\pi H'}{\lambda}\right)^2 \frac{9 - 8 \operatorname{ch}^2 kh + 8 \operatorname{ch}^4 kh}{16 \operatorname{sh}^4 kh} \right]}$$

### ➤ Potentiel des vitesses

$$(4.41.1) \quad \phi(M; t) = f_0 + \frac{C\lambda}{2\pi} \sum_{n=1}^3 \frac{f_n}{n} \operatorname{ch} nk(z+h) \sin n(kr - \omega t)$$

avec :

$$(4.41.2) \quad \begin{aligned} f_0 &= 0 \\ f_1 &= \left(\frac{kH'}{4}\right) \frac{2}{\operatorname{sh} kh} - \left(\frac{kH'}{4}\right)^2 \frac{\operatorname{ch}^2 kh (1 + 5 \operatorname{ch}^2 kh)}{2 \operatorname{sh}^5 kh} \\ f_2 &= \left(\frac{kH'}{4}\right)^2 \frac{3}{\operatorname{sh}^4 kh} \\ f_3 &= \left(\frac{kH'}{4}\right)^3 \frac{3(11 - 2 \operatorname{ch} 2kh)}{8 \operatorname{sh}^7 kh} \end{aligned}$$

## 4.8. Houles de Miche

L'étude des houles due à R. Miche /1944/ est fondée sur la même méthode que l'étude des houles de Stokes. Elle en diffère par l'emploi des coordonnées de Lagrange au lieu des coordonnées d'Euler. Ceci permet d'exprimer plus facilement que la pression est identiquement nulle sur la surface libre.

Cette méthode conduit à des développements mathématiques longs et particulièrement compliqués.

## 4.9. Domaine de validité

Différents auteurs se sont penchés sur le domaine de validité des houles de Stokes.

J.N. Hunt /1953/ a fait remarqué que la cambrure des houles de Stokes en eau profonde doit être inférieure à  $H/\lambda=0.005$ , mais que dans certaines conditions cette limite pouvait être repoussée jusqu'à  $H/\lambda=0.01$ . En eau peu profonde, la limite est plus sévère car les séries convergent plus lentement.

S.C. De /1955/ a démontré que la théorie de Stokes au cinquième ordre ne devraient pas être utilisée pour des valeurs de longueurs d'ondes relatives supérieures à des valeurs de l'ordre de  $\lambda/h=8$ , la valeur précise dépendant de la cambrure.

D'après E.V. Laitone /1962/, en remarquant que la convergence des séries utilisées par Stokes n'a été démontrée que pour les écoulements fluviaux  $C < \sqrt{gh}$ , et en supposant que l'amplitude relative maximale de la

houle ne peut dépasser la valeur de  $8/11$  déduite de la théorie de l'onde solitaire, le domaine de validité est donné par les deux relations  $\lambda/h < 8.15$  et  $H/h < 48.3(h/\lambda)^2$ .

Il est par ailleurs intéressant de noter que les tables donnant les valeurs des coefficients de la houle de cinquième approximation s'arrêtent pour  $h/T^2=0.06 \text{ m/s}^2$ . Dans ces conditions, la relation  $H/h < 95(h/\lambda)^{1.8}$  semble assez bien vérifiée.

A noter que la limite donnée par P.D. Komar est  $H/h < 32\pi^2/3(h/\lambda)^2$ .

Quant aux houles de Miche, leur domaine de validité et d'intérêt est limité, d'après J. Larras, par  $h/\lambda > 0.217$  et  $H/\lambda > 0.0384$ .

## 5. Houle de Gerstner

F.J. Gerstner /1802/ puis, plus tard mais indépendamment, W.J.M. Rankine /1863/ ont proposé un modèle exact de la houle en profondeur infinie, sans l'aide de développement en série.

Gerstner a considéré que les équations paramétriques des trajectoires de la houle infinitésimale d'Airy en profondeur infinie :

$$(5.1) \quad \begin{aligned} r &= r_0 - \frac{H}{2} \exp(k_\infty z_0) \sin(k_\infty r_0 - \alpha) \\ z &= z_0 + \frac{H}{2} \exp(k_\infty z_0) \cos(k_\infty r_0 - \alpha) \end{aligned}$$

peuvent encore être utilisées dans le cas d'une houle d'amplitude finie.

En retenant les formules (5.1) comme définition, Gerstner a construit empiriquement un modèle qui a pour limite, lorsque l'amplitude tend vers zéro la houle infinitésimale d'Airy.

Chaque particule fluide est sensée tourner autour d'un point de coordonnées  $(r_0, z_0)$ , en décrivant une circonférence de rayon  $H/2$ , décroissant exponentiellement avec la profondeur.

Les équations (5.1) définissent le mouvement dans un mode de représentation qui s'apparente à celui de Lagrange. En effet, Les variables  $(r_0, z_0; t)$  sont bien indépendantes, mais les paramètres  $r_0$  et  $z_0$  qui permettent de repérer une particule ne s'identifient pas aux coordonnées initiales de cette même particule.

### 5.1. Equation de continuité

Les fonctions qui définissent  $r$  et  $z$ , ainsi que toutes leurs dérivées partielles du premier et du second ordre étant des fonctions continues des variables  $r, z$  et  $t$ , l'hypothèse de continuité est satisfaite.

Pour que le mouvement soit cinématiquement possible, il est nécessaire que l'équation de continuité des fluides isovolumes soit satisfaite.

Un volume fluide élémentaire ne se conservera au cours du mouvement que si le jacobien  $J(r, r_0, z, z_0)$  de la transformation est indépendant du temps :

$$(5.2) \quad drdz = J(r, z, r_0, z_0) dr_0 dz_0 = \frac{\partial(r, z)}{\partial(r_0, z_0)} dr_0 dz_0$$

Comme le jacobien a pour expression :

$$(5.3) \quad J(r, z, r_0, z_0) = 1 - \left( \frac{H}{2} k_\infty \exp(k_\infty z_0) \right)^2$$

l'équation de continuité est bien vérifiée.

Il convient de noter que dans le cas d'une profondeur finie, le jacobien s'écrit :

$$(5.4) \quad J(r, z, r_0, z_0) = 1 - \frac{H^2 k^2 \operatorname{ch}^2 k(z_0 + h) \cos^2(kr_0 - \alpha) + \operatorname{sh}^2 k(z_0 + h) \sin^2(kr_0 - \alpha)}{4 \operatorname{sh}^2 kh}$$

et qu'alors l'équation de continuité ne peut pas être satisfaite !

## 5.2. Champ de pression

La pression à laquelle est soumise une particule fluide définie par les paramètres  $r_0$  et  $z_0$  est donnée par les équations générales du mouvement des fluides parfaits dans le mode de représentation de Lagrange.

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r_0} + \left( \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} - R \right) \frac{\partial r}{\partial r_0} + \left( \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - Z \right) \frac{\partial z}{\partial r_0} &= 0 \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z_0} + \left( \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} - R \right) \frac{\partial r}{\partial z_0} + \left( \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - Z \right) \frac{\partial z}{\partial z_0} &= 0 \end{aligned}$$

expressions dans lesquelles  $R$  et  $Z$  désignent les composantes des champs de forces massiques, ici réduit à la pesanteur.

Dans le cas présent, ce système s'écrit donc :

$$(5.6) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r_0} + \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} \frac{\partial r}{\partial r_0} + \left( \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + g \right) \frac{\partial z}{\partial r_0} &= 0 \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z_0} + \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} \frac{\partial r}{\partial z_0} + \left( \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + g \right) \frac{\partial z}{\partial z_0} &= 0 \end{aligned}$$

soit en exprimant les dérivées des coordonnées :

$$(5.7) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r_0} \left( \frac{p}{\rho g} + z \right) &= - \frac{H}{2} \frac{\omega^2}{g} \exp(k_\infty z_0) \sin(k_\infty r_0 - \alpha) \\ \frac{\partial}{\partial z_0} \left( \frac{p}{\rho g} + z \right) &= + \frac{H}{2} \frac{\omega^2}{g} \exp(k_\infty z_0) \cos(k_\infty r_0 - \alpha) + \left( \frac{H}{2} \right)^2 k_\infty \frac{\omega^2}{g} \exp(2k_\infty z_0) \end{aligned}$$

l'intégration de ce système conduit à l'expression :

$$(5.8) \quad \frac{p}{\rho g} + z = + \frac{H}{2} \frac{\omega^2}{g k_\infty} \exp(k_\infty z_0) \cos(k_\infty r_0 - \alpha) + \left( \frac{H}{2} \right)^2 \frac{\omega^2}{2g} \exp(2k_\infty z_0) + F(t)$$

soit après avoir remplacé  $z$  par son expression tirée de (5.1) :

$$(5.9) \quad \frac{p}{\rho g} + z = -z_0 + \frac{H}{2} \left[ \frac{\omega^2}{gk_\infty} - 1 \right] \exp(k_\infty z_0) \cos(k_\infty r_0 - \omega t) + \left( \frac{H}{2} \right)^2 \frac{\omega^2}{2g} \exp(2k_\infty z_0) + F(t)$$

Pour que la pression à la position moyenne d'une particule donnée soit indépendante du temps, et qu'il puisse exister des surfaces isobares indépendantes du temps, les relations suivantes doivent être satisfaites :

$$(5.10) \quad k_\infty = \frac{\omega^2}{g}$$

$$F(t) = \text{Cte}$$

ce qui donne la relation de dispersion. La pression s'exprime donc sous la forme suivante :

$$(5.11) \quad p = \rho g \left[ \left( \frac{H}{2} \right)^2 \frac{\pi}{\lambda} \exp(2k_\infty z_0) - z_0 \right] + \text{Cte}$$

Par ailleurs, les surfaces fluides définies par les équations paramétriques (5.1) dans lesquelles  $z_0$  est pris constant, sont d'après (5.11) des isobares ; l'une quelconque d'entre elles peut donc représenter la surface libre. En choisissant celle correspondant à  $z_0=0$ , la constante est nulle, et la pression s'exprime sous la forme finale suivante :

$$(5.12) \quad p = \rho g \left[ \left( \frac{H}{2} \right)^2 \frac{\pi}{\lambda} \exp(2k_\infty z_0) - z_0 \right]$$

Le phénomène correspondant à cette onde est périodique dans le temps avec la période  $T$ , et dans l'espace avec la période  $\lambda$ , ces caractéristiques étant définies ci-après.

#### ➤ Période de la houle

$$(5.13) \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g}}$$

#### ➤ Longueur d'onde de la houle

$$(5.14) \quad \lambda = \frac{2\pi}{k_\infty} = \frac{2\pi g}{\omega^2} = \frac{gT^2}{2\pi}$$

### ➤ Célérité de la houle

$$(5.15) \quad C = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k_\infty} = \frac{g}{\omega} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

où  $k_\infty$  désigne le nombre d'onde en profondeur illimitée défini par :

$$(5.16) \quad k_\infty = \frac{\omega^2}{g}$$

Il convient de remarquer que pour un observateur se déplaçant parallèlement à l'axe  $Or$ , à la vitesse constante  $C$ , le mouvement paraît permanent.

## 5.3. Equation de la surface libre

### 5.3.1. Surfaces isobares

D'après (5.12), les surfaces isobares ont pour équations paramétriques les équations (5.1), rappelées ci-après, dans lesquelles la valeur de  $z_0$  est fixée à  $z_0^{(p)}$  :

$$(5.17) \quad \begin{aligned} r &= r_0 - \frac{H}{2} \exp(k_\infty z_0^{(p)}) \sin(k_\infty r_0 - \omega t) \\ z &= z_0^{(p)} + \frac{H}{2} \exp(k_\infty z_0^{(p)}) \cos(k_\infty r_0 - \omega t) \end{aligned}$$

En posant  $\theta = k_\infty r_0 - \omega t$ , ces équations deviennent :

$$(5.18) \quad \begin{aligned} r - Ct &= \frac{\lambda}{2\pi} \theta - \frac{H}{2} \exp(k_\infty z_0^{(p)}) \sin \theta \\ z - z_0^{(p)} &= \frac{H}{2} \exp(k_\infty z_0^{(p)}) \cos \theta \end{aligned}$$

Elles définissent des trochoïdes engendrées par le mouvement d'un point  $P$  lié au plan d'un cercle de rayon  $R = \lambda/2\pi$ , à une distance  $R \exp(k_\infty z_0^{(p)})$  du centre, cercle qui roule sans glisser sur une horizontale de cote  $z_0^{(p)} + \lambda/2\pi$ .

### 5.3.2. Surface libre

La surface libre est la surface isobare pour laquelle  $z_0^{(p)}$  est nul. Ses équations paramétriques sont donc :

$$(5.19) \quad \begin{aligned} r - Ct &= \frac{\lambda}{2\pi} \theta - \frac{H}{2} \sin \theta \\ z &= \frac{H}{2} \cos \theta \end{aligned}$$

L'adimensionnalisation de ces équations par rapport à la longueur d'onde  $\lambda$  montre qu'elles ne dépendent que d'un seul paramètre qui est la cambrure :

$$(5.20) \quad \begin{aligned} \frac{r}{\lambda} - \frac{t}{T} &= \frac{1}{2\pi} \theta - \frac{H}{2\lambda} \sin \theta \\ \frac{z}{\lambda} &= \frac{H}{2\lambda} \cos \theta \end{aligned}$$

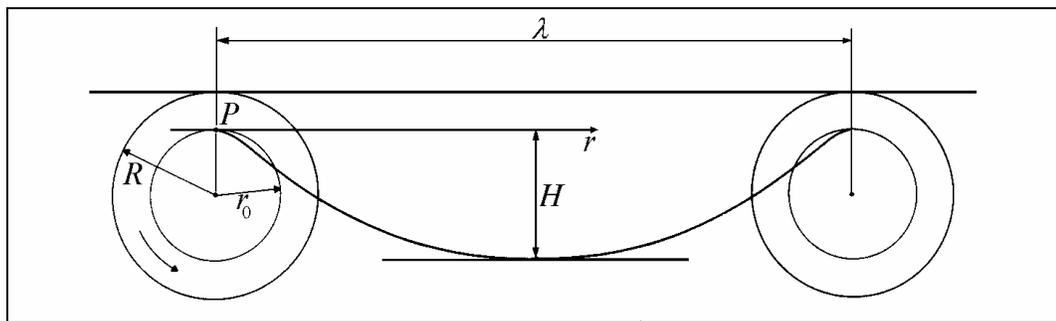
Les crêtes et les creux ont respectivement pour cote  $+H/2$  et  $-H/2$ , mais la surface libre n'est pas symétrique par rapport au plan  $z=0$ . Les crêtes sont plus étroites et les creux plus larges, comme les houles de Stokes d'amplitude finie.

Le plan  $z=0$  ne coïncide pas avec le plan de la surface libre au repos ; ce dernier a une cote  $z_r$  définie par :

$$(5.21) \quad z_r = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda z dr = \frac{1}{\lambda} \int_0^{2\pi} \frac{H}{2} \cos \theta \left[ \frac{\lambda}{2\pi} - \frac{H}{2} \cos \theta \right] d\theta = -\frac{\pi}{\lambda} \left( \frac{H}{2} \right)^2$$

La surface libre a donc comme équations par rapport au plan de la surface libre au repos :

$$(5.22) \quad \begin{aligned} \frac{r}{\lambda} - \frac{t}{T} &= \frac{1}{2\pi} \theta - \frac{H}{2\lambda} \sin \theta \\ \frac{z}{\lambda} &= \frac{H}{2\lambda} \cos \theta + \pi \left( \frac{H}{2\lambda} \right)^2 \end{aligned}$$



**Figure 5.1** : Dénivelée de la surface libre de la houle de Gerstner.

Les crêtes et les creux ont alors pour cotes dans ce système de référence :

$$(5.23) \quad \eta_{\max} = +\frac{H}{2\lambda} \left(1 + \pi \frac{H}{2\lambda}\right)$$

$$\eta_{\min} = -\frac{H}{2\lambda} \left(1 - \pi \frac{H}{2\lambda}\right)$$

### 5.3.3. Profil limite de la surface libre

Pour que la surface libre soit continue (en un seul tenant), le point  $P$  doit être à l'intérieur du cercle, ce qui implique :

$$(5.24) \quad \frac{H}{2} \leq \frac{\lambda}{2\pi}$$

La houle de Gerstner ne peut donc avoir une cambrure supérieure à  $1/\pi=0.318$ . A la limite, le profil est une cycloïde, et présente un point de rebroussement à tangente verticale aux crêtes.

## 5.4. Cinématique de la houle

Les trajectoires des particules fluides sont des cercles dont le rayon décroît exponentiellement avec la profondeur. La houle de Gerstner ayant des orbites fermées, n'engendre pas de transport de masse.

### 5.4.1. Expression de la vitesse

Les vitesses orbitales ont pour expression :

$$(5.25) \quad V_r = \frac{\partial r}{\partial t} = +\frac{H}{2} \omega \exp(k_{\infty} z_0) \cos(k_{\infty} r_0 - \omega t)$$

$$V_z = \frac{\partial z}{\partial t} = +\frac{H}{2} \omega \exp(k_{\infty} z_0) \sin(k_{\infty} r_0 - \omega t)$$

### 5.4.2. Expression de l'accélération

Les accélérations ont pour expression :

$$(5.26) \quad \gamma_r = \frac{\partial V_r}{\partial t} = +\frac{H}{2} \omega^2 \exp(k_{\infty} z_0) \sin(k_{\infty} r_0 - \omega t)$$

$$\gamma_z = \frac{\partial V_z}{\partial t} = -\frac{H}{2} \omega^2 \exp(k_{\infty} z_0) \cos(k_{\infty} r_0 - \omega t)$$

## 5.5. Vecteur tourbillon

L'écoulement étant plan, le rotationnel de la vitesse s'écrit, en désignant par  $\vec{s}$  le vecteur unitaire porté par l'axe perpendiculaire au plan  $(O;r,z)$  et orienté tel que le trièdre  $r,s,z$  soit direct :

$$(5.27) \quad \vec{T}(M;t) = \vec{\nabla} \wedge \vec{V}(M;t) = \left( \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \vec{s}$$

soit, tous les calculs étant effectués :

$$(5.28) \quad \vec{T}(M;t) = - \frac{8\pi^2 \omega \left( \frac{H}{2\lambda} \right)^2 \exp(2k_\infty z_0)}{1 - 4\pi^2 \omega \left( \frac{H}{2\lambda} \right)^2 \exp(2k_\infty z_0)} \vec{s}$$

La houle de Gerstner est donc rotationnelle. L'intensité du tourbillon décroît exponentiellement avec la profondeur et proportionnellement au carré de la cambrure.

## 5.6. Energie de la houle

Pour un fluide parfait incompressible, l'énergie totale du volume fluide  $\tau$  contenu entre deux plans d'abscisses  $r$  et  $r+\lambda$  et deux plans directeurs distants d'une longueur unitaire se compose uniquement de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique.

### 5.6.1. Energie potentielle de la houle

L'énergie potentielle du fluide  $\tau$  a pour expression :

$$(5.29) \quad E_{hp} = \rho g \iiint_S z dr dz$$

en désignant par  $S$  la section du volume  $\tau$  par un plan directeur de l'écoulement.

Il vient donc :

$$(5.30) \quad E_{hp} = \frac{1}{2} \rho g \int_r^{r+\lambda} \int_{z_r}^{\eta(M;t)} dz^2 dr = \frac{1}{2} \rho g \int_r^{r+\lambda} \left[ \frac{H^2}{4} \cos^2(kr - \omega t) - \left( \frac{\pi H^2}{\lambda 4} \right)^2 \right] dr$$

L'énergie potentielle moyenne de la houle par unité de surface  $E_{hp}$  est donc égale à :

$$(5.31) \quad E_{hp} = \frac{1}{16} \rho g H^2 \lambda \left[ 1 - \frac{\pi^2 H^2}{2 \lambda^2} \right]$$

c'est l'énergie qu'il aurait fallu fournir au fluide  $\tau$  initialement au repos, pour donner à la surface libre sa forme ondulée, le fluide étant supposé encore immobile dans l'état final.

### 5.6.2. Energie cinétique de la houle

L'énergie cinétique du fluide  $\tau$  a pour expression :

$$(5.32) \quad E_{hc} = \frac{1}{2} \rho \iint_S V^2(M; t) dr dz = \frac{1}{2} \rho \iint_S (V_r^2 + V_z^2) J(r, z, r_0, z_0) dr_0 dz_0$$

d'où, en exprimant le carré de la vitesse à partir de ses composantes (5.25) :

$$(5.33) \quad E_{hc} = \frac{1}{8} \rho g H^2 \int_r^{r+\lambda} \int_{-\infty}^0 \frac{\omega^2}{g} \exp(2k_\infty z_0) \left[ 1 - \frac{H^2 k_\infty^2}{4} \exp(2k_\infty z_0) \right] dr_0 dz_0$$

ce qui donne, après intégration :

$$(5.34) \quad E_{hc} = \frac{1}{16} \rho g H^2 \lambda \left[ 1 - \frac{\pi^2 H^2}{2 \lambda^2} \right]$$

### 5.6.3. Energie totale de la houle

L'énergie totale de la houle, pour une longueur d'onde  $\lambda$  et par unité de longueur de crête, est donc :

$$(5.35) \quad E_h = E_{hp} + E_{hc} = \frac{1}{8} \rho g H^2 \lambda \left[ 1 - \frac{\pi^2 H^2}{2 \lambda^2} \right]$$

L'énergie potentielle moyenne de la houle par unité de surface  $e_{hp}$  est égale à l'énergie cinétique moyenne de la houle par unité de surface  $e_{hc}$ . L'énergie totale moyenne de la houle par unité de surface  $e_h = e_{hp} + e_{hc}$  a pour expression :

$$(5.36) \quad e_h = \frac{1}{8} \rho g H^2 \left[ 1 - \frac{\pi^2 H^2}{2 \lambda^2} \right]$$

Il convient de remarquer, qu'elle ne dépend que de la hauteur crête à creux de la houle et de la cambrure.

### 5.7. Domaine de validité

La houle de Gerstner satisfait les conditions dynamiques et cinématiques de surface libre, se propage à la même célérité que les houles infinitésimales, mais présente comme profil limite une cycloïde (courbe ayant un point de rebroussement à tangente verticale).

Ce profil limite a des pentes très supérieures à celles des vagues mesurées. L'orientation du rotationnel est contraire à ce qu'elle devrait être pour une houle naturelle. Aussi ce modèle n'est jamais utilisé pour le calcul de la cinématique de la houle en mer.

## 6. Les modèles de houle en faibles profondeurs

### 6.1. Le modèle de houle cnoïdale

Lorsque la profondeur d'eau devient très faible et que le rapport entre la profondeur  $h$  et la longueur d'onde  $\lambda$  devient inférieur à 0.1, les développements obtenus par la méthode de G.G. Stokes cessent de donner accès à des valeurs des vitesses et accélérations de la houle ayant une signification physique.

Il convient alors d'effectuer des développements en série par rapport au paramètre  $h/\lambda$ , en prenant des échelles différentes pour les longueurs suivant qu'il s'agit de distances verticales ou horizontales.

La théorie de la houle cnoïdale - ou houle elliptique - a été ainsi développée par D.J. Korteweg et G. de Vries /1895/, puis par G.H. Keulegan et G.W. Patterson /1940/ et J.B. Keller /1948/. La démonstration de l'existence d'ondes périodiques de ce type a été donnée par W. Littman /1957/.

Ces modèles de houle ont reçu le nom de "houles cnoïdales" car ils s'expriment à partir des fonctions de trigonométrie elliptique  $cn$ ,  $sn$  et  $dn$ .

Des développements analytiques assez complexes permettent d'obtenir des solutions au deuxième ou au troisième ordre. J.D. Fenton /1979/ a poussé les développements jusqu'au cinquième, puis jusqu'au neuvième ordre.

Les vitesses verticales étant petites par rapport aux vitesses horizontales, les développements sont réalisés à partir des variables adimensionnelles suivantes :

$$(6.1) \quad \begin{array}{llll} r' = \frac{r}{\lambda} & u' = \frac{u}{\sqrt{gh}} & \eta' = \frac{\eta}{h} & t' = \frac{\sqrt{gh}}{\lambda} t \\ z' = \frac{z}{h} & w' = \frac{h}{\lambda} \frac{w}{\sqrt{gh}} & p' = \frac{p}{\rho g} & \end{array}$$

La surface libre correspondant à un développement du premier ordre est alors décrite par la formule suivante :

$$(6.2) \quad \eta(M;t) = H \operatorname{cn}^2 \left[ 2K(\chi) \left( \frac{r}{\lambda} - \frac{t}{T} \right), \chi \right]$$

expression dans laquelle  $K(\chi)$  désigne l'intégrale elliptique complète de première espèce  $\chi \in [0,1]$ . La valeur du module  $\chi$  est obtenue en résolvant l'équation implicite :

$$(6.3) \quad \frac{16}{3} [\chi^K(\chi)]^2 = \frac{\lambda^2 H}{h^3}$$

Les deux cas limites du développement au premier ordre sont à noter :

- Lorsque le module  $\chi$  tend vers zéro,  $\text{cn}(r, \chi)$  tend vers  $\cos(r)$  et  $K(\chi)$  tend vers  $\pi/2$ . Alors la houle cnoïdale tend vers la houle d'Airy.
- Lorsque le module  $\chi$  tend vers l'unité,  $\text{cn}(r, \chi)$  tend vers  $\text{sech}(r)$  et  $K(\chi)$  tend vers l'infini. Alors la houle cnoïdale tend vers la vague solitaire.

Dans la pratique, ce modèle de houle n'est guère utilisé en raison de sa complexité mathématique. Son application nécessite soit le recours aux tables de ses propriétés dressées par F.D. Masch et R.L. Wiegel /1961/, soit l'utilisation du calcul sur ordinateur.

## 6.2. Le modèle de vague solitaire

Comme son nom l'indique, la théorie de l'onde solitaire concerne une crête unique qui se propage. Il ne s'agit plus à proprement parler d'une oscillation ; aucune notion de longueur d'onde ou de période n'est associée à ce concept.

Lorsque la houle parvient en eau très peu profonde, les crêtes se cambrent et sont séparées par de larges zones plates, si bien qu'elles apparaissent comme une succession de vagues indépendantes.

En eau très peu profonde, ce n'est plus la période de la houle qui gouverne le phénomène physique mais la profondeur de l'eau, ce qui rend raisonnable l'utilisation de cette théorie, dans la mesure où elle est relativement simple de mise en œuvre et conduit à des résultats réalistes.

Les caractères de l'onde solitaire ont été décrits par J.S. Russell /1844/, puis les premières considérations théoriques ont été avancées par J. Boussinesq /1872/. L. Rayleigh /1876/ et J.M.A. Cowan /1891/ ont développé des approximations d'ordres plus élevés. Ces développements sont très complexes, mais fort heureusement, en dehors de la vitesse orbitale des particules fluides, les résultats obtenus avec les travaux de J. Boussinesq sont suffisamment précis par rapport à l'expérience. Toutefois, pour le calcul des vitesses orbitales les développements de J.M.A. Cowan doivent être utilisés.

Les premières utilisations de ce modèle ont été proposées par R.A. Bagnold /1947/ puis W.H. Munk /1949/.

L'élévation de la surface libre au dessus du niveau de l'eau au repos s'écrit sous la forme :

$$(6.4) \quad \eta(M) = H \text{sech}^2 \left( \sqrt{\frac{3H}{4h}} \frac{r}{h} \right)$$

La célérité  $C$  de l'onde a été donnée par E.V. Laitone /1959/ sous la forme d'ordre élevé suivante :

$$(6.5) \quad C = \sqrt{gh} \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{H}{h} - \frac{3}{20} \left( \frac{H}{h} \right)^2 + \dots \right]$$

La célérité de l'onde solitaire est donc plus élevée que celle de la houle d'Airy en faible profondeur. Le modèle de l'onde solitaire prend en compte le caractère fini de l'amplitude de l'onde.

Il convient de remarquer qu'au deuxième ordre près, le développement (6.5) s'identifie à l'expression donnée empiriquement par J.S. Russel /1944/ et obtenu en première approximation par J. Boussinesq /1872/, L. Rayleigh /1876/ et J.M.A. Cowan /1891/ :

$$(6.6) \quad C = \sqrt{gh \left( 1 + \frac{H}{h} \right)} = \sqrt{g(h+H)}$$

Dans la pratique, les différences entre les résultats obtenus par (6.5) et (6.6) restent non significatives pour les rapports de  $H/h$  inférieurs à 0.4. Au fur et à mesure que l'onde progresse vers des fonds plus faibles, sa hauteur de crête augmente jusqu'à l'instabilité qui entraîne le déferlement. L'instabilité est également atteinte lorsque la vitesse des particules fluides de la crête est égale à la célérité de l'onde. L'angle d'ouverture de la crête est alors égal à 120 degrés.

En utilisant ce critère, J.M.A. Cowan /1894/ a montré que le rapport entre la hauteur de l'onde et la profondeur est toujours inférieure à 0.78 :

$$(6.7) \quad \frac{H}{h} \leq 0.78$$

D'autres valeurs limites au point de déferlement, allant de 0.73 à 1., ont été calculées par différents auteurs. Toutefois, c'est la valeur donnée par J.M.A. Cowan qui est généralement retenue en raison de son bon accord avec les résultats expérimentaux.

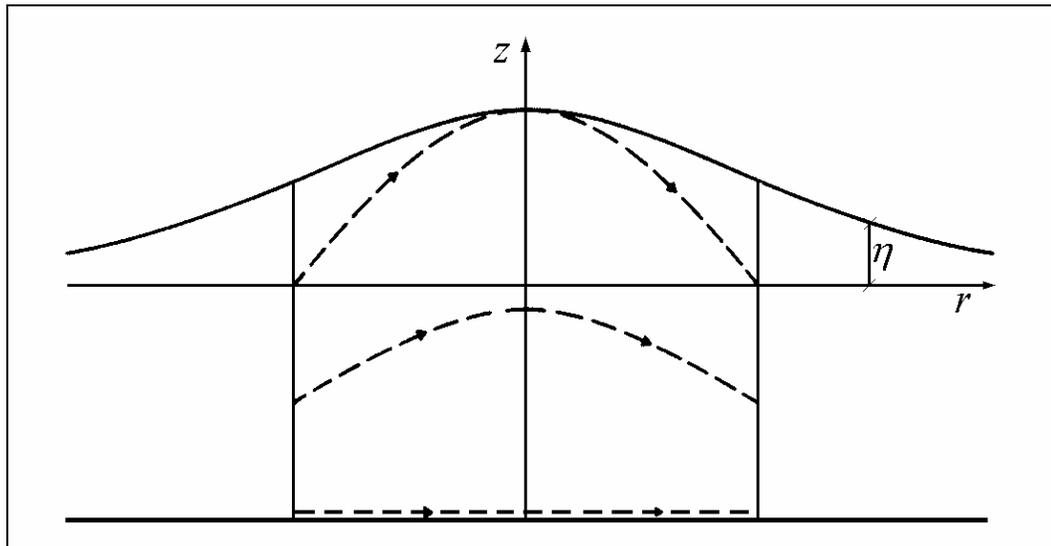
A.T. Ippen et G. Kulin /1965/ ont montré expérimentalement que cette valeur croît lorsque le fond est incliné. Ainsi, pour une pente de 0.023 la valeur limite devient 1.2, et pour une pente de 0.065 elle devient 2.8.

L'énergie totale de l'onde solitaire (énergie potentielle et énergie cinétique) par longueur de crête unité s'écrit :

$$(6.8) \quad E_n = \frac{8}{3\sqrt{3}} \rho g h^3 \left( \frac{H}{h} \right)^{\frac{3}{2}}$$

L'onde solitaire est une onde de translation, et les particules de fluide se déplacent seulement dans la direction de l'onde, il n'y a donc pas d'orbite. A l'approche de la crête, les particules de fluide sont au quasi-repos jusqu'à une distance de l'ordre de dix fois la profondeur.

Ensuite, elles s'élèvent et se déplacent vers l'avant pour atteindre leur vitesse maximale sous la crête, puis redescendent en se déplaçant toujours vers l'avant jusqu'à revenir à la profondeur qu'elles occupaient initialement.



**Figure 6.1** : Trajectoires des particules fluides lors du passage d'une onde solitaire.

Ainsi, il y a un transport de masse fluide vers l'avant. Le volume d'eau déplacé est égal à la quantité de fluide située au dessus du niveau au repos :

$$(6.9) \quad Q = \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(r) dr = 4h^2 \sqrt{\frac{1}{3} \frac{H}{h}}$$

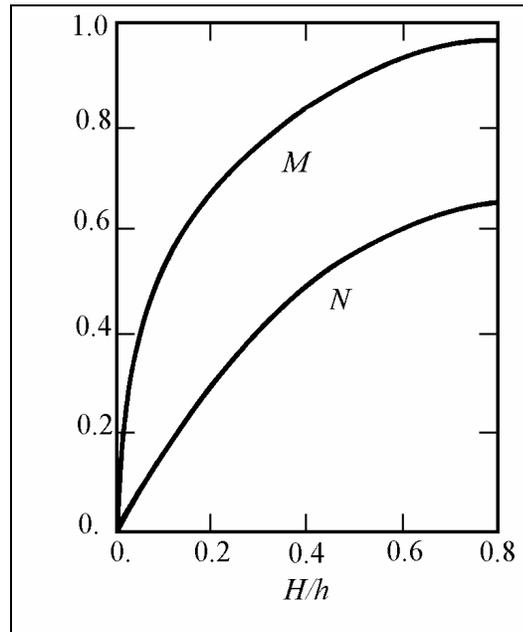
En fait, le volume de fluide est essentiellement situé dans une zone très proche de la crête. Pour une valeur  $H/h$  de 0.4, 90% du volume se situe dans l'intervalle  $[-2.7 h, +2.7 h]$  autour de la crête, tandis que 90% de l'énergie se situe dans l'intervalle  $[-1.7 h, +1.7 h]$ .

Etant donné l'importance de l'espace qui sépare deux crêtes à l'approche de la côte en eau peu profonde, il est raisonnable de négliger les interactions entre elles et d'utiliser ce modèle d'onde si la longueur d'onde et la période sont respectivement supérieures à des valeurs effectives  $\lambda_{\text{eff}}$  et  $T_{\text{eff}}$  avec :

$$(6.10) \quad \lambda_{\text{eff}} = \frac{2\pi}{M} \quad \text{et} \quad T_{\text{eff}} = \frac{2\pi}{M} \sqrt{\frac{h}{g}}$$

où  $M$  et  $N$  sont des fonctions de  $H/h$  comprises entre 0 et 1. qui ont été tabulées par W.H. Munk /1949/ et qui sont montrées sur la figure 6.2. J.G. Housley et D.C. Taylor /1957/ ont montré que, d'après l'expérience, ces équations sont insuffisantes pour bien délimiter le domaine d'application de l'onde solitaire et ont proposé la limite suivante :

$$(6.11) \quad \frac{H}{h} \leq 1.6 \left( T \sqrt{\frac{g}{h}} \right)^{-\frac{3}{2}} = 0.161 \left( \frac{h}{\lambda} \operatorname{th} 2\pi \frac{h}{\lambda} \right)^{\frac{5}{4}}$$



**Figure 6.2** : Valeurs de M et de N en fonction de H/h d'après W.H. Munk /1949/.

## 7. Les modèles numériques de houle

### 7.1. Hypothèses et définitions

Les hypothèses de base du modèle de Dean /1970/ sont les suivantes :

- Le fluide est parfait, incompressible et pesant ;
- L'écoulement est irrotationnel dans le champ de pesanteur terrestre ;
- La profondeur d'eau est constante, voire infinie ;
- La pression atmosphérique est supposée constante au dessus de la surface libre ;
- Aucune hypothèse particulière n'est faite au sujet de l'amplitude ou de la cambrure de la houle incidente. Elles seront, a posteriori, supposées être suffisamment faibles pour que l'ordre retenu conduise à des résultats d'une précision suffisante.

### 7.2. Développement de la fonction de courant

En désignant par  $u$  et  $w$  les composantes horizontale et verticale de la vitesse  $V$ , et par  $C$  la célérité de l'onde, la condition de surface libre dynamique se traduit par :

$$(7.1) \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}[u^2 + w^2] + g\eta + \frac{1}{\rho}p = \text{Cte}$$

tandis que la condition de surface libre cinématique s'écrit :

$$(7.2) \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{w}{u - C}$$

La condition de glissement sur le fond s'exprime en écrivant  $w=0$  sur le plan  $z=-h$ .

Par ailleurs, la fonction de courant  $\psi$  est associée à la fonction du potentiel des vitesses  $\phi$ . Ainsi l'équation de Laplace dans le domaine fluide s'écrit :

$$(7.3) \quad \begin{aligned} \Delta \phi &= 0 \\ \Delta \psi &= 0 \end{aligned}$$

En revenant dans les axes mobiles, la fonction de courant s'exprime par un développement de la forme suivante :

$$(7.4) \quad \psi(r, z) = \frac{\lambda}{T} z + \sum_{m=1}^M R(m) \frac{\text{sh } mk(z+h)}{\text{sh } mkh} \cos m(kr - \omega t)$$

Cette expression satisfait toutes les conditions aux limites en dehors de celle de Bernoulli. L'ajustement des valeurs de  $R(m)$  obtenu en découpant

l'intervalle  $[0, 2\pi]$  en au moins  $M$  intervalles (de l'ordre de  $4M$ ) permet de satisfaire au mieux l'équation de Bernoulli.

Il convient de noter que, d'une part le profil est une ligne de courant, et que, d'autre part, le niveau moyen ne sera conservé que si la condition suivante est vérifiée :

$$(7.5) \quad \int_0^\lambda \eta dr = 0$$

### 7.3. Domaine de validité

Le modèle le plus employé est celui de la fonction de courant au cinquième ordre.

Le domaine de validité de la houle de Dean d'ordre cinq recouvre ceux de la houle de Stokes et celui de la houle cnoïdale pour les grandes vagues en faible profondeur.

## 8. Références bibliographiques

- [1] **ARISTAGHES C. et ARISTAGHES P.**  
"Théories de la houle - houle réelle - propagation de la houle"  
Rapport S.T.C.P.M.V.N. n°85.1, Compiègne /1985/
- [2] **BONNEFILLE R.**  
"Cours d'hydraulique maritime"  
E.N.S.T.A. Editions Masson, Paris /1976/
- [3] **DEPARTEMENT OF THE U.S. ARMY**  
"Shore protection manual"  
Coastal Engineering Research Center, Washington, DC /1984/
- [4] **GUEVEL P. et DELHOMMEAU G.**  
"Théorie des ondes de gravité"  
Cours de la Section Spéciale d'Hydrodynamique Navale Avancée,  
Nantes /1978/
- [5] **KINSMAN B.**  
"Wind waves"  
Prentice-hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey /1965/
- [6] **KOMAR P.D.**  
"Beach processes and sedimentation"  
Prentice-hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey /1976/
- [7] **LARRAS J.**  
"Physique de la houle et des lames"  
Editions Eyrolles. Paris /1979/
- [8] **SUSBIELLES G. et BRATU C.**  
"Vagues et ouvrages pétroliers en mer"  
Publications de l' Institut Français du Pétrole  
Editions Technip, Paris /1981/