ENSTA Bretagne · Ifremer
15ÈMES JOURNÉES DE L'HYDRODYNAMIQUE
22 - 24 novembre 2016 - Brest

EXTRAPOLATION D'ESSAIS SUR MODELES REDUITS EN SIMILITUDE RESTREINTE OU PARTIELLE AU MOYEN DE PLUSIEURS ECHELLES

EXTRAPOLATION OF TESTS ON PHYSICAL MODELS IN RESTRICTED OR PARTIAL SIMILARITY THROUGH SEVERAL SCALE

Jean BOUGIS

Cabinet Jean Bougis – Ingénieur Conseil
32-34 chemin du Moulin 06650 Opio – e-mail jean.bougis@wanadoo.fr

Résumé

Les essais sur modèles réduits de phénomènes complexes respectent souvent une similitude dynamique fondamentale en acceptant la distorsion des autres similitudes dynamiques. L'extrapolation de certains efforts peut alors devenir hasardeuse. Lorsque des phénomènes évoluent différemment selon l'échelle, une approche souvent fructueuse consiste à réaliser des essais à différentes échelles pour cerner les distorsions dues à la seconde source d'efforts sur l'extrapolation qui conserve le produit Π de la première. C'est souvent le cas lorsque deux fluides interagissent. Cet article présente deux types de problèmes auxquels l'auteur a été confronté et pour lesquels il a fait réaliser des essais à deux échelles distinctes :

1) la génération de courants par l'élévation de rideaux de bulles dans l'eau ;
2) les impacts, plus ou moins ventilés, dus à des houles déferlantes sur des ouvrages côtiers.

Summary

The tests on reduced models of complex phenomena often respect a fundamental dynamic similarity accepting the distortion of other dynamic similarities. The extrapolation of some efforts can become hazardous. When phenomena evolve differently depending on the scale, often fruitful approach is to perform tests at various scales to identify the distortions due to the second source effort on extrapolation that keeps the product Π of the first. This is often the case when two fluids interact. This article presents two types of problems the author was confronted and for which he did perform tests at two different scales:

1) the generation of currents by rising bubble curtain in water;
2) more or less aerated impacts, due to breaking waves on coastal structures.

1 Introduction

Malgré les spectaculaires progrès des moyens de calcul matériels et immatériels, l'étude expérimentale reste la méthode d'investigation la plus sûre pour identifier et comprendre un phénomène physique complexe faisant intervenir de nombreux paramètres et pour valider les hypothèses sur lesquelles est construite la théorie qui sous-tend la modélisation numérique.

Les essais en grandeur nature sont toutefois rarement possibles pour des raisons d'encombrement, de temps et de coûts. Le recours à des essais sur modèle réduit constitue alors une alternative irremplaçable pour étudier un projet de quelque envergure. Cela suppose naturellement qu'il existe une similitude suffisante de comportement du phénomène physique entre le modèle et le prototype pour qu'il soit possible d'extrapoler au prototype les résultats obtenus sur le modèle.

L'analyse dimensionnelle permet de montrer que les équations qui lient des grandeurs intervenant dans un phénomène physique donné, conservent leur validité indépendamment du choix des unités des grandeurs de base. L'étude des similitudes physiques permet de montrer que les équations restent valides pour décrire des phénomènes physiques qui ne sont pas quantitativement identiques sous réserve de la conservation des produits Π du théorème de Vaschy-Buckingham ; chaque produit représentant le rapport entre les efforts d'inertie et les efforts d'une origine donnée (gravité, pression, viscosité, tension superficielle, compressibilité, élasticité, etc.).

Si l'une des sources d'efforts est manifestement prépondérante vis-à-vis de toutes les autres, soit en termes d'amplitude soit en termes de variation avec l'échelle, il suffit de conserver le produit correspondant (Froude, Euler, Reynolds, Weber, Mach, Cauchy, etc.) et de constater que la distorsion qui en résulte sur les autres types d'efforts est négligeable. Par contre, s'il existe au moins deux sources d'effort de même ordre de grandeur ou dont les variations avec l'échelle sont du même ordre de grandeur et que leurs produits Π ne peuvent pas être simultanément conservés, l'extrapolation devient très complexe, voire impossible.

Une approche souvent fructueuse consiste alors à réaliser des essais à différentes échelles pour cerner les distorsions dues à la seconde source d'efforts sur l'extrapolation qui conserve le produit Π de la première.

2 Similitudes restreintes ou partielles

Le théorème de Newton appliqué à la dynamique des fluides conduit à l'équation de Navier-Stokes qui stipule que les efforts d'inertie subits par une particule fluide sont, à chaque instant, égaux à la somme des efforts extérieurs qui lui sont appliqués (poids, pression, frottement, tension superficielle, etc.).

Les conditions aux limites des écoulements à surface libre, cinématique (pression constante sur la surface libre) et dynamique (énergie constante sur la surface libre), font intervenir les efforts de gravité.

Il en résulte qu'on ne saurait reproduire des essais sur modèles physiques réduits faisant intervenir des écoulements à surface libre sans conserver le rapport entre les efforts d'inertie et les efforts de gravité ; c'est-à-dire sans conserver le nombre de Froude :

$$\mathrm{Fr} = \frac{U}{\sqrt{gL}} \tag{1}$$

dans lequel g désigne l'accélération de la pesanteur terrestre, U la vitesse, et L une longueur caractéristique de l'écoulement.

Dés lors, les rapports entre les efforts d'inertie et les efforts d'autres origines ne peuvent plus être tous conservés et leurs similitudes sont distordues. Il existe alors des effets d'échelle et il n'est plus suffisant d'extrapoler les résultats obtenus sur le modèle pour évaluer les performances du prototype ; il faut les transposer en évaluant l'influence des termes négligés ou distordus par les approximations consenties. En d'autres termes l'extrapolation de ces efforts au réel avec le même coefficient que la similitude de Froude conduit soit à les surestimés, soit à les sous-estimer, et parfois de manière très importante.

Lorsque les mesures permettent d'appréhender séparément les efforts des différentes natures, l'extrapolation de ceux qui sont gouvernés par la similitude de Froude donne des résultats exploitables, même si l'extrapolation des autres est plus ou moins fortement altérée. Par contre lorsque les mesures ne permettent d'appréhender que la somme des efforts, même l'extrapolation de ceux qui sont gouvernés par la similitude de Froude devient hasardeuse, voire manifestement erronée.

C'est la problématique de l'extrapolation des essais qui font intervenir simultanément des phénomènes qui relèvent de deux similitudes « incompatibles ». Trois cas de similitudes distordues seront abordés dans la suite, un cas d'école et deux types de problèmes auxquels l'auteur a été confronté et pour lesquels il a fait réaliser des essais à deux échelles distinctes :

1) le célèbre exemple qui concerne la résistance à l'avancement d'une carène ;
2) la génération de courants par l'élévation de rideaux de bulles dans l'eau ;
3) les impacts, plus ou moins ventilés, dus à des houles déferlantes sur des ouvrages côtiers.

3 Notations

Les principales notations utilisées sont les suivantes :

- *Oxyz* : repère orthonormé direct ; *Oxy* plan de la surface libre ; *Oz* axe vertical ascendant,
- **i**,**j**,**k** : les vecteurs unitaires selon les trois axes,
- c : la célérité du son dans l'air,
- g : l'accélération de la pesanteur (g=9.81 m/s^2),
- h : la profondeur d'eau,
- H : la hauteur crête à creux de la houle,
- p : la pression de l'air,
- p_0 : pression atmosphérique normale $p_0=\rho_{a0}\, c_0^2/\gamma$,
- U : la vitesse dans le fluide.
- γ : le coefficient isentropique qui est égal à γ=7/5=1.4 pour les gaz diatomiques,
- ρ_a : la masse volumique de l'air,
- ρ_e : la masse volumique de l'eau,
- λ_G : Echelle géométrique,
- $b(z)$: la demi-largeur d'un jet plan noyé,
- $\rho_j(z)$: la masse volumique du mélange air-eau d'un jet.

4 Le problème de la résistance à la marche d'un navire

4.1 Aperçu historique

A partir du XVIII^e siècle le problème de la prédiction et de l'optimisation de la résistance à l'avancement des vaisseaux prit de l'importance. La théorie faisant défaut, des études expérimentales furent entreprises en remorquant des modèles réduits sur des bassins existants.

En 1775 l'abbé Charles Bossut, Nicolas Condorcet et Jean le Rond d'Alembert ont mesuré la résistance à l'avancement d'une vingtaine de navires, en les remorquant dans un bassin

ornemental des jardins de l'Ecole militaire. Ils essayèrent, mais sans succès, de déterminer les lois qui gouvernent la résistance à la marche des carènes en eau libre et en canal.

En 1785, Charles Romme réalisa, en rade de Rochefort, des essais répétitifs sur le vaisseau « L'Illustre », ainsi que des essais en bassin sur un modèle réduit au 1/12.

En 1869 l'architecte naval anglais William Froude émet l'hypothèse que la résistance totale est la somme d'une résistance directe et d'une résistance de frottement. En 1871 il fit construire le premier bassin de traction à Torquay. Des essais sur le modèle au 1/16 de la corvette « Greyhound » furent réalisés et les résultats obtenus furent comparés à ceux du prototype. La résistance à la marche du prototype était supérieure de 10% aux prévisions faites sur modèle pour une carène lisse.

Ce n'est qu'au début du XX^{e} siècle qu'a été réellement développée l'analyse dimensionnelle. Ce n'est qu'en 1930 que la réciproque au théorème de Bertrand est apportée par Kupnhyeb : « Si deux phénomènes physiques de même espèce ont les mêmes produits Π, ils sont similaires ».

4.2 L'idée de Froude

L'idée de William Froude (1869) est judicieuse, mais finalement assez simple ; la résistance à l'avancement dépend de deux phénomènes :

1) le champ de vagues engendré par la carène qui se déplace sur la surface libre, dont la résistance est gouvernée par la similitude de Reech-Froude qui est connue depuis le milieu du XIX^{e} siècle (Ferdinand Reech 1852) ;
2) le frottement de l'eau sur la carène, dont la résistance est gouvernée, mais on ne le sait pas encore, par la similitude de Reynolds qui ne sera connue qu'à la fin du XIX^{e} siècle (Osborne Reynolds 1883) et qui doit conserver le nombre de Reynolds :

$$\mathrm{Re} = \frac{UL}{\nu} \tag{2}$$

où ν est la viscosité cinématique du fluide ;

alors faisons des essais de natures et d'échelles différentes pour cerner ces deux composantes.

En assumant l'hypothèse que la résistance de frottement d'une carène est sensiblement la même que celle d'une planche de même longueur, de même surface mouillée et de même état de surface, Froude va retrancher à la résistance à l'avancement mesurée sur la carène, celle mesurée en tractant la « planche équivalente ». Il va ensuite extrapoler la différence obtenue au moyen de la similitude de Froude et enfin ajouter la résistance de la « planche équivalente » à l'échelle du navire.

L'analyse du raisonnement de Froude permet de le généraliser pour extrapoler des essais faisant intervenir deux phénomènes qui évoluent de manières différentes en fonction de l'échelle du modèle. C'est en particulier le cas de phénomènes physiques qui font intervenir deux fluides qui interagissent, comme l'eau et l'air.

4.3 Utilisation d'essais à deux échelles

Différentes approches peuvent être utilisées selon que la loi de frottement est plus ou moins bien connue, voire inconnue. L'exemple de la résistance à la marche des navires permet de construire la méthode d'extrapolation sur des phénomènes connus et maitrisés en mettant en évidence les points délicats vis-à-vis des gammes d'échelles possibles.

Ecrivons que la résistance à l'avancement totale R_t est la somme d'une résistance R_w correspondant à la génération des vagues d'accompagnement et d'une résistance de frottement de l'eau sur la carène R_f :

$$R_t(\mathrm{Fr},\mathrm{Re}) = R_w(\mathrm{Fr}) + (1+k)R_f(\mathrm{Re}) \tag{3}$$

où k est le coefficient de forme qui prend en compte le fait que le frottement se produit sur la carène en forme et non sur une plaque plane. Il peut être déterminé en écrivant qu'aux faibles vitesses la résistance de vague est nulle ou que la résistance totale est proportionnelle à U^2. En désignant par S la surface mouillée de la carène, l'expression (3) peut s'écrire sous la forme adimensionnelle suivante :

$$C_t(\mathrm{Fr},\mathrm{Re}) = \frac{R_t(\mathrm{Fr},\mathrm{Re})}{\rho U^2 S/2} = C_w(\mathrm{Fr}) + (1+k)C_f(\mathrm{Re}) \tag{4}$$

4.3.1 La loi de frottement est complètement connue

Supposons pour commencer que le coefficient de frottement est connu en fonction du nombre de Reynolds, soit expérimentalement par points à partir de la traction de diverses planches équivalentes à différentes échelles, soit théoriquement, puis numériquement, à partir d'une formule analytique comme par exemple la formule de l'International Towing Tank Conference (ITTC) 57 pour une carène lisse nue (2002) :

$$C_f(\mathrm{Re}) = \frac{0.075}{\left(\log_{10}\mathrm{Re} - 2\right)^2} \tag{5}$$

L'extrapolation par la méthode de Froude, aujourd'hui « normalisée » par les procédures recommandées de l'ITTC s'impose comme la solution la plus simple et la plus fiable :

$$\begin{aligned} C_{wP}(\mathrm{Fr}) &= C_{wM}(\mathrm{Fr}) = C_{tM}(\mathrm{Fr},\mathrm{Re}_M) - (1+k)C_{fM}(\mathrm{Re}_M) \\ C_{tP}(\mathrm{Fr},\mathrm{Re}_P) &= C_{wP}(\mathrm{Fr}) + (1+k)C_{fP}(\mathrm{Re}_P) \end{aligned} \tag{6}$$

naturellement cette formulation est complétée par un terme prenant en compte la rugosité de la carène et par des termes prenant en compte les appendices.

4.3.2 La loi de frottement est inconnue

Supposons désormais que la loi de frottement en fonction du nombre de Reynolds est inconnue. Nous pouvons toujours écrire un développement en série de Taylor au voisinage des caractéristiques du modèle M_1 à l'échelle λ_1 :

$$C(\mathrm{Fr},\mathrm{Re}) \approx C(\mathrm{Fr},\mathrm{Re}_{M_1}) + \frac{\partial C(\mathrm{Fr},\mathrm{Re}_{M_1})}{\partial X}\left(X - X_{M_1}\right) \tag{7}$$

où X représente une variable caractéristique de l'échelle : l'échelle λ elle-même, le nombre de Reynolds Re, son logarithme $\log_{10}$Re, etc. ; ou leurs inverses. Si nous connaissons le résultat pour un deuxième modèle M_2 à échelle λ_2, nous pouvons écrire au premier ordre :

$$\frac{\partial C(\mathrm{Fr},\mathrm{Re}_{M_1})}{\partial X} = \frac{C(\mathrm{Fr},\mathrm{Re}_{M_2}) - C(\mathrm{Fr},\mathrm{Re}_{M_1})}{X_{M_2} - X_{M_1}} = (1+k)\frac{C_f(\mathrm{Re}_{M_2}) - C_f(\mathrm{Re}_{M_1})}{X_{M_2} - X_{M_1}} \tag{8}$$

et :

$$C(\mathrm{Fr},\mathrm{Re}) \approx C(\mathrm{Fr},\mathrm{Re}_{M_1}) + (1+k)\frac{C_f(\mathrm{Re}_{M_2}) - C_f(\mathrm{Re}_{M_1})}{X_{M_2} - X_{M_1}}\left(X - X_{M_1}\right) \tag{9}$$

Il est évident que cette formulation sera d'autant plus précise que les dérivées d'ordres supérieurs à l'unité seront négligeables. Considérons par exemple un navire de 100 m de long se déplaçant à la vitesse nominale de 7.8 m/s, soit un nombre de Froude de Fr=0.25 et un nombre de Reynolds Re=7.8 10^8 avec $\nu = 10^{-6}$ m^2/s, pour lequel des essais ont été réalisés à trois échelles 1/20, 1/10 et 1/5. le coefficient de frottement est supposé connu aux trois échelles expérimentalement à partir de la traction des planches équivalentes aux trois échelles.

Le tableau 1 rassemble les valeurs des grandeurs caractéristiques. Il apparaît ainsi que la différentiation numérique brutale entre deux échelles (1/20 et 1/10) puis (1/10 et 1/5), sans

connaître la loi de frottement, conduit à des erreurs d'extrapolation à peine moins importantes que l'extrapolation à Reynolds constant. L'erreur dépend également beaucoup du choix de la variable, selon qu'elle se rapproche plus ou moins de celle qui intervient dans la loi de frottement. Naturellement, l'erreur diminue lorsqu'on adopte des échelles de plus en plus grande et s'annule lorsqu'on adopte l'échelle 1 ; ce qu'a fait Froude.

λ	1/20	1/10	1/1	-	1/10	1/5	1/1	-
C_f(ITTC57)	0.00306	0.00257	0.00157	-	0.00257	0.00219	0.00157	-
X	$\partial Cf/\partial X$		C_f	Erreur	$\partial Cf/\partial X$		C_f	Erreur
λ	-9.80E-03		–0.00625		-3.81E-03		-0.00086	
$1/\lambda$	4.90E-05		0.00213	-35%	7.62E-05		0.00188	-20%
Re	-3.00E-11		–0.02064		-8.24E-12		-0.00381	
1/Re	6.78E+03		0.00231	-47%	1.49E+04		0.00200	-27%
$\log_{10}$Re	-1.09E-03		0.00094	40%	-8.44E-04		0.00130	17%
$1/\log_{10}$Re	5.58E-02		0.00130	18%	4.91E-02		0.00145	8%

Tableau 1 : Extrapolation de C_{fP} d'après ses valeurs à deux échelles.

4.3.3 La loi de frottement est connue à un coefficient prés

Supposons enfin que la loi de frottement en fonction du nombre de Reynolds est connue à un coefficient près :

$$C_f(\mathrm{Re}) = \frac{A}{\left(\log_{10}\mathrm{Re} - 2\right)^2} \tag{10}$$

Si nous réalisons des essais sur deux modèles M_1 et M_2 à deux échelles λ_1 et λ_2, nous obtenons les trois équations suivantes :

$$\begin{aligned} C_{tM_1}(\mathrm{Fr}_{M_1}, \mathrm{Re}_{M_1}) &= C_{wM_1}(\mathrm{Fr}_{M_1}) + (1+k)C_{fM_1}(\mathrm{Re}_{M_1}) \\ C_{tM_1}(\mathrm{Fr}_{M_2}, \mathrm{Re}_{M_2}) &= C_{wM_2}(\mathrm{Fr}_{M_2}) + (1+k)C_{fM_2}(\mathrm{Re}_{M_2}) \\ C_{wM_1}(\mathrm{Fr}_{M_1}) &= C_{wM_2}(\mathrm{Fr}_{M_2}) \end{aligned} \tag{11}$$

reliant les quatre inconnues : $C_{wM_1}(\mathrm{Fr}_{M_1}), C_{wM_2}(\mathrm{Fr}_{M_2}), C_{fM_1}(\mathrm{Re}_{M_1})$ et $C_{fM_2}(\mathrm{Re}_{M_2})$. Il nous faut donc construire une quatrième équation au moyen de la relation (10), en écrivant le rapport entre le coefficient du modèle 2 et celui du modèle 1 :

$$\frac{C_f(\mathrm{Re}_{M_2})}{C_f(\mathrm{Re}_{M_1})} = \left(\frac{\log_{10}\mathrm{Re}_{M_1} - 2}{\log_{10}\mathrm{Re}_{M_2} - 2}\right)^2 \tag{12}$$

Il est alors possible de déterminer les quatre inconnues et, connaissant le coefficient de frottement des deux modèles de déterminer la constante A. Les coefficients $C_{wP}(\mathrm{Fr}_P)$ et $C_{fP}(\mathrm{Re}_P)$ sont alors également déterminés.

5 Le problème de l'atténuation de la houle par des rideaux de bulles

5.1 Motivation

Les marchés de la croisière, de la grande plaisance et du transport de passagers par navettes maritimes se développent, faisant apparaître la nécessité de protéger temporairement des appontements, le temps de débarquer ou d'embarquer.

C'est dans ce contexte qu'au milieu de la décennie 2000 BRL Ingénierie a développé le concept d'Appontement Temporairement Auto–Protégé (ATAP) contre la houle par un brise-lames pneumatique (Beynet et Bougis 2008). La mise au point du dispositif s'est faite en canal à houle au laboratoire ACRI-IN en 2006.

5.2 Aperçu historique

Le brise-lames pneumatique consiste à créer, au-dessus d'une certaine profondeur, un rideau de bulles d'air qui génère, de part et d'autre, une cellule de courant dont la vitesse est horizontale au voisinage de la surface libre et qui, dans certaines conditions, bloque la propagation de la houle incidente et crée une zone de calme à l'arrière du dispositif.

C'est en 1907 que l'américain Brasher (1915) a découvert la possibilité de protéger un plan d'eau contre l'agitation au moyen d'un rideau de bulles ascendant. Ce phénomène a d'abord été utilisé d'une manière empirique, en partie fondée sur de fausses croyances, avec des résultats parfois heureux mais le plus souvent décevants.

Aux cours des travaux qu'il a menés pour la préparation du débarquement en Normandie, Taylor (1955) a établi que c'est le courant généré par le rideau de bulles qui s'oppose en totalité ou en partie à la propagation de la houle. De nombreuses autres recherches et études théoriques ont été menées sur ce sujet. Ce procédé a ensuite été utilisé avec d'avantage de bonheur, essentiellement pour la protection temporaire de zones de travaux, sans pour autant que les paramètres du problème soient tous suffisamment bien cernés pour en maîtriser les conditions économiques.

5.3 La problématique des rideaux de bulles

Dans les gammes de débits qui nous intéressent ici, la physique des rideaux de bulles qui montent dans l'eau présente deux régimes de fonctionnement :

1) Pour des bulles assez grosses associées à des débits d'air pas trop importants, leur capacité ascensionnelle est individuelle. Les bulles montent individuellement en grossissant progressivement. Lorsque la concentration des bulles augmente, elles interagissent et la notion de vitesse d'entrave doit être prise en compte.
2) Pour des bulles assez fines associées à des débits d'air soutenus, leur capacité ascensionnelle est collective. L'ensemble des bulles monte comme un courant de densité ; chacune grossissant progressivement.

La pression n'intervenant dans l'équation de Navier-Stokes que par son gradient, pour l'écoulement de l'eau, la référence de pression est arbitraire (pression nulle à la surface libre). Par contre le comportement des bulles est gouverné par la loi de compressibilité des gaz qui impose la référence à la pression absolue. Le premier écoulement relève donc de la similitude de Froude qui doit conserver le nombre de Froude Fr et le second de la similitude de Cauchy qui doit conserver le nombre de Cauchy Ca :

$$\mathrm{Fr} = \frac{U}{\sqrt{gh}} \qquad ; \qquad \mathrm{Ca} = \frac{\rho_e U^2}{\rho_{a0} c_0^2} = \frac{\rho_e U^2 / \gamma}{\rho_{a0} c_0^2 / \gamma} = \frac{\rho_e U^2}{\gamma p_0} \tag{13}$$

Devant l'impossibilité d'assurer une similitude complète, nous avons assumé la similitude restreinte de Froude dont l'extrapolation doit être corrigée pour les autres similitudes (Cauchy et Weber). Ces corrections étant très difficiles à établir sur le plan théorique, nous avons préféré recourir à une évaluation empirique des effets d'échelle, dans la gamme de paramètres qui nous intéresse, en procédant à des essais à deux échelles pas trop éloignées des dimensions du prototype.

En retenant les profondeurs de 1.50 m et de 0.75 m (échelles de l'ordre de 1/3 à 1/13 pour un prototype en profondeur de 5 à 10 m), nous avons substitué une extrapolation empirique, restreinte à des variations limitées des paramètres, à l'extrapolation théorique générale mais trop complexe. La figure 2 montre a) un essai avec un rideau de bulles fines à gros débit et b) la relation entre le diamètre des trous de soufflage (nul pour les bulleurs) et le produit du débit d'eau du courant par la profondeur pour les deux profondeurs h de 0.575 m et 1.50 m.

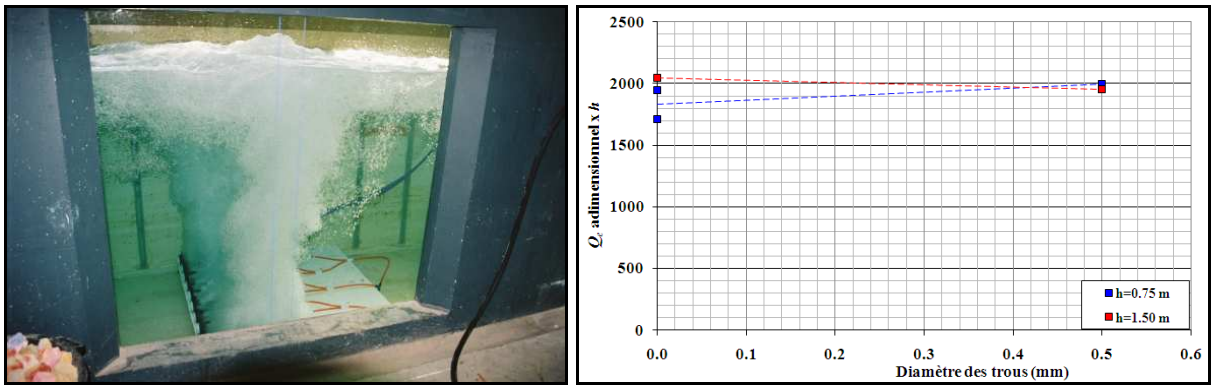

Figure 2 : a) Rideau de bulles – b) Débit adimensionnel du courant x *h*

5.4 Comportement individuel des bulles

Une bulle contenant un volume d'air normal (à la pression p_0) égal à $v_a = 4\pi r_a^3/3$, isolée dans le fluide à la cote *z*, a une masse égale à $m_a = \rho_a 4\pi r_a^3/3$. La pression hydrostatique s'écrit :

$$p = p_0 - \rho_e g z \qquad \text{avec : } z \in [-h,0]. \tag{14}$$

Les efforts auxquels est soumise la bulle sont les suivants :

- son poids : $\mathbf{p} = m\mathbf{g} = -\rho(z)(4\pi r^3(z)/3)g\mathbf{k}$;
- la poussée d'Archimède : $\mathbf{a} = +\rho_e(4\pi r^3(z)/3)g\mathbf{k}$;
- la force de frottement : $\mathbf{f} = (1/2)\rho_e s(z)u^2(z)C_d(z)\mathbf{k} = (1/2)\rho_e \pi r^2(z)u^2(z)C_d(z)\mathbf{k}$

L'équation de Newton s'écrit donc :

$$\rho(z)\frac{4}{3}\pi r^3(z)\ddot{z}\mathbf{k} = +\rho_e\frac{4}{3}\pi r^3(z)g\mathbf{k} - \rho(z)\frac{4}{3}\pi r^3(z)g\mathbf{k} - \frac{1}{2}\rho_e\pi r^2(z)\dot{z}^2(z)C_d(z)\mathbf{k} \tag{16}$$

les bulles n'ayant guère d'inertie, la vitesse limite est vite atteinte. Elle s'écrit en régime de Stokes pour une évolution adiabatique :

$$\dot{z}(z) = \sqrt{\frac{\rho_e - \rho(z)}{\rho_e}\frac{8}{3}\frac{r(z)g}{C_d(z)}} = \frac{2g}{9\nu}\left(\frac{p_0}{p_0 - \rho_e g z}\right)^{\frac{2}{3\gamma}} r_a^2 \tag{17}$$

et ne dépend que de la quantité d'air de la bulle et de sa profondeur d'immersion.

Ainsi, pour une quantité d'air donné, la vitesse limite de la bulle, et le courant qu'elle peut engendrer, ne dépendent que de la profondeur d'immersion. La profondeur n'intervient donc qu'en fonction du temps et de l'espace qu'elle laisse au courant pour s'établir. La vitesse limite n'est donc pas en similitude de Froude, mais en similitude de Cauchy :

$$\mathrm{Ca} = \frac{\rho_e \dot{z}^2(z)}{\gamma p_a} = \frac{\rho_e}{\gamma p_a}\left(\frac{2g}{9\nu}\right)^2\left(\frac{p_0}{p_0 - \rho_e g z}\right)^{\frac{4}{3\gamma}} r_a^4 = C^{te} \tag{18}$$

5.5 Comportement collectif des bulles

Le comportement collectif des bulles est similaire à celui d'un jet noyé plan vertical soufflé avec un débit de masse et sans débit de quantité de mouvement. Cette dernière n'est apportée que par l'écart de masse volumique entre le jet noyé (mélange d'air et d'eau) et le fluide ambiant (eau seule). Par contre la vitesse n'est limitée que par le cisaillement du jet dans l'eau.

Les efforts auxquels est soumise une tranche d'épaisseur *dz* du rideau de bulles sont les suivants :

- son poids : $\mathbf{p} = m\mathbf{g} = -\rho_j(z)2b(z)ldzg\mathbf{k}$;

- la poussée d'Archimède : $\mathbf{a} = +\rho_e 2b(z) l dz g \mathbf{k}$;
- la force de frottement : $\mathbf{f} = (1/2)\rho_e 2 l dz u^2(z) C_c(z) \mathbf{k}$

où la demi-ouverture du jet peut s'écrire sous la forme $b(z)=b_0+(h-z)\mathrm{tg}\beta$. L'équation de Newton s'écrit donc :

$$\rho_j(z) 2b(z) l dz \ddot{z}\mathbf{k} = +\rho_e 2b(z) l dz g \mathbf{k} - \rho_j(z) 2b(z) l dz g \mathbf{k} - \rho_e l dz \dot{z}^2(z) C_c(z) \mathbf{k} \quad (19)$$

d'où la vitesse limite :

$$\dot{z}(z) \approx \sqrt{\left(\frac{\rho_e - \rho_j(z)}{\rho_e}\right)\frac{2b(z)}{C_c(z)} g} \quad (20)$$

Cette vitesse est supérieure et a une capacité d'entraînement supérieure à celle d'une bulle isolée.

5.6 Coefficient de transmission du brise-lames pneumatique

Les essais menés aux deux échelles ont permis de montrer que pour un débit d'air donné, le débit d'eau entraîné est proportionnel à $\sqrt{gh}$. Ils ont également permis d'établir une formulation reliant la longueur d'onde de la houle, la profondeur d'eau, le coefficient de transmission de la houle et le débit d'air adimensionnel, avec une avec une précision de ±5%.

$$\frac{\lambda}{h}(C_t) = \left(a_3 C_t^3 + a_2 C_t^2 + a_1 C_t + a_0\right)\sqrt{\tilde{Q}_a h} \qquad \text{avec } \tilde{Q}_a = 60000\frac{Q_a}{Bh\sqrt{gh}} \quad (21)$$

6 Le problème des impacts sur un mur de digue

6.1 Motivation

Le Département des Pyrénées Atlantiques assure l'entretien des digues de la baie de St-Jean-de-Luz/Ciboure (Socoa, Artha et Sainte Barbe). Ces digues en maçonnerie sont assises sur des talus en enrochements. Des fissures, des fractures verticales et des arrachements de maçonnerie ont été observés sur les digues d'Artha et de Socoa. Ces dommages étant essentiellement dus aux pressions induites par les impacts des lames déferlantes sur les parois des deux ouvrages, le Département a fait réaliser des essais sur modèles physiques (Bougis *et al.* 2016).

6.2 La problématique des impacts

Les impacts hydrodynamiques sur un mur induisent des efforts de pression d'origine incompressible (impact des lames d'eau) dits chocs hydrodynamiques et des efforts d'origine compressible (compression de l'air par les crêtes déferlantes) dits chocs acoustiques. La pression n'intervenant dans l'équation de Navier-Stokes que par son gradient, dans le premier cas la référence de pression est arbitraire (pression nulle à la surface libre). Dans le second cas la loi de compressibilité des gaz impose la référence à la pression absolue. Ces deux types d'efforts relèvent donc respectivement de la similitude de Froude qui doit conserver le nombre de Froude Fr et de la similitude de Cauchy qui doit conserver le nombre de Cauchy Ca :

$$\mathrm{Fr} = \frac{U}{\sqrt{gh}} \quad ; \quad \mathrm{Ca} = \frac{\rho_e U^2}{\rho_{a0} c_0^2} = \frac{\rho_e U^2/\gamma}{\rho_{a0} c_0^2/\gamma} = \frac{\rho_e U^2}{\gamma p_0} \quad (22)$$

dont le respect simultané n'est pas possible. Le respect de la similitude de Froude étant incontournable pour la modélisation de la houle, les essais doivent être réalisés avec une distorsion de la similitude de Cauchy qui conduit à des efforts d'impacts compressibles dont l'extrapolation est très surestimés par la similitude de Froude.

Pour pallier cette limitation, on a procédé en trois étapes :

1) formulation d'une loi d'extrapolation paramétrique fondée sur l'analyse dimensionnelle et le modèle de Bagnold (1939) ;
2) réalisation de modèles physiques en canal à deux échelles différentes (au 1/30 par ARTELIA et au 1/60 par ACRI-IN) sur une section caractéristiques de chacune des digues d'Artha et de Socoa (pente des fonds, talus et superstructure) ;
3) calage des paramètres de la loi pour faire converger les deux extrapolations.

6.3 Modèle théorique de Bagnold

En similitude de Froude, le coefficient d'extrapolation des pressions est l'échelle géométrique $\lambda_{Fr}=\lambda_G$. En similitude de Cauchy, le coefficient d'extrapolation λ_{Ca} à appliquer aux pics de pression s'écrit :

$$\lambda_{Ca} = \left[\frac{p_{max} - p_0}{p_0}\right]_P \Big/ \left[\frac{p_{max} - p_0}{p_0}\right]_M = \frac{p_{max\,P} - p_{_0}}{p_{max\,M} - p_0} \tag{23}$$

La théorie élaborée par Bagnold (1939) pour définir ce coefficient est utilisée par de nombreux auteurs. La lame déferlante est assimilée à un volume d'eau de hauteur H et de longueur L qui se déplace vers le mur à la vitesse u_0. Lorsqu'elle approche de la paroi à une distance D, la lame d'air de hauteur H et d'épaisseur D est piégée. La lame d'eau agit alors comme un piston. L'air qui ne peut plus s'échapper, subit une compression adiabatique jusqu'à ce l'eau frappe le mur. Cette approche analytique permet d'obtenir l'équation de Bagnold, où Ba désigne le nombre de Bagnold :

$$\mathrm{Ba} = 1.4\frac{L}{D}\mathrm{Ca} = 5\left(\frac{p_{max}}{p_0}\right)^{\frac{2}{7}} + 2\left(\frac{p_{max}}{p_0}\right)^{-\frac{5}{7}} - 7 \tag{24}$$

6.4 Effet des échappements d'air

La pression maximale atteinte lors de l'impact dépend de la quantité d'air confinée par la crête de la lame ; laquelle est conditionnée par la distance entre le point de déferlement et le mur. Lorsque la lame approche du mur, il une partie de l'air enfermé dans la poche peut s'échapper vers le haut le long du mur. Il en résulte une diminution du pic de pression qui est moins importante sur le prototype que sur le modèle réduit.

Lorsqu'on s'intéresse à la phénoménologie physique, ce phénomène doit être pris en compte sous une forme permettant de le quantifier. Par contre, lorsqu'on s'intéresse au risque statistique du dépassement d'une pression donnée, il n'est pas indispensable d'expliquer la distribution obtenue ; il suffit que le nombre de lames soit assez important pour que la queue de distribution soit statistiquement réaliste.

6.5 Rapport *L/D*

Dans la relation (24), le rapport entre la pression maximale et la pression atmosphérique dépend du nombre de Cauchy et du rapport L/D particulièrement délicat à évaluer. Nous avons utilisé les travaux expérimentaux d'Adeyemo (1967) qui a étudié les dissymétries de forme des profils des houles pré-déferlantes sur des pentes comprises entre 1/18 et 1/4. Il a utilisé le rapport H_a entre la distance horizontale entre une crête et l'intersection avec le niveau moyen de la surface libre qui la précède et la distance horizontale entre la même crête et l'intersection avec le niveau moyen de la surface libre qui la suit.

En assumant l'hypothèse que $D/L \approx H_a$, pour les très faibles pentes et les thkh variant de 0.45 à 1.00, le coefficient H_a varie entre 0.60 et 1.00. Pour les très faibles profondeurs relatives ($h/\lambda < 0.08$) la dispersion des résultats est importante en raison des difficultés à obtenir

des houles stables. Ainsi, le rapport *L/D* varie entre 1.00 et 1.67.

6.6 Loi d'extrapolation

Le modèle de Bagnold permet de poser le cadre théorique et d'aboutir à une relation rigoureuse du point de vue dimensionnel qui reste à valider expérimentalement. Le rapport *L/D* joue le rôle d'un paramètre de forme de la houle qui peut inclure des notions plus complexes que le seul rapport de ces longueurs. Réécrivons le nombre de Cauchy avec la vitesse de la houle au déferlement $U_B = \sqrt{g(h+H_s)}$:

$$Ca = \frac{\rho_e U_B^2}{\rho_{a0} c_0^2} = \frac{\rho_e g(h+H_s)}{\gamma p_0} \tag{25}$$

g, γ et p_0 sont égaux sur le prototype et sur le modèle, mais pas ρ_e (eau de mer et eau douce). Le nombre Ca s'écrit donc en fonction de la profondeur h en pied de l'ouvrage et de H_s :

$$\mathrm{Ca}_P = 0.0710(h+H_s) \text{ et } \mathrm{Ca}_M = 0.0692(h+H_s) \tag{26}$$

La relation (24) permet de tracer la courbe $\mathrm{Ba} = f(p_{\max} / p_0)$ en fonction de l'échelle ; les rapports $p_{\max P} / p_0$ et $p_{\max M} / p_0$ et leur rapport sont associer aux nombres de Cauchy :

$$\lambda_{\mathrm{Ca}}(\delta, h, H_s, T_p) = \frac{p_{\max P} - p_0}{p_{\max M} - p_0} \tag{27}$$

ce qui permet d'obtenir la relation empirique paramétrique de la forme suivante :

$$\lambda_{\mathrm{Ca}}^{0.25} = 1 + f(\delta, h, H_s, T_p) \ln \frac{\mathrm{Ca}_P}{\mathrm{Ca}_M} \tag{28}$$

la figure 3 présente a) une lame déferlante sur la digue d'Artha et b) les courbes d'extrapolation et les résultats d'essais pour *N*=5.25 m CM, H_{max} déferlante et *Tp*=16 s.

Il convient de remarquer que cette approche ne prend pas en compte la variation du rapport *L/D* avec la variation d'échelle, ni celle de la forme des lames déferlantes ; lesquelles sont essentiellement dues à la distorsion de la similitude de Weber.

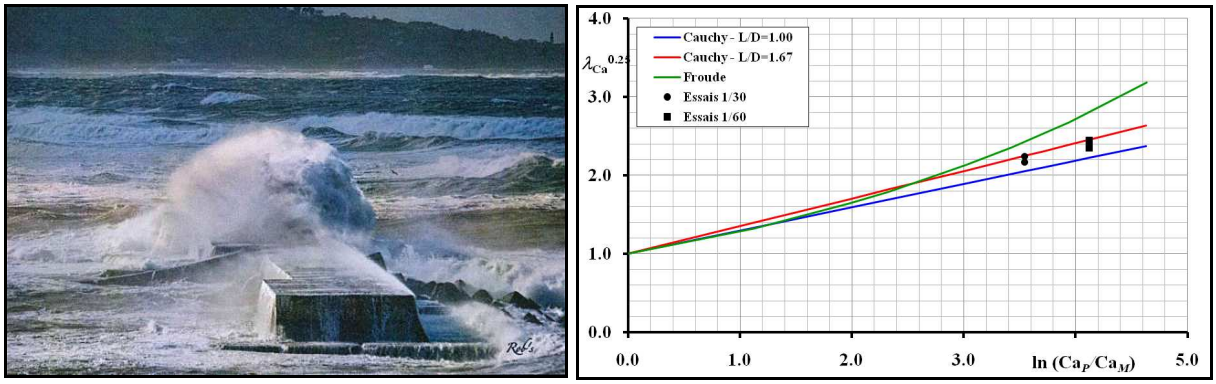

Figure 3 : a) Déferlement à l'Artha (photo Rob's) – b) Extrapolation des pics de pression

6.7 Coefficients d'extrapolation

Le tableau 2 rassemble les caractéristiques des coefficients d'extrapolation pour les deux similitudes de Froude et de Cauchy pour les deux digues d'Artha et de Socoa.

Les résultats présentés ci-dessus, montrent que l'extrapolation des pics de pression acoustique surestime les sollicitations de 20 à 35% au 1/30 et de 65 à 100% au 1/60. Sauf à recourir à des essais à grande échelle, il convient donc de corriger la distorsion de similitude de Cauchy.

Echelle géométrique		1	1/30	1/60
Coefficient d'extrapolation des longueurs		1	30	60
Coefficient d'extrapolation des masses volumiques de l'eau		1.000	1.026	1.026
Pressions et efforts hydrodynamiques – similitude de Froude (Artha et Socoa)				
Coefficient d'extrapolation des longueurs		1	30	60
Coefficient d'extrapolation des pressions	Pa	1.0	30.8	61.6
Pressions et efforts acoustiques – similitude de Cauchy pour la digue d'Artha				
Coefficient d'extrapolation des longueurs		1	25.2±1.0	35.8±1.0
Coefficient d'extrapolation des pressions	Pa	1.0	25.9	36.7
Pressions et efforts acoustiques – similitude de Cauchy pour la digue de Socoa				
Coefficient d'extrapolation des longueurs		1	22.0±0.8	30.6±0.9
Coefficient d'extrapolation des pressions	Pa	1.0	22.6	31.4

Tableau 2 : Extrapolations de Froude et de Cauchy pour les digues d'Artha et de Socoa

7 Conclusions et perspectives

Les différents exemples présentés montrent que les essais à échelles multiples permettent de corriger des distorsions de similitude avec trois niveaux de précision très différents en fonction qu'on connait la exactement la loi qui gouverne la similitude distordue, qu'on la connait sous forme paramétrique à un ou plusieurs coefficients près ou qu'on ignore tout d'elle.

Dans le dernier cas, pour pouvoir conclure, les essais doivent être réalisés à des échelles pas trop petites (> 1/10). Afin de réduire les échelles des modèles et donc les coûts des essais, il y a donc tout intérêt à connaître le mieux possible les lois de similitude qui gouvernent les différents paramètre du problème étudié.

8 Références

Adeyemo M. D. (1967) *Wave transformation and velocity fields in the breaker zone*, Ph.D. Thesis, University College London.

Bagnold R. A. (1939) Interim report on wave pressure research, *Journal of the Institution of Civil Engineers*, vol. 12, n°7, p. 202-226.

Beynet J.-M. & Bougis J. (2008) Processus de développement d'un débarcadère auto protégé contre la houle par un brise-lames pneumatique, *X^{èmes} Journées Nationales Génie Côtier – Génie Civil*, Sophia Antipolis 14-16 octobre 2008.

Bougis J., Rihouey D., Bernard S., Vergnet C., Cayrol C., Garcia N., Jocou F & Roudil A. (2016) Extrapolation d'essais d'impacts de la houle sur modèles réduits, *XIV^{èmes} Journées Nationales Génie Côtier – Génie Civil*, Toulon, 29 juin au 1er juillet 2016.

Brasher P. (1915) The Brasher air breakwater, *Compressed Air Magazine*, n°20.

Guilcher P.M., Brosset L., Couty N. & Le Touze, D. (2012) Simulations of breaking wave impacts on a rigid wall at two different scales with a two phase fluid compressible SPH model, Proc. *22nd International Offshore and Polar Engineering Conference*, (ISOPE).

ITTC (2002) *Recommended procedures – Performance, Propulsion*, 1978 ITTC Performance prediction method. 7.5-02-03-01.

Taylor G.I. (1955) The action of a surface current used as a breakwater, *Proceedings of the Royal Society of London*, Series A, Vol.231, n°1187, pp.466-478.