

## **Modèle d'approche de la houle par une méthode de réfraction–diffraction en coordonnées curvilignes**

Jean Bougis

*Ingénieur Conseil, 34 Chemin du Moulin, 06650 Opio, France,  
Tél. : 04.93.77.74.22, [jbougis@aws.fr](mailto:jbougis@aws.fr)*

**Résumé :** La propagation de la houle est suivie dans les coordonnées curvilignes orthogonales formées par ses rayons et par ses crêtes, solutions du problème de diffraction–réfraction. Ce processus est itératif puisque la métrique n'est pas connue a priori. Lorsque la houle tourne, la dérivée seconde de la hauteur est ainsi toujours calculée le long des crêtes. Les solutions propagatives sont recherchées en conservant la dérivée seconde de la hauteur dans le sens de la propagation. Le choix de l'enveloppe de la hauteur comme variable permet d'adopter un pas d'espace de l'ordre de la longueur d'onde et d'éliminer la dégradation de la solution le long des limites latérales du modèle. Cette méthode permet aussi d'obtenir une condition de radiation de la houle sur les limites fluides des modèles d'agitation.

**Mots clés :** houle, diffraction, réfraction, parabolique, condition de radiation.

**Abstract:** The wave propagation is followed in curvilinear orthogonal coordinates given by its rays and its crest, solutions of diffraction–refraction problem. This process is iterative as the metric is not known a priori. When the wave turn, the second derivative of wave height is thus always calculated along the crests. Propagation solutions are researched to compute the second derivative of height along the wave direction. The choice of the height envelope as variable enables us to use a space step commensurable with the wave length and to eliminate the solution degradation along the lateral model boundaries. This method also enables to obtain a wave radiation condition on the fluid boundaries of agitation models.

**Keywords:** wave, diffraction, refraction, parabolic method, radiation condition.

### **1. Introduction**

Les modèles d'approche sont destinés à suivre les modifications de direction et de hauteur que subit la houle lors de sa propagation du large à la côte, sous les effets des variations de la profondeur ou de la vitesse du courant. L'essentiel de l'information se propage dans la direction de la houle et le suivi des réflexions sur les côtes est alors d'un intérêt mineur. Les modèles de réfraction ne permettent pas de suivre la houle lors du contournement d'obstacles ou de hauts-fonds, quand la diffraction le long des crêtes devient importante, voire localement prépondérante.

Une méthode fructueuse pour conserver les effets de la diffraction le long des crêtes de la houle, tout en gardant des temps de calcul très brefs, consiste à projeter l'équation de diffraction-réfraction elliptique (Berkhoff<sup>1</sup>) sur un axe privilégié de propagation de la houle en négligeant la dérivée seconde de sa hauteur selon cet axe. L'équation obtenue se présente, en coordonnées cartésiennes, sous forme parabolique selon l'axe choisi (Radder<sup>2</sup>). Le champ de houle est incomplètement traité devant les obstacles (îles, hauts-fonds) puisque les réflexions sont négligées, mais aussi lorsque la houle tourne trop par rapport à l'axe de parabolisation. L'axe de calcul de la dérivée seconde n'est alors plus tangent à la crête. Au-delà d'une rotation de 30°, les résultats se dégradent rapidement et la méthode devient inopérante. Cette capacité angulaire peut être augmentée jusqu'à 50° ou 60° en tenant compte de dérivées d'ordre supérieur (Kirby<sup>3</sup>) ou en introduisant une relation de dispersion non linéaire (Dalrymple et Kirby<sup>4</sup>, Dalrymple et al.<sup>5</sup>).

Pour éliminer cette limitation angulaire du modèle mathématique, la propagation de la houle doit être suivie dans des coordonnées curvilignes orthogonales formées par ses rayons et par ses crêtes, solutions du problème traité (Isobe<sup>6</sup>). Ce processus est itératif puisque les axes de dérivation ne sont connus qu'après résolution du problème. La dérivée seconde de la hauteur de la houle selon l'axe transversal coïncide alors toujours avec celle qui engendre la diffraction le long des crêtes. La seule limitation angulaire provient alors de la précision, voire de la validité, des conditions écrites sur les limites latérales du modèle, lorsque la diffraction ne peut plus y être prise en compte de manière satisfaisante. Cette limitation angulaire est commune à tous les types de formulations paraboliques qui ne peuvent évidemment pas tenir compte d'informations extérieures à leurs limites.

## **2. Equation de réfraction-diffraction en pente douce**

### **2.1. Problème aux limites**

Soit un domaine fluide de profondeur  $z = -h(x, y)$ , siège de l'écoulement d'un courant indépendant du temps, caractérisé par sa ligne d'eau qui est la dénivelée moyenne de la surface libre  $z = \zeta(x, y)$ , et par sa vitesse  $\mathbf{U}(x, y)$  supposée homogène sur toute la profondeur. Le potentiel des vitesses  $\phi$  d'une houle simple, de pulsation  $\omega$  (période  $T = 2\pi/\omega$ ) dans le repère absolu et de nombre d'onde  $k$  (longueur d'onde  $\lambda = 2\pi/k$ ), qui se propage sur le plan d'eau soumis au courant doit vérifier le problème aux limites (1) obtenu en introduisant dans l'équation d'Euler-Lagrange un terme de dissipation de la forme  $-2\varepsilon\mathbf{U}$  destiné à obtenir un terme de frottement sur le fond conformément à l'hypothèse du fluide presque parfait (Bougis<sup>7</sup>) :

$$\begin{aligned} \Delta_2 \phi + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} &= 0 & z \in [-h, \zeta] \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} + \nabla_2 \phi \cdot \nabla_2 h &= 0 \Big|_{z=-h} & z = -h \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla_2 \right]^2 \phi + 2\varepsilon \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla_2 \right] \phi + g \frac{\partial \phi}{\partial z} - g \nabla_2 \phi \cdot \nabla_2 \zeta \right\} &= 0 \Big|_{z=\zeta} & z = \zeta \end{aligned} \quad (1)$$

Le potentiel des vitesses défini par (2) vérifie au premier ordre ce problème aux limites sous réserve que le fond et la ligne d'eau varient peu à l'échelle de la longueur d'onde de la houle, ce qui impose :  $\nabla h = O((h + \zeta)/\lambda)$  et  $\nabla \zeta = O((h + \zeta)/\lambda)$ .

$$\phi(x, y, z; t) = \Re \left\{ -\frac{ig}{2\sigma} \frac{\text{ch}k(z+h)}{\text{ch}k(\zeta+h)} H(x, y, \omega) e^{-i\omega t} \right\} \quad (2)$$

En désignant par  $\hat{H}(x, y, \omega)$  l'enveloppe de la hauteur de la houle et par  $S(x, y, \omega)$  sa phase, sa hauteur instantanée s'écrit en fonction des coordonnées spatiales :

$$H(x, y, \omega) = \hat{H}(x, y, \omega) e^{iS(x, y, \omega)} \quad (3)$$

Soit  $\sigma = \omega - \mathbf{U} \cdot \mathbf{k}$  la pulsation de la houle dans le repère lié au courant. Elle vérifie la relation de dispersion, qui s'écrit au même ordre d'approximation :

$$\sigma^2 - gk \text{th}(k(\zeta + h)) = 0 \quad (4)$$

La phase  $S(x, y, \omega)$  est constante le long des crêtes, mais elle peut varier rapidement le long des rayons, tandis que son gradient  $\mathbf{k} = \nabla S(x, y, \omega)$  et la hauteur  $\hat{H}(x, y, \omega)$  varient dans les mêmes conditions que la bathymétrie  $h(x, y)$  et la ligne d'eau  $\zeta(x, y)$ .

En intégrant au premier ordre en  $h/\lambda$  les équations (1) sur l'épaisseur de la lame d'eau, nous obtenons la forme généralisée de l'équation de Berkhoff :

$$\nabla \cdot (CC_g \nabla H) - g \nabla \zeta \cdot \nabla H + k^2 CC_g (1 + i v_i) H = 0 \quad (5)$$

Où  $v_i$  représente la dissipation due au frottement sur le fond (cf. §5.). En présence d'un courant, l'équation (5) est anisotrope puisque  $\nabla \zeta$ ,  $k$ , la célérité  $C$  et la vitesse de groupe  $C_g$  dépendent alors de la direction de propagation de l'onde.

### 3. Equation parabolisée en coordonnées curvilignes orthogonales

#### 3.1. Equation de propagation de la houle

Soit le système de coordonnées curvilignes orthogonales dont les axes  $\xi$  et  $\eta$  coïncident respectivement avec le rayon local et la crête locale de la houle.  $e_1$  et  $e_2$  sont les unités de longueur locales qui définissent la métrique du système :

$$e_1^2 = \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \quad \text{et} \quad e_2^2 = \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \quad (6)$$

Les opérateurs laplacien et gradient appliqués à la fonction  $H(\xi, \eta, \omega)$  s'écrivent :

$$\Delta H = \frac{1}{e_1 e_2} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{e_2}{e_1} \frac{\partial H}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{e_1}{e_2} \frac{\partial H}{\partial \eta} \right) \right] \quad \text{et} \quad \nabla H = \frac{1}{e_1} \frac{\partial H}{\partial \xi} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{e_2} \frac{\partial H}{\partial \eta} \mathbf{e}_2 \quad (7)$$

L'équation (5) devient donc dans ce système de coordonnées :

$$\begin{aligned} & \frac{CC_g}{e_1^2} \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} + \frac{CC_g}{e_2^2} \frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} + \left[ \frac{CC_g}{e_1 e_2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{e_2}{e_1} \right) + \frac{1}{e_1^2} \left( \frac{\partial CC_g}{\partial \xi} - g \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right) \right] \frac{\partial H}{\partial \xi} + \\ & \left[ \frac{CC_g}{e_1 e_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{e_1}{e_2} \right) + \frac{1}{e_2^2} \left( \frac{\partial CC_g}{\partial \eta} - g \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right) \right] \frac{\partial H}{\partial \eta} + k^2 CC_g (1 + i v_i) H = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

La parabolisation a pour objectif de décrire la propagation de la houle suivant les directions définies par les abscisses  $\xi$  croissantes. La fonction  $H$  sera donc écrite sous la forme (9) où  $\hat{H}$  et  $S$  sont des fonctions réelles représentant la hauteur de la houle et sa phase qui doit, par construction, vérifier la relation  $\nabla S = k \mathbf{e}_1$ .

$$H(\xi, \eta, \omega) = \hat{H}(\xi, \eta, \omega) e^{iS(\xi, \omega)} \quad (9)$$

Les dérivées première et seconde de  $H$  selon l'axe de propagation s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \xi} &= \frac{\partial \hat{H}}{\partial \xi} e^{iS} + ikH \\ \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} &= \frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial \xi^2} e^{iS} + ik \frac{\partial \hat{H}}{\partial \xi} e^{iS} + i \frac{\partial k}{\partial \xi} H + ik \frac{\partial H}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial \xi^2} e^{iS} + 2ik \frac{\partial H}{\partial \xi} + k^2 H + i \frac{\partial k}{\partial \xi} H \end{aligned} \quad (10)$$

En substituant dans (8) l'expression de la dérivée seconde (10), et en négligeant la dérivée seconde de  $\hat{H}$ , nous obtenons une équation parabolique selon l'axe  $\xi$  :

$$\begin{aligned} \frac{CC_g}{e_2^2} \frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} + \left[ 2ik \frac{CC_g}{e_1^2} + \frac{CC_g}{e_1 e_2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{e_2}{e_1} \right) + \frac{1}{e_1^2} \left( \frac{\partial CC_g}{\partial \xi} - g \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right) \right] \frac{\partial H}{\partial \xi} + \\ \left[ \frac{CC_g}{e_1 e_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{e_1}{e_2} \right) + \frac{1}{e_2^2} \left( \frac{\partial CC_g}{\partial \eta} - g \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right) \right] \frac{\partial H}{\partial \eta} + CC_g \left[ k^2 \left( 1 + \frac{1}{e_1^2} + i v_t \right) + i \frac{1}{e_1^2} \frac{\partial k}{\partial \xi} \right] H = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Les coordonnées cartésiennes se retrouvent en posant :  $\xi=x, \eta=y$  avec  $e_1=e_2=1$ .

### 3.2. Equation de propagation de l'enveloppe de la houle

L'équation (11) décrit les variations de la dénivelée de la surface libre au cours de la propagation de la houle. Ce qui impose, pour limiter l'amortissement numérique, d'utiliser un petit pas d'espace en  $\xi$ , de l'ordre de  $\lambda/100$ . Sa résolution est donc plus coûteuse que celle de l'équation de réfraction pure qui permet l'usage d'un pas d'espace de l'ordre de  $\lambda$ . Il est donc préférable de résoudre l'équation de réfraction-diffraction en fonction de l'enveloppe  $\hat{H}$  et non de  $H$ . Introduisons les expressions (9) et (10) dans l'équation (8) et éliminons l'exponentielle qui est en facteur, nous obtenons l'équation (12) :

$$\begin{aligned} \frac{CC_g}{e_1^2} \frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial \xi^2} + \frac{CC_g}{e_2^2} \frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial \eta^2} + \left[ 2ik \frac{CC_g}{e_1^2} + \frac{CC_g}{e_1 e_2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{e_2}{e_1} \right) + \frac{1}{e_1^2} \left( \frac{\partial CC_g}{\partial \xi} - g \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right) \right] \frac{\partial \hat{H}}{\partial \xi} + \\ \left[ \frac{CC_g}{e_1 e_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{e_1}{e_2} \right) + \frac{1}{e_2^2} \left( \frac{\partial CC_g}{\partial \eta} - g \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right) \right] \frac{\partial \hat{H}}{\partial \eta} + \\ \left[ k^2 CC_g \left( 1 - \frac{1}{e_1^2} + i v_t \right) + i \frac{CC_g}{e_1^2} \frac{\partial k}{\partial \xi} + ik \left( \frac{CC_g}{e_1 e_2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{e_2}{e_1} \right) + \frac{1}{e_1^2} \left( \frac{\partial CC_g}{\partial \xi} - g \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right) \right) \right] \hat{H} = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

En négligeant la dérivée seconde de  $\hat{H}$  par rapport à  $\xi$ , qui caractérise la variation de l'enveloppe de la hauteur sous l'effet de la diffraction normale aux lignes de crêtes, nous obtenons une expression parabolique suivant l'axe de propagation en fonction des dérivées premières et secondes suivant l'axe des crêtes :

$$\begin{aligned} \frac{CC_g}{e_2^2} \frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial \eta^2} + \left[ 2ik \frac{CC_g}{e_1^2} + \frac{CC_g}{e_1 e_2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{e_2}{e_1} \right) + \frac{1}{e_1^2} \left( \frac{\partial CC_g}{\partial \xi} - g \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right) \right] \frac{\partial \hat{H}}{\partial \xi} + \\ \left[ \frac{CC_g}{e_1 e_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{e_1}{e_2} \right) + \frac{1}{e_2^2} \left( \frac{\partial CC_g}{\partial \eta} - g \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right) \right] \frac{\partial \hat{H}}{\partial \eta} + \\ \left[ k^2 CC_g \left( 1 - \frac{1}{e_1^2} + i v_t \right) + i \frac{CC_g}{e_1^2} \frac{\partial k}{\partial \xi} + ik \left( \frac{CC_g}{e_1 e_2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{e_2}{e_1} \right) + \frac{1}{e_1^2} \left( \frac{\partial CC_g}{\partial \xi} - g \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right) \right) \right] \hat{H} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

### 3.3. Construction de la métrique

Le pas d'espace pour la progression de la houle est compté en nombre entier  $n$  de longueurs d'onde. Deux crêtes distantes de  $n\lambda$  étant connues, l'équation d'eikonale  $\mathbf{k}=\nabla S$  permet de construire, en réfraction pure, les rayons et la crête du pas suivant  $n\lambda$  plus loin, puis la métrique qui s'appuie sur ces trois crêtes.

Les crêtes de la houle sont, en tout point, orthogonales au vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  qui porte la vitesse de phase  $\mathbf{C}$  et la vitesse de groupe  $\mathbf{C}_g$ ; tandis que son flux d'énergie se conserve entre deux rayons absolus définis par les lignes tangentes au champ de vecteurs  $\mathbf{U}+\mathbf{C}_g$ . Si, en absence de courant les rayons de propagation de l'énergie sont orthogonaux aux crêtes, ce n'est plus le cas en présence d'un courant, sauf dans le cas particulier où le courant et la houle se propagent dans des directions parallèles. Les rayons absolus ne représentent alors plus la normale locale aux crêtes de la houle, parallèle au vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ , mais la direction de propagation de l'énergie de la houle. En posant  $\bar{h}=h+\zeta$  pour soulager l'écriture, les courbures des rayons et crêtes s'écrivent alors respectivement en fonction des dérivées de l'angle  $\alpha$  que fait le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  avec l'axe Ox :

$$C_{e_1} = \frac{\partial \alpha}{\partial e_1} = -\frac{\frac{\partial \mathbf{U} \cdot \mathbf{e}_1}{\partial e_2} + \frac{\sigma}{\text{sh}2k\bar{h}} \frac{\partial \bar{h}}{\partial e_2}}{(\mathbf{U} + \mathbf{C}_g) \cdot \mathbf{e}_1} \quad ; \quad C_{e_2} = \frac{\partial \alpha}{\partial e_2} \quad (14)$$

Elles sont liées par la relation linéaire (15) qui devient explicite en  $C_{e_1}$  lorsque le courant s'annule :

$$\left[ 2\sigma \text{ch}^2 k\bar{h} \mathbf{U} \cdot \mathbf{e}_1 + g \text{ch} k\bar{h} \text{sh} k\bar{h} + gk\bar{h} \right] C_{e_1} + 2\sigma \text{ch}^2 k\bar{h} \mathbf{U} \cdot \mathbf{e}_2 C_{e_2} = -2\sigma \text{ch}^2 k\bar{h} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial e_2} \cdot \mathbf{e}_1 - gk \frac{\partial \bar{h}}{\partial e_2} \quad (15)$$

L'équation différentielle du premier ordre en  $\alpha$  est intégrée de manière itérative par la méthode semi implicite de Crank–Nicholson.

La solution de l'équation complexe (12) n'est réelle que si le sinus de la phase est nul, c'est-à-dire sur les crêtes et dans les creux. Les crêtes sont donc déterminées en cherchant le lieu où la partie imaginaire de l'expression complexe de  $\hat{H}$  s'annule. La position de la troisième crête étant précisée, la métrique est corrigée, puis le calcul est recommencé. La convergence est obtenue en une ou deux itérations. Au-delà de cinq itérations, il est préférable de diminuer le pas d'espace.

### 3.4. Résolution de l'équation de propagation de l'enveloppe de la houle

Paraboliser l'équation elliptique est d'un intérêt théorique si la recherche de solutions par la méthode des caractéristiques n'en est pas la finalité. Il est donc préférable de chercher une solution propagative de l'équation elliptique. Les dérivées de  $\hat{H}$  selon  $\eta$  s'écrivent à partir du développement en série de MacLaurin :

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial \eta}(\xi, \eta) = \frac{\hat{H}(\xi, \eta + \Delta\eta) - \hat{H}(\xi, \eta - \Delta\eta)}{2\Delta\eta} + O((\Delta\eta)^2) \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial \eta^2}(\xi, \eta) = \frac{\hat{H}(\xi, \eta + \Delta\eta) - 2\hat{H}(\xi, \eta) + \hat{H}(\xi, \eta - \Delta\eta)}{(\Delta\eta)^2} + O((\Delta\eta)^2) \quad (17)$$

En notant  $A, B=0, C, D, E$  et  $F$  les coefficients de l'équation quadratique (12) pour soulager l'écriture, il vient après substitution des expressions (16) et (17) :

$$A \frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial \xi^2}(\xi, \eta) + D \frac{\partial \hat{H}}{\partial \xi}(\xi, \eta) + \left( \frac{C}{(\Delta\eta)^2} + \frac{E}{2\Delta\eta} \right) \hat{H}(\xi, \eta + \Delta\eta) + \left( F - \frac{2C}{(\Delta\eta)^2} \right) \hat{H}(\xi, \eta) + \left( \frac{C}{(\Delta\eta)^2} - \frac{E}{2\Delta\eta} \right) \hat{H}(\xi, \eta - \Delta\eta) = 0 \quad (18)$$

La discrétisation dans le sens de la propagation est plus délicate, puisqu'elle conditionne la stabilité et la convergence de la solution de l'équation. Adoptons une approximation de type Newmark<sup>8</sup> pour la fonction  $\hat{H}$  et sa dérivée selon  $\xi$  :

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial \xi}(\xi, \eta) = \frac{\partial \hat{H}}{\partial \xi}(\xi - \Delta\xi, \eta) + \Delta\xi \left[ (1-a) \frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial \xi^2}(\xi - \Delta\xi, \eta) + a \frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial \xi^2}(\xi, \eta) \right] \quad (19)$$

$$\hat{H}(\xi, \eta) = \hat{H}(\xi - \Delta\xi, \eta) + \Delta\xi \frac{\partial \hat{H}}{\partial \xi}(\xi - \Delta\xi, \eta) + \frac{(\Delta\xi)^2}{2} \left[ (1-2b) \frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial \xi^2}(\xi - \Delta\xi, \eta) + 2b \frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial \xi^2}(\xi, \eta) \right] \quad (20)$$

En introduisant ces expressions dans l'équation (18), nous obtenons un système d'équations linéaires tridiagonal dont le second membre dépend de la solution et de ses dérivées des deux pas d'espace précédents. Ce système permet de déterminer la dérivée seconde de  $\hat{H}$ . La dérivée première, puis  $\hat{H}$ , sont ensuite déterminées en appliquant les relations (19) et (20).

L'étude de la stabilité de la méthode de Newmark montre que la solution est inconditionnellement stable si les coefficients  $a$  et  $b$  vérifient la relation :

$$2b \geq a \geq \frac{1}{2} \quad (21)$$

La convergence est du premier ordre en fonction du pas d'espace sauf lorsque  $a=1/2$  où elle est du deuxième ordre. Il convient donc de retenir les valeurs qui imposent au schéma semi-implicite le niveau maximal d'explicité et le niveau minimal d'implicité compatibles avec la stabilité inconditionnelle :

$$a = \frac{1}{2} \text{ et } b = \frac{1}{4} \quad (22)$$

#### **4. Condition de radiation**

Deux grandes familles de conditions de radiation sont habituellement utilisées pour raccorder les modèles d'agitation au milieu fluide extérieur :

- une répartition de singularités le long de la frontière (Lee<sup>9</sup>).
- la projection de l'onde sur une base de fonctions propres, solutions du problème extérieur (Chen et Mei<sup>10</sup>).

Ces deux solutions ne sont guère utilisables que pour un raccord sur une ligne droite ou sur un arc de cercle avec un milieu extérieur à fond plan et horizontal, et en absence de courant.

L'équation parabolisée (13) qui assure la continuité de la fonction  $\hat{H}$  et de sa dérivée selon l'axe  $\xi$ , se présente comme une relation de radiation normale à l'axe  $\eta$ . Ainsi, en désignant par  $t$  l'axe tangent et par  $n$  l'axe normal le long de la frontière, la continuité de  $\hat{H}$  et de sa dérivée normale à la frontière impose :

$$\begin{aligned}
& \left[ 2ik \frac{CC_g}{e_n^2} + \frac{CC_g}{e_n e_t} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e_t}{e_n} \right) + \frac{1}{e_n^2} \left( \frac{\partial CC_g}{\partial n} - g \frac{\partial \zeta}{\partial n} \right) \right] \frac{\partial \hat{H}}{\partial n} = \\
& - \frac{CC_g}{e_t^2} \frac{\partial^2 \hat{H}}{\partial t^2} - \left[ \frac{CC_g}{e_n e_t} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{e_n}{e_t} \right) + \frac{1}{e_t^2} \left( \frac{\partial CC_g}{\partial t} - g \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right) \right] \frac{\partial \hat{H}}{\partial t} \\
& - \left[ k^2 CC_g \left( 1 - \frac{1}{e_n^2} + i v_t \right) + i \frac{CC_g}{e_n^2} \frac{\partial k}{\partial n} + ik \left( \frac{CC_g}{e_n e_t} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e_t}{e_n} \right) + \frac{1}{e_n^2} \left( \frac{\partial CC_g}{\partial n} - g \frac{\partial \zeta}{\partial n} \right) \right) \right] \hat{H} = 0
\end{aligned} \tag{23}$$

avec :

$$e_n^2 = \left( \frac{\partial x}{\partial n} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial n} \right)^2 \quad \text{et} \quad e_t^2 = \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \tag{24}$$

Cette condition de radiation présente plusieurs avantages décisifs :

- le raccord est possible avec une bathymétrie générale.
- le raccord est possible le long d'une ligne en plan quelconque.
- le raccord prend en compte les effets de la bathymétrie et du courant.
- elle ne fait intervenir que des données locales et leurs dérivées premières et secondes et ne crée pas de liens entre tous les points de la frontière.

## **5. Dissipation d'énergie par frottement et par déferlement**

L'écoulement s'accompagne d'une dissipation visqueuse qui est surtout importante dans la couche limite due au frottement sur le fond. Cette dissipation d'énergie se traduit par une diminution de la hauteur de la houle. Le terme de viscosité qui apparaît dans l'équation de Berkhoff s'exprime en fonction de la dissipation théorique  $\varepsilon$  introduite dans l'équation de surface libre (1) sous la forme :

$$v_t = \frac{2\sigma\varepsilon}{k^2 CC_g} = \frac{2C\varepsilon}{\sigma C_g} = \frac{4\varepsilon}{\sigma} \frac{\text{sh}2k\bar{h}}{2k\bar{h} + \text{sh}2k\bar{h}} \tag{25}$$

En écrivant que l'énergie dissipée est égale au travail de l'effort exercé par la colonne d'eau sur le fond,  $\varepsilon$  peut être exprimée en fonction d'un coefficient de frottement sur le fond tenant compte, à partir d'une rugosité caractéristique, des effets combinés de la houle et du courant (Grant et Madsen<sup>11</sup>, Soulsby et al.<sup>12</sup>).

De même, lorsqu'en un lieu sa hauteur est trop importante, la houle déferle, réduisant ainsi de fait sa hauteur. Il est alors nécessaire d'utiliser un critère de déferlement et de réduire localement la hauteur de l'onde à sa valeur maximale (Weggel<sup>13</sup>, Ostendorf et Madsen<sup>14</sup>).

Le choix de la formule de frottement et du critère de déferlement est indépendant du modèle de réfraction diffraction utilisé. Seule la variation de hauteur qui en résulte le long des crêtes influe sur le phénomène de diffraction.

## **6. Effets de bords, focalisations et caustiques**

les performances théoriques de l'algorithme de résolution des équations de propagation de la houle ne suffisent pas à assurer la qualité et la robustesse d'un logiciel. Quatre autres aspects fondamentaux doivent également être assurés.

La condition aux limites latérales du modèle doit être réaliste et limiter la propagation d'erreur. La plus simple consiste à négliger la diffraction le long des rayons latéraux, mais c'est souvent insuffisant. Il est donc préférable de recourir à une hypothèse d'ordre supérieur en conservant la dérivée première ou la dérivée seconde de la hauteur normalement aux rayons extrêmes. Cela nécessite des dérivations numériques de type "spline sur spline" aux bords du modèle.

Lorsque des rayons sont arrêtés par une île, deux nappes prennent naissance de part et d'autre. Elles sont suivies comme deux problèmes indépendants et leurs conditions aux limites latérales sont respectivement gérées comme précédemment.

Si une focalisation engendre un croisement de rayons que la diffraction ne suffit pas à éviter, le front de propagation de la houle se sépare en deux, voire trois nappes qui deviennent indépendantes et sont traitées comme précédemment.

Enfin lorsque des rayons s'écartent trop, ou se rapprochent trop sans toutefois se couper, il convient de créer de nouveaux rayons intermédiaires ou de supprimer des rayons devenus inutiles.

La qualité du suivi des épanouissements, des focalisations et des caustiques dépend de l'efficacité de la gestion des créations et des suppressions de rayons en fonction des obstacles, et des conditions aux limites sur les bords de ces nappes.

## 7. Exemples d'applications

Ce modèle d'approche a été validé par des tests comparatifs avec le modèle elliptique privé de réflexions sur ses frontières. Il a ensuite été utilisé pour l'étude de différents sites aux configurations complexes.

Dans des baies fermées comme la Baie de Bourail en Nouvelle Calédonie, la Baie d'Essaouira au Maroc, la Baie de Saint-Louis de Marie Galante en Guadeloupe, la Baie de Puerto Bonito en République Dominicaine, la Plage de Tazagraet (entre le Cap de l'Eau et les îles Zaffarines à l'Ouest au Cap Milonia à l'Est) au Maroc, la Baie de Marigot à Saint-Martin en Guadeloupe ou la Baie de Cannes.

Autour d'îles et de hauts fonds comme l'île de Mogador (Essaouira) au Maroc, les hauts-fonds de Navidad Bank et de Sylver Bank au Nord de la République Dominicaine, les îles Zaffarines au Maroc, les hauts-fonds entre les îles de Saint-Martin et d'Anguilla, les îles de Lérins devant la baie de Cannes.

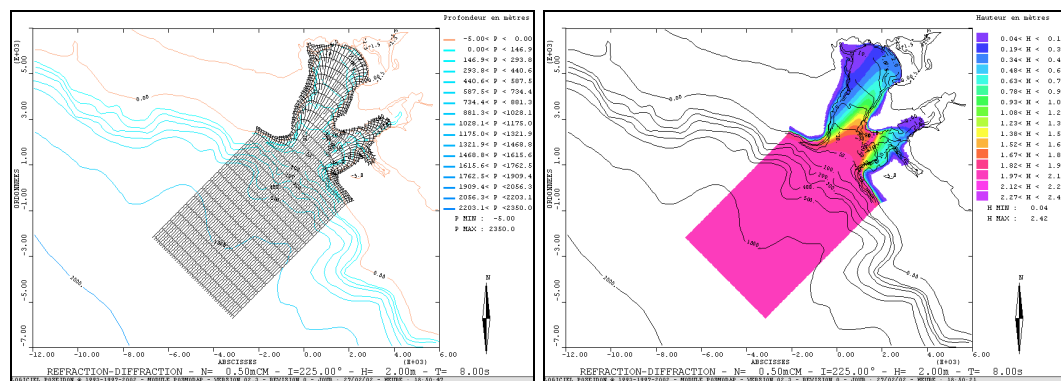


Figure 1 : Baie de Bourail (H=2 m – T=8 s)



La figure 1 montre un plan d'approche de la Baie de Bourail. La houle pénètre au fond de la baie étroite et longue. Les plans se séparent en nappes indépendantes avec des rotations des crêtes de 90° dans les deux sens.

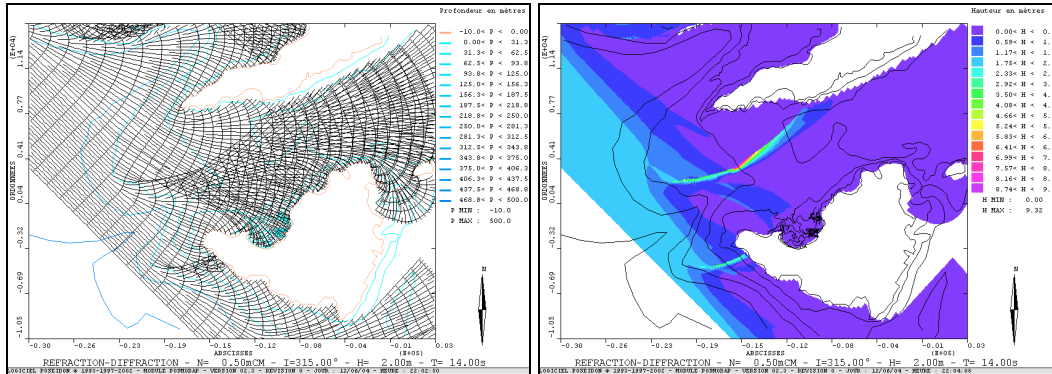


Figure 2 : Hauts-fonds devant Saint-Martin (H=2 m – T=14 s)

La figure 2 montre un plan d'approche de la Baie de Marigot sur l'île de Saint-Martin. En passant entre les îles d'Anguilla et de Saint-Martin la houle rencontre des hauts-fonds et se sépare en deux nappes indépendantes qui se croisent.

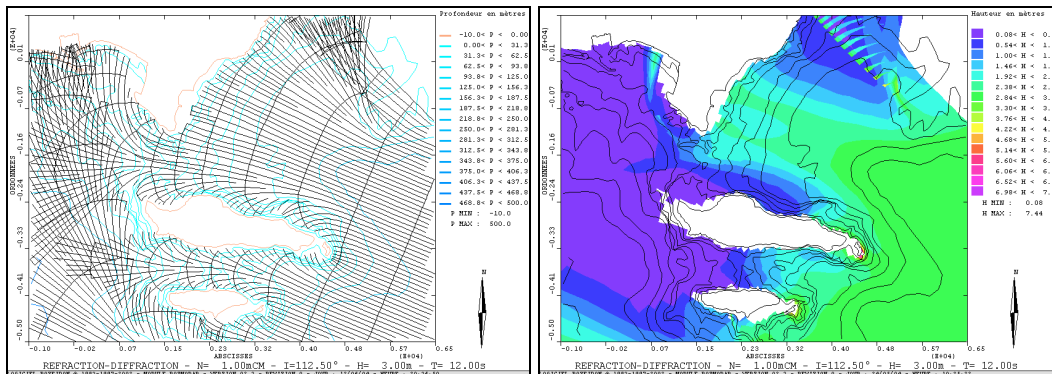


Figure 3 : Contournement des îles de Lérins (H=3 m – T=12 s)

La figure 3 montre un plan d'approche de la Baie de Cannes. La houle contourne les îles de Lérins entre lesquelles sont situés des hauts-fonds qui déforment considérablement le plan de vagues. Les rotations dépassent 90°

Une conséquence pratique de cette méthode est que la métrique représente un plan d'approche sous la forme habituelle des crêtes et des rayons (figures 1 à 3 de gauche), indépendamment de la définition des hauteurs qui sont représentées comme dans les modèles d'agitation (figures 1 à 3 de droite).

## 8. Conclusion

La méthode proposée ici permet d'assurer le transfert de la houle du large vers la côte en prenant en compte tous les phénomènes liés à la propagation, à la réfraction et à la diffraction dues aux variations de profondeur et aux variations de vitesse et de direction des courants, à la dissipation d'énergie par frottement et au

déferlement. Seules les réflexions de la houle sur les limites et sur les hauts fonds ne sont pas prises en compte.

La validité de la prise en compte de la diffraction le long des crêtes ne dépend de la rotation de la houle que par les effets de bords. Une gestion numérique efficace engendre un modèle robuste, capable de s'épanouir dans les baies, de franchir les hauts fonds et de contourner les îles. La résolution en enveloppe de la hauteur se traduit par une rapidité proche de celle des modèles de réfraction pure.

Cette méthode est également d'un grand intérêt pour d'autres applications, comme le suivi du transport sédimentaire par les courants de houle (équations de Saint-Venant) au moyen d'une méthode également parabolisée (trait de côte cylindrique) ou par une méthode générale hyperbolique.

## **9. Références**

- [1] Berkhoff J.C.W., 1972. Computation of combined refraction-diffraction. Proc. 13<sup>th</sup> Coastal Eng. Conf., ASCE, 1: 471-490.
- [2] Radder A.C., 1979. On the parabolic equation method for water wave propagation. Jour. Fluid Mech., 95: 159-176.
- [3] Kirby J.T., 1986. Higher order approximation in parabolic equation method for water waves. Jour. Geophys. Research, 91: 933-952.
- [4] Dalrymple R.A. & Kirby J.T., 1988. Models for very wide-angle water waves and wave diffraction. J. Fluid Mech., 192: 33-50.
- [5] Dalrymple R.A., Suh K.D., Kirby J.T. & Chae J.W., 1989. Models for very wide-angle water waves and wave diffraction. Part 2: Irregular bathymetry. J. Fluid Mech., 201: 299-322.
- [6] Isobe M., 1986. A parabolic refraction-diffraction equation in the ray-front coordinate system. Proc. 20<sup>th</sup> Int. Conf. on Coastal Eng., Taipei pp. 306-317.
- [7] Bougis J., 1980. Etude de la diffraction-radiation dans le cas d'un flotteur indéformable animé d'une vitesse moyenne constante et sollicité par une houle incidente de faible amplitude. Thèse de Doctorat, ENSM, Nantes.
- [8] Newmark N.M., 1959. A method of computation for structural dynamics, Jour. Eng. Mech. Div., ASCE, pp. 67-94.
- [9] Lee J.J., 1971. Wave-induced oscillation in harbors of arbitrary geometry. Jour. Fluid Mech., 45: 375-394.
- [10] Chen H.S. & Mei C.C., 1974. Oscillations and wave forces in a man-made harbor in the open sea. Proc. 10<sup>th</sup> Symp. Naval Hydrodynamics, pp. 573-594.
- [11] Grant W.D. & Madsen O.S., 1979. Combined wave and current interaction with a rough bottom. J. Geophysical Research, 84: 1797-1808.
- [12] Soulsby R.L., Hamm L., Klopman G., Myrhaug D., Simons R.R. & Thomas G.P., 1993. Wave-current interaction within and outside the bottom boundary layer. Coastal Eng., 21: 41-69.
- [13] Weggel J.R., 1972. Maximum breaker height. Proc. ASCE, 98: 529-548.
- [14] Ostendorf D.W. & Madsen O.S., 1979. An analysis of longshore currents and associated sediment transport in the surf zone, MIT Report 241 p.