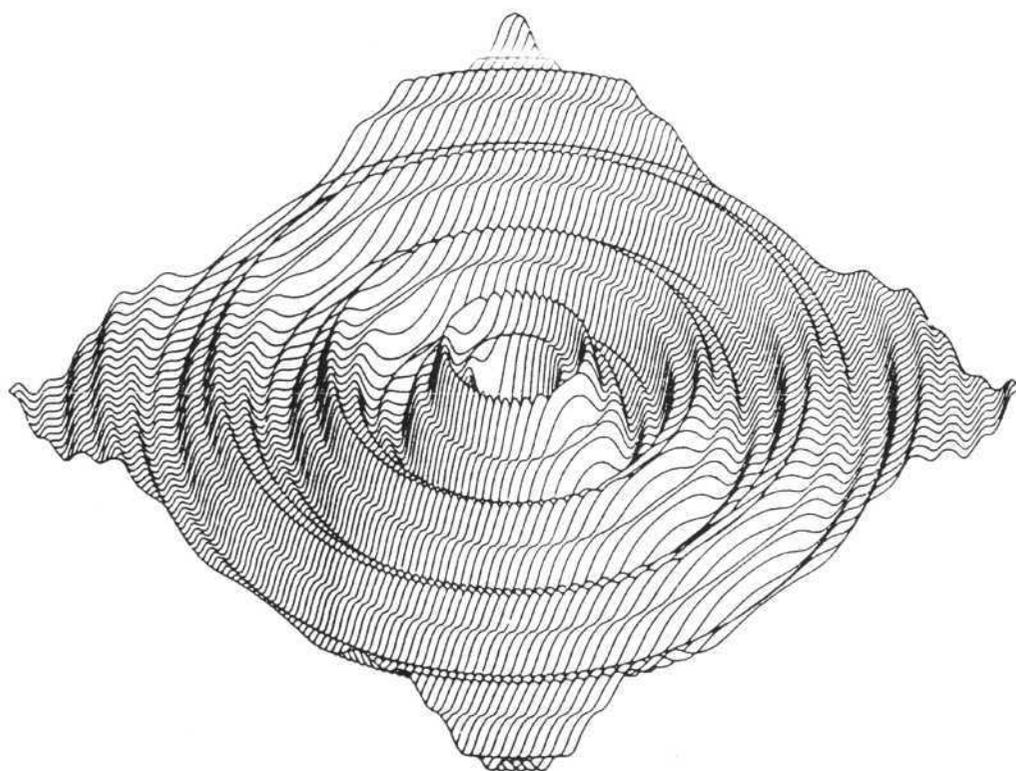


# PREMIERES JOURNEES DE L'HYDRODYNAMIQUE



du 16 au 18 février 1987  
NANTES



# Application de la Théorie des Groupes de Symétries aux Problèmes d'Hydrodynamique et de Couplage Fluide-Structure

Jean Bougis

Principia Recherche Développement  
Place Sophie Laffitte - B.P. 22 - 06560 Valbonne - France  
Téléphone : 93.74.81.00 - Télex : PRINCIP 461 312 F

## *Résumé*

Dans de nombreux cas, les structures marines présentent des symétries géométriques dont il convient de tirer le meilleur parti lors des calculs de leurs comportements hydrodynamique et mécanique. Il est en effet possible, dans ces conditions, de réduire la taille des modèles à traiter, quitte à augmenter le nombre des systèmes élémentaires, dans la mesure où un gain important peut être escompté en ce qui concerne la place mémoire nécessaire, le temps de traitement en machine et la précision obtenue.

Nous présentons, ici, une approche qui consiste à raisonner sur le modèle complet en utilisant les propriétés mathématiques des symétries pour projeter les matrices des systèmes linéaires obtenus sur des sous-espaces propres dont la dimension est celle d'un secteur de symétrie.

Notre étude se limite aux cas des symétries planes ou cycliques.

Nous aborderons successivement l'étude théorique des symétries, son application au problème du comportement des structures sur houle, puis au problème du couplage fluide-structure, et enfin les gains de place mémoire et de temps de calcul.

## *Abstract*

In many cases, marine structures have geometrical symmetries. We can take advantage of this property for computing their hydrodynamical and mechanical behaviours. In fact, it is possible to reduce the size of numerical models, even if the number of elementary systems increases, since significant improvement can be obtained in memory size, computing time and numerical accuracy.

This paper outlines a method which consists in reasoning on the complete model and uses mathematical properties of symmetries to project the matrix associated with the linear system on to eigen-subspaces whose size is that of one sector of symmetry.

Our study is limited to the cases of plane or cyclic symmetries.

We consider successively the theoretical study of symmetries, its application to structures seakeeping and to fluid-structure coupling, and finally the improvements in memory size and computing time.

## Avant-propos

Dans la majorité des cas rencontrés, les structures marines présentent des symétries géométriques. Il convient dès lors de chercher à tirer le meilleur parti possible de ces propriétés pendant les études et plus particulièrement dans la phase de calcul du comportement hydrodynamique ou mécanique de telles structures. Il est en effet possible, dans ces conditions, de réduire la taille des modèles à traiter, quitte à augmenter le nombre des systèmes linéaires élémentaires, dans la mesure où un gain important peut être escompté en ce qui concerne la place mémoire nécessaire, le temps de traitement sur ordinateur et la précision obtenue.

Deux approches sont possibles pour atteindre le but fixé. La première, très classique dans les méthodes d'éléments finis, consiste à raisonner sur un seul secteur élémentaire du modèle en introduisant des relations linéaires entre les déplacements de ses frontières. La seconde consiste à raisonner sur le modèle complet en utilisant les propriétés mathématiques des symétries pour projeter les matrices qui lui sont associées sur des sous-espaces propres disjoints dont la dimension est celle d'un secteur. Elle est couramment mise en œuvre par les hydrodynamiciens qui utilisent des équations intégrales, tout au moins en ce qui concerne les mouvements en modes rigides dans les cas où il existe des symétries planes; cependant leurs démarches empiriques sont difficilement généralisables.

La difficulté essentielle inhérente à la première méthode réside dans la nécessité d'écrire des conditions aux limites sur les bords du secteur tant pour le fluide que pour la structure, ce qui est difficilement envisageable lors de la mise en œuvre d'une méthode d'équations intégrales pour résoudre les problèmes d'hydrodynamique. Dans la seconde méthode, cette difficulté n'existe évidemment plus.

Nous ne traiterons ici que les symétries par rapport à des plans orthogonaux et le cas des symétries cycliques.

## 1 Etude mathématique des symétries

### 1.1 Introduction

La structure géométrique d'un système physique induit sur le comportement mécanique de celui-ci des propriétés spécifiques liées à l'existence éventuelle de symétries. Les cas les plus fréquemment rencontrés concernent les symétries planes, de révolution, cycliques ou des combinaisons de ces trois types.

Dans l'espace tridimensionnel, les symétries par rapport à  $n$  plans orthogonaux deux à deux sont gouvernées par les groupes de symétries  $S_n$ ,  $n \in \{0, 1, 2, 3\}$ ; les symétries de révolution et les symétries cycliques sont sous-tendues par les groupes cycliques  $C_n$  et les combinaisons des différents types de symétries dépendent du groupe diédral  $D_n$ .

Il existe une différence fondamentale entre les groupes  $S_n$  et  $C_n$  d'une part et le groupe  $D_n$  d'autre part. En effet, les deux premiers sont abéliens tandis que le dernier ne l'est pas. Or, la commutativité confère à un groupe des propriétés tout à fait remarquables qui nous seront nécessaires pour tirer parti efficacement des symétries.

Dans ce qui suit, nous nous attacherons essentiellement à l'étude des groupes  $S_n$  et  $C_n$ , puis nous mettrons en évidence les raisons pour lesquelles il n'est guère possible d'utiliser le groupe diédral pour réduire de manière systématique la place mémoire et le temps de traitement sur machine.

Afin de faciliter la lecture de ce paragraphe, nous avons cherché à le rendre le plus autonome possible. Pour cela, nous avons rappelé les définitions et les résultats indispensables à sa compréhension, mais sans donner les démonstrations qui se trouvent dans les ouvrages cités en bibliographie. Seules les démonstrations que nous avons établies figurent ici.

### 1.2 Etude théorique des symétries

#### 1.2.1 Généralités sur les représentations linéaires

##### - Représentations

Soit  $G$  un groupe fini d'ordre  $g$ . Une représentation linéaire de  $G$  sur le corps des nombres complexes  $C$  est le couple constitué par un  $C$ -espace vectoriel  $E_n$  de dimension finie  $n$  et un homomorphisme  $r$  de  $G$  dans le groupe  $GL(E_n)$  des transformations linéaires inversibles de  $E_n$ .  $E_n$  est l'espace de la représentation, La dimension de  $E_n$  est le degré de la représentation. Par abus de langage, nous dirons également que  $E_n$  ou  $r$  est une représentation de  $G$ . Une représentation est dite fidèle si  $r : G \rightarrow GL(E_n)$  est injective. Une représentation est dite triviale si  $r(g_i)$  est égale à l'élément neutre de  $GL(E_n)$  quel que soit  $g_i$  appartenant à  $G$ .

- Représentations équivalentes

Deux représentations  $(E_n, r)$  et  $(E'_n, r')$  de  $G$  sont équivalentes, semblables ou isomorphes s'il existe un isomorphisme linéaire de  $C$ -espace vectoriel  $f$  de  $E_n$  dans  $E'_n$  tel que :

$$f \circ r(g_i) = r'(g_i) \circ f \quad \forall g_i \in G$$

En particulier,  $r$  et  $r'$  ont même degré.

- Forme matricielle d'une représentation

Soit  $(E_n, r)$  une représentation de  $G$  et  $(e_i)$  une base de  $E_n$ . Soit  $r_{ij}$  les fonctions de  $G$  dans  $C$  telles que  $r(g)$  soit représentée dans la base  $(e_i)$  par la matrice  $[r_{ij}(g)]$ . Les fonctions  $r_{ij}$  sont les fonctions matricielles de la représentation  $r$  par rapport à la base choisie.

- Sous-représentations

Soit  $(E_n, r)$  une représentation de  $G$  et soit  $V$  un sous-espace vectoriel de  $E_n$  stable (ou invariant) sous  $G$ , c'est à dire que  $r(g_i)V$  est inclus dans  $V$  pour tout élément  $g_i$  de  $G$ . On définit alors une nouvelle représentation de  $G$  par la restriction  $s$  de  $r$  à  $V$ .  $(V, s)$  est appelée sous-représentation de  $r$ .

Une sous-représentation  $(V, s)$  de  $(E_n, r)$  est dite propre si  $V$  est un sous-espace propre de  $E_n$ , c'est à dire si  $V$  est non réduit à  $\emptyset$  et est strictement inclus dans  $E_n$ .

- Représentation irréductible

Soit  $(E_n, r)$  une représentation linéaire de  $G$ . On dit qu'elle est irréductible ou simple si  $E_n$  n'est pas réduit à  $\emptyset$ , et si aucun sous-espace vectoriel de  $E_n$  n'est stable par  $G$ , à part bien entendu  $\emptyset$  et  $E_n$ . En d'autres termes, la représentation  $(E_n, r)$  est irréductible si  $E_n$  est différent de  $\emptyset$  et si elle ne possède pas de sous-représentation propre. Toute représentation est somme directe de représentations irréductibles.

- Lemme de Schur

Soit  $(E_n, r)$  et  $(E'_n, r')$  deux représentations de  $G$  sur  $C$  et soit  $I(r, r')$  l'ensemble des homomorphismes  $f$  de  $E_n$  dans  $E'_n$  tels que :

$$f \circ r(g_i) = r'(g_i) \circ f \quad \forall g_i \in G$$

Les éléments de  $I(r, r')$  sont appelés les opérateurs d'entrelacements de  $r$  et  $r'$  ou les  $G$ -homomorphismes de  $E_n$  dans  $E'_n$ .

Les représentations  $r$  et  $r'$  sont équivalentes si et seulement si un opérateur d'entrelacement est bijectif.

La dimension du  $C$ -espace vectoriel  $I(r, r')$  est appelé nombre d'entrelacements des représentations  $r$  et  $r'$ . Elle est alors notée  $i(r, r')$ .

LEMME DE SCHUR. Soit  $f$  un élément de  $I(r, r')$ ,

- 1) Si  $r$  et  $r'$  sont irréductibles et si  $f$  est non nul, alors  $f$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
- 2) Si  $r$  est irréductible,  $I(r, r')$  est un corps isomorphe à  $C$  et il est formé de multiples scalaires de l'application identique. En d'autres termes,  $f$  est une homothétie.

Un corollaire fort utile du lemme de Schur est que si  $G$  est commutatif alors toute représentation irréductible  $r$  de  $G$  sur  $C$  est de degré 1.

Ce corollaire admet également une réciproque, ce qui implique que tout groupe non commutatif possède au moins une représentation irréductible de degré supérieur ou égal à 2.

### 1.2.2 Caractères d'une représentation

- Caractères

Soit  $(E_n, r)$  une représentation linéaire du groupe fini  $G$ . On appelle caractère de  $(E_n, r)$  l'application  $X_r$  de  $G$  dans  $C$  définie par :

$$X_r(g_i) = \text{trace}(r(g_i)) \quad \forall g_i \in G$$

Ainsi défini, le caractère d'une représentation, qui est la somme des valeurs propres de la forme matricielle, ne dépend pas de la base choisie. Il caractérise donc la représentation considérée.

Deux représentations équivalentes ont même caractère et réciproquement.

Si  $X_r$  est le caractère d'une représentation  $r$  de degré  $n$  d'un groupe  $G$  fini d'ordre  $g$  alors, on a :

- 1)  $X_r(1) = n$
- 2)  $X_r(g_i^{-1}) = \overline{X_r(g_i)}$
- 3)  $X_r(g_i g_j) = X_r(g_j g_i)$
- 4)  $X_r(g_i)$  est somme de racines de l'unité.

En particulier, si la représentation est irréductible et si  $G$  est commutatif, alors :

- 1)  $X_r(1) = 1$
- 2)  $X_r(g_i)$  est racine de l'unité.

- Relation de **Schur-Frobenius**

Une fonction  $f$  de  $G$  dans  $C$  est dite centrale si  $f(g_i g_j) = f(g_j g_i)$  pour tout  $g_i$  et  $g_j$  appartenant à  $G$ . En particulier toute combinaison linéaire à coefficients dans  $C$  de caractères est une fonction centrale. Si  $f$  et  $h$  sont deux fonctions de  $G$  dans  $C$ , on peut définir un produit scalaire par la relation suivante :

$$(f | h) = \frac{1}{g} \sum_{i=1}^g f(g_i) \overline{h(g_i)}$$

Il est clair que  $(f | f)$  est positif pour tout  $f$  non nulle et que  $(f | h)$  est linéaire en  $f$  et semi-linéaire en  $h$ .

LEMME. Si  $E_n$  est l'espace d'une représentation de  $G$ , il existe un produit scalaire sur  $E_n$  et une base  $(e_i)$  de  $E_n$  qui font de chaque  $[r_{ij}(g_k)]$  une matrice unitaire.

THÉORÈME DE SCHUR-FROBENIUS. Soit  $(E_n, r)$  et  $(E'_n, r')$  deux représentations irréductibles de  $G$ . Choisissons deux bases  $(e_i)$  de  $E_n$  et  $(e'_i)$  de  $E'_n$ , et soit  $r_{ij}$  et  $r'_{ij}$  les fonctions matricielles de  $r$  et de  $r'$  telles que  $r$  et  $r'$  soient représentées dans leurs bases respectives par les matrices unitaires  $[r_{ij}(g_k)]$  et  $[r'_{ij}(g_k)]$ .

Si  $r$  et  $r'$  sont inéquivalentes, alors  $(X_r | X_{r'}) = 0$

Si  $r$  et  $r'$  sont équivalentes, alors  $(X_r | X_{r'}) = 1$

COROLLAIRE. Si  $r$  est une représentation de  $G$  et si  $r_1, r_2, \dots, r_k$  sont les sous-représentations irréductibles de  $r$  deux à deux non équivalentes, alors on a de manière unique :

$$r = \sum_{i=1}^k (r | r_i) r_i$$

- Nombre de représentations irréductibles

THÉORÈME. Les caractères des représentations irréductibles deux à deux inéquivalentes de  $G$  forment une base orthonormale de l'espace des fonctions centrales sur  $G$ .

COROLLAIRE. Le nombre des représentations irréductibles de  $G$ , à isomorphisme près, est égal au nombre de classes de conjugaison de  $G$ .

Si  $G$  est commutatif, le nombre de classes de conjugaison de  $G$  est égal à l'ordre de  $G$ . Dans ces conditions, il y a autant de représentations irréductibles sur  $G$  que d'éléments de  $G$ .

- Table des caractères

Soit  $G$  un groupe fini d'ordre  $g$ ,  $X_1, X_2, \dots, X_k$  les caractères irréductibles de  $G$ , où  $X_1$  est le caractère unité. Soit  $K_1, K_2, \dots, K_k$  les différentes classes de conjugaison de  $G$ , où  $K_1 = \{e\}$  est la classe de l'élément unité. Notons  $X_i(K_j)$  la valeur du  $i^{\text{ème}}$  caractère en un élément arbitraire de  $K_j$ . Le tableau  $[X_i(K_j)]$  est la table des caractères de  $G$ . On a :

	$K_1$	$K_2$	$K_3$	...	$K_k$
$X_1$	$X_1(K_1)$	$X_1(K_2)$	$X_1(K_3)$	...	$X_1(K_k)$
$X_2$	$X_2(K_1)$	$X_2(K_2)$	$X_2(K_3)$	...	$X_2(K_k)$
$X_3$	$X_3(K_1)$	$X_3(K_2)$	$X_3(K_3)$	...	$X_3(K_k)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$X_k$	$X_k(K_1)$	$X_k(K_2)$	$X_k(K_3)$	...	$X_k(K_k)$

Les différentes colonnes de la table des caractères sont orthogonales entre elles.

Si  $G$  est un groupe commutatif alors  $k$  est égal à  $g$  et la première ligne comme la première colonne sont formées exclusivement de 1. Tous les éléments du tableau sont des racines de l'unité.

### 1.2.3 Forme matricielle des opérateurs d'entrelacements bijectifs

#### - Orbites

Soit  $E$  un ensemble, et  $G$  un groupe opérant sur  $E$ . La relation

$$\exists g_i \in G \quad / \quad g_i.x = y$$

entre les éléments  $x$  et  $y$  de  $E$  est une relation d'équivalence. Si  $x$  est un élément de  $E$ , on appelle orbite de  $x$  sous  $G$  et on note  $G.x$ , la classe d'équivalence de  $x$ . Les orbites des éléments de  $E$  forment donc une partition de  $E$ . On dit que  $G$  opère transitivement sur  $E$  si tous les éléments de  $E$  appartiennent à la même orbite.

**THÉORÈME.** *Soit  $G$  un groupe opérant sur un ensemble  $E$  et  $x$  appartenant à  $E$ . Il existe une application bijective de l'orbite  $G.x$  sur l'ensemble des classes à gauche des éléments de  $G$  modulo le stabilisateur de  $x$ .*

#### - Forme matricielle générale des opérateurs d'entrelacements bijectifs

Soit  $(E_n, r)$  et  $(E'_n, r')$  deux représentations isomorphes d'un groupe commutatif  $G$  d'ordre fini  $g$  et soit  $f$  un opérateur d'entrelacement bijectif de  $E_n$  sur  $E'_n$ . Soit  $E$  un ensemble d'éléments de  $E_n$  et  $E'$  son image par  $f$  dans  $E'_n$ , deux ensembles sur lesquels  $G$  opère. En d'autres termes  $E$  et  $E'$  sont stables sous  $G$  respectivement dans  $E_n$  et dans  $E'_n$ .

**PROPOSITION.** *Les orbites de  $E'$  sont les images par  $f$  de celles de  $E$ .*

**DÉMONSTRATION:** Si  $x$  et  $y$  sont deux éléments de la même orbite de  $E$ , il existe un élément  $g_i$  de  $G$  tel que  $y = r(g_i)x$  d'où l'égalité  $f(y) = f \circ r(g_i)x$ . Par définition même de  $f$ , nous avons alors :  $f(y) = r'(g_i) \circ f(x)$  ce qui implique que  $f(x)$  et  $f(y)$  sont deux éléments de la même orbite de  $E'$ . Si  $x'$  et  $y'$  sont deux éléments de la même orbite de  $E'$ , il existe  $g_i$  appartenant à  $G$  tel que  $y' = r'(g_i)x'$ . Comme  $f$  est bijective, il existe une fonction inverse de  $f$  notée  $f^{-1}$  vérifiant pour tout  $g_i$  de  $G$  la relation  $f^{-1} \circ r'(g_i) = r(g_i) \circ f^{-1}$ . Nous avons ainsi  $f^{-1}(y') = f^{-1} \circ r'(g_i)x'$  ou encore  $f^{-1}(y') = r(g_i) \circ f^{-1}(x')$ .  $f^{-1}(x')$  et  $f^{-1}(y')$  sont donc deux éléments de la même orbite de  $E$ .

En particulier,  $E$  et  $E'$  ont même nombre  $c$  d'orbites.

**PROPOSITION.** *Soit  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_g)$  et  $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_g)$  les ensembles des éléments des orbites de  $E$ , respectivement de  $E'$ , indexés par les éléments de  $G$ , et soit  $h$  un isomorphisme de  $E^g$  dans  $E'^g$  tel que les images par  $h$  des orbites de  $E$  soient des orbites de  $E'$ . Alors la forme matricielle de  $h$  est composée de  $g$  blocs distincts de dimension  $n$  qui figurent chacun une fois et une seule dans chaque ligne et dans chaque colonne de blocs suivant une architecture qui ne dépend que de  $G$ .*

**DÉMONSTRATION:** Il est clair que les  $x_i$  et les  $y_i$  sont des vecteurs de dimension  $n$  puisque ce sont des éléments de  $E_n$ , respectivement de  $E'_n$ . Ainsi l'isomorphisme  $h$  se traduit par l'équation matricielle  $[h_{ij}][x_j] = [y_i]$  où chaque  $[h_{ij}]$  est une matrice carrée de dimension  $n$ . Par définition même de  $h$ , nous avons pour toute représentation  $(E_n^g, r)$  et  $(E_n'^g, r')$  la relation suivante :

$$[h_{ij}][r(g_j)x_1] = [r'(g_i)y_1]$$

Ce qui est équivalent à dire que cette équation est vérifiée pour toutes les représentations irréductibles de  $G$ , en d'autres termes, puisque  $r$  et  $r'$  ont mêmes caractères :

$$[h_{ij}][X_k(g_j)x_1] = [X_k(g_i)y_1] \quad \forall k \in \{1, g\}$$

D'où les  $g$  systèmes de  $(g - 1)$  équations suivantes :

$$\sum_{j=1}^g X_k(g_i^{-1})[h_{ij}]X_k(g_j) = C^{te} \quad \forall i \in \{1, g\}$$

Nous avons donc  $g(g - 1)$  relations linéairement indépendantes entre les  $g^2$  blocs  $[h_{ij}]$ . Il n'y a donc que  $g$  blocs distincts.

Si nous multiplions chaque système d'équations pour  $k \in \{1, g\}$  par  $X_k(g_l^{-1})$  et que nous sommions sur  $k$ , nous obtenons  $g$  nouveaux systèmes pour  $l \in \{1, g\}$  qui s'écrivent :

$$\sum_{j=1}^g [h_{1j}] \sum_{k=1}^g (X_k(g_l^{-1})X_k(g_1^{-1}))X_k(g_j) = \dots = \sum_{j=1}^g [h_{gj}] \sum_{k=1}^g (X_k(g_l^{-1})X_k(g_g^{-1}))X_k(g_j)$$

Ou encore :

$$\sum_{j=1}^g [h_{1j}] \sum_{k=1}^g X_k(g_l^{-1}g_1^{-1})X_k(g_j) = \dots = \sum_{j=1}^g [h_{gj}] \sum_{k=1}^g X_k(g_l^{-1}g_g^{-1})X_k(g_j)$$

Soit en notant  $g_{l,i}^{-1}$  l'élément composé  $g_l^{-1}g_i^{-1}$ , nous reconnaissons à un facteur  $g$  près les produits scalaires de  $X_k(g_{l,i})$  et  $X_k(g_j)$ . L'application du théorème de Schur-Frobenius conduit donc aux relations suivantes:

$$[h_{1j}]\delta_{j,l,1} = \dots = [h_{ij}]\delta_{j,l,i} = \dots = [h_{gj}]\delta_{j,l,g} \quad \forall l \in \{1, g\}$$

où  $\delta_{j,l,i}$  désigne le symbole de Kronecker qui vaut l'unité si  $j$  est égal au composé de  $l$  par  $i$  et zéro sinon. D'où :

$$[h_{1,l,1}] = \dots = [h_{i,l,i}] = \dots = [h_{g,l,g}] \quad \forall l$$

Comme  $G$  possède  $g$  classes distinctes, quels que soient  $l$  et  $j$  donnés,  $[h_{ij}] = [h_{kj}]$  est équivalent à dire que  $k$  est égal à  $i$ , ce qui achève la démonstration.

**COROLLAIRE.** *Si chaque élément de  $G$  est son propre inverse, alors la matrice  $[h_{ij}]$  est symétrique par blocs.*

**DÉMONSTRATION:** Ce résultat est immédiat puisqu'alors :  $[h_{i,l,i}] = [h_{l,i,i}]$

**THÉORÈME.** *La matrice  $Q$  obtenue en multipliant la table des caractères par  $\frac{1}{\sqrt{g}}$  est unitaire. La matrice  $\Omega$  formée de  $g$  blocs obtenus en effectuant le produit de chaque élément de  $Q$  par la matrice unité d'ordre  $n$  est unitaire. Le changement de base de  $H = [[h_{ij}]]$  par  $\Omega$  donne une matrice diagonale par blocs d'ordre  $n$ .*

**DÉMONSTRATION:** Les éléments du produit de la matrice  $Q$  par sa transconjuguée sont les produits scalaires des caractères irréductibles des représentations  $(E_n, r)$  et  $(E'_n, r')$ , ce produit est donc égal à la matrice unité. La matrice  $Q$  est donc unitaire.

L'extension de ce résultat à la matrice  $\Omega$  est immédiat par construction même de  $\Omega$ .

Les représentations  $(E_n, r)$  et  $(E'_n, r')$  étant équivalentes, les colonnes de  $Q$  sont les vecteurs propres de tout opérateur d'entrelacement bijectif de  $r$  et de  $r'$ . Le changement de base par  $Q$  des opérateurs d'entrelacements bijectifs fournit donc une matrice diagonale.

Les représentations  $(E_n, r)$  et  $(E'_n, r')$  sont équivalentes et le produit des caractères de  $r$  et de  $r'$  par la matrice unité de dimension  $n$  engendre donc des sous-espaces propres de  $H$ . La matrice  $\Omega^{-1}H\Omega$  est donc diagonale par blocs de dimension  $n$ .

**THÉORÈME.** *Sous les mêmes hypothèses que précédemment, si  $G$  est le groupe cyclique  $C_n$  et si  $H$  est réelle, alors la forme diagonale de  $H$  possède un nombre de blocs diagonaux réels égal à la parité  $p$  de  $n$  et  $(n-p)$  blocs diagonaux complexes conjugués deux à deux.*

**DÉMONSTRATION:** La matrice  $H$  est donnée au départ sous forme réelle. Son équation caractéristique développée par blocs est donc réelle et n'admet comme solution par blocs que des blocs réels ou complexes conjugués deux à deux.

Le premier bloc diagonal étant la somme des blocs distincts, il est réel ; ainsi, si  $n$  est impair il existe au moins un bloc réel, et si  $n$  est pair il en existe au moins deux.

L'élément diagonal  $H_{kk}$  de la transformée de  $h$  par le changement de base  $\Omega$  s'écrit pour tout  $k$  en fonction des blocs  $[h_{ij}]$  de  $H$  sous la forme :

$$H_{kk} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^n e^{i(k-1)(j-m)\frac{2\pi}{n}} [h_{mj}]$$

Il est clair que  $H_{kk}$  ne peut être réel que si  $\frac{2(k-1)}{n} = p$  est un entier, ce qui implique la double inégalité suivante :

$$0 \leq k = p\frac{n}{2} + 1 \leq n$$

Cette relation admet comme seule solution  $p = 0$  si  $n$  est impair et admet deux solutions  $p = 0$  et  $p = 1$  si  $n$  est pair, ce qui achève la démonstration.

Ce résultat aurait pu être obtenu de manière plus expéditive en remarquant que l'application linéaire  $f$  de l'ensemble des racines  $n^{\text{ème}}$  de l'unité multipliées par la matrice unité de dimension  $n$   $I_n$  dans l'ensemble des blocs diagonaux  $H_{kk}$  de  $H$ , définie par la matrice dont les éléments sont des blocs de dimension  $n$   $[F_{ij}] = [X_i(g_j)[h_{1,j}]]$  est un isomorphisme.

Notons enfin que si  $H$  est complexe, tous ses blocs diagonaux sont complexes, et qu'ils n'apparaissent pas nécessairement avec leurs conjugués.

### 1.3 Applications

#### 1.3.1 Application aux groupes $S_n$

Nous avons vu, dans l'introduction, que les groupes  $S_n$   $n \in \{0, 1, 2, 3\}$  sont les groupes de symétries par rapport à  $n$  plans orthogonaux deux à deux dans l'espace tridimensionnel.

Si nous désignons par  $e$  l'élément neutre, par  $S_x$  la symétrie qui change  $x$  en  $-x$ , par  $S_{xy}$  celle qui change  $x$  et  $y$  en  $-x$  et respectivement en  $-y$  ..., les éléments des groupes  $S_n$  sont :

$$\begin{aligned} S_0 &= \{e\} \\ S_1 &= \{e, S_x\} \\ S_2 &= \{e, S_x, S_y, S_{xy}\} \\ S_3 &= \{e, S_x, S_y, S_z, S_{xy}, S_{xz}, S_{yz}, S_{xyz}\} \end{aligned}$$

Ces groupes sont commutatifs et ont donc  $n$  classes de conjugaison et  $n$  caractères irréductibles de degré 1.

Les tables des caractères des groupes  $S_n$  sont alors respectivement :

$S_0$	$e$	$S_1$	$e$	$S_x$	$S_2$	$e$	$S_x$	$S_y$	$S_{xy}$
$X_1$	+1	$X_1$	+1	+1	$X_1$	+1	+1	+1	+1
		$X_2$	+1	-1	$X_2$	+1	-1	+1	-1
					$X_3$	+1	+1	-1	-1
					$X_4$	+1	-1	-1	+1

$S_3$	$e$	$S_x$	$S_y$	$S_z$	$S_{xy}$	$S_{xz}$	$S_{yz}$	$S_{xyz}$
$X_1$	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1
$X_2$	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1
$X_3$	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1
$X_4$	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1
$X_5$	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1
$X_6$	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1
$X_7$	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1
$X_8$	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1

Les matrices  $H_n$  ont alors les formes suivantes :

$$H_0 = (A) \quad H_1 = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \quad H_2 = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \\ C & D & A & B \\ D & C & B & A \end{pmatrix} \quad H_3 = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F & G & H \\ B & A & D & C & F & E & H & G \\ C & D & A & B & G & H & E & F \\ D & C & B & A & H & G & F & E \\ E & F & G & H & A & B & C & D \\ F & E & H & G & B & A & D & C \\ G & H & E & F & C & D & A & B \\ H & G & F & E & D & C & B & A \end{pmatrix}$$

D'où après leurs changements de bases :

$$\Omega_0 H_0 \Omega_0^{-1} = (A) \quad \Omega_1 H_1 \Omega_1^{-1} = \begin{pmatrix} A+B & 0 \\ 0 & A-B \end{pmatrix}$$

$$\Omega_2 H_2 \Omega_2^{-1} = \begin{pmatrix} A+B+C+D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A-B+C-D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A+B-C-D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A-B-C+D \end{pmatrix}$$

$$\Omega_3 H_3 \Omega_3^{-1} = \begin{pmatrix} A+B+C+D+E+F+G+H \\ A-B+C+D-E-F+G-H \\ A+B-C+D-E+F-G-H \\ A+B+C-D+E-F-G-H \\ A-B-C+D+E-F-G+H \\ A-B+C-D-E+F-G+H \\ A+B-C-D-E-F+G+H \\ A-B-C-D+E+F+G-H \end{pmatrix}$$

### 1.3.2 Application aux groupes $C_n$

Le groupe  $C_n$  est le groupe des rotations d'angle  $\frac{2\pi}{n}$  du plan  $xOy$  autour de l'axe  $Oz$ . Il comprend  $n$  éléments qui sont les  $n$  rotations  $e^{\frac{2i(k-1)\pi}{n}}$   $k \in \{1, \dots, n\}$ .

$$C_n = \{e, r, r^2, r^3, \dots, r^{n-1}\}$$

Les tables des caractères des groupes  $C_n$  sont alors :

$C_n$	$e$	$\dots$	$r^j$	$\dots$	$r^{n-1}$
$X_1$	+1	$\dots$	+1	$\dots$	+1
$X_2$	+1	$\dots$	$e^{\frac{2ij\pi}{n}}$	$\dots$	$e^{\frac{2i(n-1)\pi}{n}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$X_l$	+1	$\dots$	$e^{\frac{2i(l-1)j\pi}{n}}$	$\dots$	$e^{\frac{2i(l-1)(n-1)\pi}{n}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$X_n$	+1	$\dots$	$e^{\frac{2i(n-1)j\pi}{n}}$	$\dots$	$e^{\frac{2i(n-1)^2\pi}{n}}$

Les matrices  $H_n$  ont alors les formes suivantes :

$$H_n = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & \dots & h_{1n} \\ h_{1n} & h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1(n-1)} \\ h_{1(n-1)} & h_{1n} & h_{11} & \dots & h_{1(n-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{12} & h_{13} & h_{14} & \dots & h_{11} \end{pmatrix}$$

D'où après leurs changements de bases :

$$\Omega_n H_n \Omega_n^{-1} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n h_{1j} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{j=1}^n e^{\frac{2i\pi(j-1)}{n}} h_{1j} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{j=1}^n e^{\frac{2i\pi(n-1)(j-1)}{n}} h_{1j} \end{pmatrix}$$

Les matrices de changement de base  $\Omega_n$  relatives aux groupes  $C_n$  ont été utilisées dès 1918 par Fortescue pour résoudre des problèmes posés par les machines tournantes. On utilise parfois le terme de changement de base de Fortescue pour désigner l'opération  $\Omega H \Omega^{-1}$ .

### 1.3.3 Quelques considérations sur le groupe diédral $D_n$

Le groupe diédral  $D_n$  est le groupe des isométries planes qui stabilise l'ensemble des sommets d'un polygone régulier à  $n$  côtés. Il est engendré par la rotation  $r$  de  $\frac{2\pi}{n}$  et une symétrie  $s$  avec les seules relations  $r^n = 1$ ,  $s^2 = 1$ ,  $sr s = r^{-1}$ . C'est un groupe d'ordre  $2n$  non commutatif. Il admet deux représentations irréductibles de degré 1 si  $n$  est impair et 4 si  $n$  est pair. Il admet en outre  $\frac{(n-1)}{2}$  représentations de degré 2 si  $n$  est impair et  $\frac{n}{2} + 1$  si  $n$  est pair. La plus grande part des résultats que nous avons vus, s'applique encore à  $D_n$ , mais il y en a un, fondamental pour nous, qui n'est plus vrai ici. La table des caractères ne permet plus de générer les matrices  $\Omega_n$  nécessaires pour diagonaliser les matrices  $H_n$  par blocs. Ceci explique le peu d'intérêt que représente pour nous ce groupe.

Lorsque, dans la pratique, nous aurons à traiter un cas de symétrie sous-tendue par le groupe diédral, nous utiliserons soit le groupe  $C_n$ , soit le groupe  $S_n$  afin d'obtenir la transformation la plus rentable.

## 2 Application au problème du comportement des structures sur houle

### 2.1 Position du problème

Le modèle mathématique est fondé sur les hypothèses classiques de l'hydrodynamique linéaire :

- Le fluide est supposé isovolume et "presque parfait".
- L'écoulement est irrotationnel ; compte tenu de l'hypothèse ci-dessus, cet écoulement est régi par une fonction de potentiel des vitesses harmonique  $\Phi(M; t)$ .
- La surface libre ( $SL$ ) est peu déformée et présente des cambrures faibles.
- Les vitesses absolues sur ( $SL$ ) sont assez petites pour être de carrés négligeables.
- Les mouvements du solide autour de sa position moyenne sont de faibles amplitudes.
- Le fond noté  $F$  est supposé plan et horizontal.
- Le modèle de la houle incidente est celui d'Airy dont la fonction potentiel des vitesses sera désignée par  $\Phi_I(M; t)$ .

Dans le cadre de ces hypothèses, la résolution des problèmes d'hydrodynamique qui interviennent dans le comportement des structures sur houle, se ramène à celle de problèmes aux limites dans un domaine non borné qui consiste à rechercher la fonction potentiel des vitesses  $\Phi(M; t)$  solution des équations suivantes exprimées dans le repère absolu :

$$\begin{aligned} \Delta \Phi(M; t) &= 0 && \text{en tout point } M \text{ du domaine fluide } D \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(M; t) + 2 \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \Phi(M; t) + g \frac{\partial}{\partial z} \Phi(M; t) &= 0 && \text{en tout point } M \text{ de la surface libre } SL \\ \lim_{|OM| \rightarrow \infty} [\Phi(M; t) - \Phi_I(M; t)] &= 0 && \text{en tout point } M \text{ du domaine fluide } D \\ \frac{\partial}{\partial z} \Phi(M; t) &= 0 && \text{en tout point } M \text{ du fond } F \\ \frac{\partial}{\partial n} \Phi(M; t) &= \vec{V}_E(M; t) \cdot \vec{n}(M) && \text{en tout point } M \text{ de la carène } C \end{aligned}$$

$\vec{V}_E(M; t)$  désignant la vitesse d'entraînement du solide et  $\vec{n}(M)$  la normale extérieure à la position moyenne de la carène.

### 2.2 Problème intégral

Les méthodes de singularités consistent à transformer chaque problème aux limites obtenu en décomposant la vitesse d'entraînement, en un problème intégral. Ceci conduit à résoudre des équations intégrales dont le support peut être réduit à la seule carène grâce à l'utilisation de la fonction de Green du problème à traiter.

En adoptant les notations complexes suivantes :

$$\Phi(M, M'; t) = \Re\{\varphi(M, M')e^{-i\omega t}\} \text{ pour le potentiel des vitesses,}$$

$$G(M, M'; t) = \Re\{\mathcal{G}(M, M')e^{-i\omega t}\} \text{ pour la fonction de Green,}$$

$$\vec{V}_E(M; t) = \Re\{\vec{V}_E(M)e^{-i\omega t}\} \text{ pour la vitesse d'entraînement,}$$

et en désignant par  $\mathcal{A}(M)$  l'angle solide sous lequel la carène (considérée comme une surface orientée) est vue depuis le point  $M$ , ces équations intégrales se présentent sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(M)\varphi(M) + \mathcal{A}'(M)\varphi'(M) &= - \iint_C \frac{\partial}{\partial n(M')} [\varphi(M') - \varphi'(M')] \left[ \frac{1}{|MM'|} + \mathcal{G}(M, M') \right] dS(M') \\ &+ \iint_C [\varphi(M') - \varphi'(M')] \frac{\partial}{\partial n(M')} \left[ \frac{1}{|MM'|} + \mathcal{G}(M, M') \right] dS(M')\end{aligned}$$

Expression dans laquelle  $\varphi$  désigne la détermination du potentiel intérieure au domaine  $D$ , et  $\varphi'$  sa détermination extérieure au domaine  $D$ . En désignant par :

$$\sigma(M) = \left[ \frac{\partial}{\partial n(M)} \varphi(M) - \frac{\partial}{\partial n(M)} \varphi'(M) \right]$$

la distribution superficielle de sources ou potentiel de simple couche,

$$\mu(M) = -[\varphi(M) - \varphi'(M)]$$

la distribution superficielle de doublets normaux ou potentiel de double couche,

et en remarquant que la relation  $\mathcal{A}(M) + \mathcal{A}'(M) = 4\pi$  est toujours satisfaite, nous pouvons obtenir une équation intégrale de Fredholm sous l'une des deux formes suivantes.

- Distribution de sources seules

En imposant la continuité des potentiels  $\varphi(M) = \varphi'(M)$  en tout point  $M$  de la carène  $C$ , il vient :

$$4\pi\varphi(M) - \mathcal{A}'(M)[\varphi(M) - \varphi'(M)] = - \iint_C \sigma(M') \left[ \frac{1}{|MM'|} + \mathcal{G}(M, M') \right] dS(M')$$

En tout point  $M$  de la carène, la vitesse normale s'écrit alors :

$$\frac{\partial}{\partial n(M)} \varphi(M) = \frac{1}{2}\sigma(M) - \frac{1}{4\pi} \iint_C \sigma(M') \frac{\partial}{\partial n(M)} \left[ \frac{1}{|MM'|} + \mathcal{G}(M, M') \right] dS(M')$$

La distribution de simple couche doit donc être solution de l'équation de Fredholm de deuxième espèce suivante :

$$\frac{1}{2}\sigma(M) - \frac{1}{4\pi} \iint_C \sigma(M') \frac{\partial}{\partial n(M)} \left[ \frac{1}{|MM'|} + \mathcal{G}(M, M') \right] dS(M') = \vec{V}_E(M) \cdot \vec{n}(M)$$

La fonction potentiel des vitesses s'écrit alors dans  $D$  :

$$\varphi(M) = -\frac{1}{4\pi} \iint_C \sigma(M') \left[ \frac{1}{|MM'|} + \mathcal{G}(M, M') \right] dS(M')$$

- Distribution mixte de Green

En imposant au potentiel  $\varphi'(M)$  d'être nul dans tout son domaine, il est nul, ainsi que sa dérivée normale, en tout point  $M$  de la carène  $C$ , il vient :

$$\begin{aligned}4\pi\varphi'(M) + \mathcal{A}(M)[\varphi(M) - \varphi'(M)] &= - \iint_C \sigma(M') \left[ \frac{1}{|MM'|} + \mathcal{G}(M, M') \right] dS(M') \\ &- \iint_C \mu(M') \frac{\partial}{\partial n(M')} \left[ \frac{1}{|MM'|} + \mathcal{G}(M, M') \right] dS(M')\end{aligned}$$

La distribution mixte de Green doit donc être solution de l'équation de Fredholm de deuxième espèce suivante :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mu(M) - \frac{1}{4\pi} \iint_C \mu(M') \frac{\partial}{\partial n(M')} \left[ \frac{1}{|MM'|} + \mathcal{G}(M, M') \right] dS(M') \\ = \frac{1}{4\pi} \iint_C \vec{V}_E(M') \cdot \vec{n}(M') \left[ \frac{1}{|MM'|} + \mathcal{G}(M, M') \right] dS(M')\end{aligned}$$

La fonction potentiel des vitesses s'écrit alors dans  $D$  :

$$\begin{aligned}\varphi(M) = & -\frac{1}{4\pi} \iint_C \mu(M') \frac{\partial}{\partial n(M')} \left[ \frac{1}{|MM'|} + \mathcal{G}(M, M') \right] dS(M') \\ & -\frac{1}{4\pi} \iint_C \vec{\mathcal{V}}_E(M') \cdot \vec{n}(M') \left[ \frac{1}{|MM'|} + \mathcal{G}(M, M') \right] dS(M')\end{aligned}$$

Et sur  $C$  :  $\varphi(M) = -\mu(M)$ .

Dans le cas du problème de la diffraction-radiation avec vitesse d'avance, une intégrale de ligne vient s'ajouter à ces expressions, mais ses propriétés de symétrie sont les mêmes que celles des intégrales de surface.

Il est alors clair qu'il n'est pas possible de mettre en œuvre la première méthode pour tenir compte des symétries dans la mesure où il n'y a pas d'équation écrite dans le fluide, et que les équations intégrales font intervenir un point  $M$  qui n'appartient pas nécessairement au secteur décrit.

Par contre les propriétés de symétries géométriques et cinématiques se reflètent dans les équations intégrales obtenues, les premières par l'intermédiaire de la forme de la carène  $C$  et les secondes par celui de la fonction de Green du problème.

### 2.3 Problème discrétisé

Pour résoudre les équations intégrales de Fredholm obtenues et déterminer les distributions de singularités cinématiquement équivalentes à la carène, nous aurons recours à des méthodes de résolution numérique fondées sur la discrétisation de la carène.

En découpant le support  $C$  des intégrales en  $N$  éléments plans notés  $C_j$   $j \in \{1, N\}$  sur lesquels les densités de singularités sont approchées par des fonctions constantes et en écrivant que les équations intégrales sont vérifiées au centre de gravité de chaque élément, nous obtenons un système linéaire de  $N$  équations à  $N$  inconnues.

Un tel système s'écrit dans le cas d'une distribution de sources seules :

$$\frac{1}{2}\sigma(M_i) + \sum_{j=1}^N \left\{ -\frac{1}{4\pi} \iint_{C_j} \frac{\partial}{\partial n(M_i)} \left[ \frac{1}{|M_i M_j|} + \mathcal{G}(M_i, M_j) \right] dS(M_j) \right\} \sigma(M_j) = \vec{\mathcal{V}}_E(M_i) \cdot \vec{n}(M_i) \quad \forall i \in \{1, N\}$$

ou encore sous forme matricielle :

$$[Sv_{ij}][\sigma_j] = [(\vec{\mathcal{V}}_E \cdot \vec{n})_i]$$

avec :

$$[\varphi_i] = [Sp_{ij}][\sigma_j]$$

et dans le cas d'une distribution mixte de Green :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mu(M_i) + \sum_{j=1}^N \left\{ -\frac{1}{4\pi} \iint_{C_j} \frac{\partial}{\partial n(M_j)} \left[ \frac{1}{|M_i M_j|} + \mathcal{G}(M_i, M_j) \right] dS(M_j) \right\} \mu(M_j) \\ = \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{1}{4\pi} \iint_{C_j} \left[ \frac{1}{|M_i M_j|} + \mathcal{G}(M_i, M_j) \right] dS(M_j) \right\} \vec{\mathcal{V}}_E(M_i) \cdot \vec{n}(M_i) \quad \forall i \in \{1, N\}\end{aligned}$$

ou encore sous forme matricielle :

$$[Dp_{ij}][\mu_j] = [Sp_{ij}][(\vec{\mathcal{V}}_E \cdot \vec{n})_j]$$

avec :

$$[\varphi_i] = -[\mu_i]$$

Ainsi en réalisant un maillage respectant les conditions des symétries géométriques, les différentes matrices présenteront les motifs de répétitivité compatibles avec les symétries cinématiques engendrées par la fonction de Green du problème considéré. En ce qui concerne le problème de la tenue à la mer au point fixe, nous pourrions donc avoir 0, 1 ou 2 plans de symétrie parallèles à l'axe  $Oz$  ou bien une

symétrie cyclique d'axe  $Oz$ . Quant au problème de la tenue à la mer avec vitesse d'avance, il ne pourra présenter que 0 ou 1 plan de symétrie contenant l'axe  $Oz$  et la direction d'avance.

Les systèmes à résoudre seront alors dans le cas d'une distribution de sources seules :

$$\{\Omega_n[Sv_{ij}]\Omega_n^{-1}\}\{\Omega_n[\sigma_j]\} = \Omega_n[(\vec{V}_E \cdot \vec{n})_i]$$

avec :

$$\Omega_n[\varphi_i] = \{\Omega_n[Sp_{ij}]\Omega_n^{-1}\}\{\Omega_n[\sigma_j]\}$$

et dans celui d'une distribution mixte de Green :

$$\{\Omega_n[Dp_{ij}]\Omega_n^{-1}\}\{\Omega_n[\mu_j]\} = \{\Omega_n[Sp_{ij}]\Omega_n^{-1}\}\{\Omega_n[(\vec{V}_E \cdot \vec{n})_j]\}$$

avec :

$$\Omega_n[\varphi_i] = -\Omega_n[\mu_i]$$

En désignant par  $N_{kj}$  la composante  $k$  de la normale généralisée à l'élément  $j$  et en indiquant par  $l$  les potentiels de radiations, nous obtenons les termes hydrodynamiques de masses d'eau ajoutée sous les formes suivantes :

$$\begin{aligned} MA_{kl} &= -\rho \iint_C \Re\{\varphi_l(M')\} N_k dS(M') \\ &= -\rho \Re\left[\iint_{C_j} N_{kj} dS_j\right][\varphi_{jl}] \\ &= -\rho \Re[N_{kj} S_j][\varphi_{jl}] \\ &= -\rho \Re\{[N_{kj} S_j]\Omega_n^{-1}\}\{\Omega_n[\varphi_{jl}]\} \end{aligned}$$

ceux d'amortissements potentiel sous les formes suivantes :

$$\begin{aligned} TA_{kl} &= -\rho\omega \iint_C \Im\{\varphi_l(M')\} N_k dS(M') \\ &= -\rho\omega \Im\left[\iint_{C_j} N_{kj} dS_j\right][\varphi_{jl}] \\ &= -\rho\omega \Im[N_{kj} S_j][\varphi_{jl}] \\ &= -\rho\omega \Im\{[N_{kj} S_j]\Omega_n^{-1}\}\{\Omega_n[\varphi_{jl}]\} \end{aligned}$$

et enfin les efforts d'excitation (efforts dus à la houle incidente et à la houle diffractée) sous les formes suivantes :

$$\begin{aligned} Fex_k &= -i\rho\omega \iint_C \{\varphi_{(I+D)}(M')\} N_k dS(M') \\ &= -i\rho\omega \left[\iint_{C_j} N_{kj} dS_j\right][\varphi_{(I+D)j}] \\ &= -i\rho\omega [N_{kj} S_j][\varphi_{(I+D)j}] \\ &= -i\rho\omega \{[N_{kj} S_j]\Omega_n^{-1}\}\{\Omega_n[\varphi_{(I+D)j}]\} \end{aligned}$$

### 3 Application au problème du couplage fluide-structure

#### 3.1 Position du problème

Deux aspects du couplage fluide-structure retiennent, a priori, notre attention.

Le premier consiste à s'intéresser à la réponse d'une structure déformable soumise à l'action d'une houle incidente. Dans ce cas, le problème aux limites se présente sous la même forme que celle définie au paragraphe 2.1. La différence essentielle réside dans la décomposition de la vitesse d'entraînement qui, cette fois, dépend de la discrétisation.

Le second est relatif à la détermination des modes propres de la structure immergée, lorsque cela a un sens. Ce sera en particulier le cas si la structure est baignée dans un fluide illimité ou si la condition de surface libre est indépendante du temps – par exemple si on considère la condition de surface libre asymptotique  $\Phi(M; t) = 0$  en tout point de  $SL$ . Là encore la décomposition de la vitesse d'entraînement dépend de la discrétisation.

Une difficulté supplémentaire apparaît ici, puisque nous devons chercher à tirer parti des symétries non seulement pour résoudre le problème d'hydrodynamique, mais aussi pour résoudre l'équation de la mécanique ou extraire les modes propres du système couplé.

### 3.2 Problème intégral

La transformation du problème aux limites en un problème intégral se présente sous la même forme qu'au paragraphe 2.2, mais dans le cas de la recherche des modes propres de la structure en présence du fluide, la fonction de Green est indépendante de la pulsation  $\omega$  du mouvement.

Si nous utilisons une distribution de simple couche, celle-ci doit être solution de l'équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce suivante :

$$\frac{1}{2}\sigma(M) - \frac{1}{4\pi} \iint_C \sigma(M') \frac{\partial}{\partial n(M)} \left[ \frac{1}{|MM'|} + \mathcal{G}(M, M') \right] dS(M') = \vec{\mathcal{V}}_E(M) \cdot \vec{n}(M)$$

La fonction potentiel des vitesses s'écrit alors dans le domaine fluide :

$$\varphi(M) = -\frac{1}{4\pi} \iint_C \sigma(M') \left[ \frac{1}{|MM'|} + \mathcal{G}(M, M') \right] dS(M')$$

Si nous utilisons une distribution mixte de Green, elle doit être solution de l'équation de Fredholm de deuxième espèce suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mu(M) - \frac{1}{4\pi} \iint_C \mu(M') \frac{\partial}{\partial n(M')} \left[ \frac{1}{|MM'|} + \mathcal{G}(M, M') \right] dS(M') \\ = \frac{1}{4\pi} \iint_C \vec{\mathcal{V}}_E(M') \cdot \vec{n}(M') \left[ \frac{1}{|MM'|} + \mathcal{G}(M, M') \right] dS(M') \end{aligned}$$

La fonction potentiel des vitesses s'écrit alors dans le domaine fluide :

$$\begin{aligned} \varphi(M) = -\frac{1}{4\pi} \iint_C \mu(M') \frac{\partial}{\partial n(M')} \left[ \frac{1}{|MM'|} + \mathcal{G}(M, M') \right] dS(M') \\ - \frac{1}{4\pi} \iint_C \vec{\mathcal{V}}_E(M') \cdot \vec{n}(M') \left[ \frac{1}{|MM'|} + \mathcal{G}(M, M') \right] dS(M') \end{aligned}$$

Et sur  $C$  :  $\varphi(M) = -\mu(M)$ .

### 3.3 Problème discrétisé

Pour résoudre ces équations intégrales de Fredholm, nous aurons à nouveau recours à des méthodes de résolution fondées sur la discrétisation de la carène. Cependant, la résolution du problème couplé nous oblige à établir une formulation ayant les mêmes inconnues pour le problème d'hydrodynamique et le problème de mécanique des structures. Autrement dit, l'utilisation d'un code d'éléments finis pour résoudre le problème de la mécanique des structures nous oblige à travailler avec des déplacements nodaux et des inconnues nodales. Ce résultat peut être obtenu en approximant les singularités par des fonctions d'interpolation du type éléments finis à partir des valeurs nodales. La condition de glissement peut alors être affichée localement aux nœuds ou de manière globale en minimisant son intégrale sur l'ensemble de la carène au sens des moindres carrés. Nous supposons, dans ce qui suit, que ce travail a été réalisé et que la discrétisation des équations intégrales conduit à des systèmes matriciels de la forme suivante :

$$[A_{ij}][\sigma_{jk}] = [B_{ik}]$$

dans le cas d'une distribution de sources seules, et :

$$[A'_{ij}][\mu_{jk}] = [B'_{ij}][\sigma_{jk}]$$

dans celui d'une distribution mixte de Green.

Expressions dans lesquelles,  $A$ ,  $A'$  et  $B'$  désignent des matrices carrées dont la dimension est égale au nombre des nœuds du maillage,  $\sigma_{jk}$  et  $\mu_{jk}$  désignent les valeurs prises par les singularités au nœud  $j$  du maillage et  $B_{ik}$  désigne la valeur du second membre de la première équation au nœud  $i$  pour une vitesse unitaire affectant le  $k^{i\text{ème}}$  degré de liberté.

Une première difficulté apparaît ici. En effet, si un élément ne peut appartenir qu'à un seul secteur de symétrie, il n'en va pas de même en ce qui concerne les nœuds situés sur les frontières des secteurs.

Dans ces conditions, pour pouvoir conserver aux matrices leurs motifs de répétitivité représentatifs des symétries et appliquer les changements de bases adéquats, il est impératif de faire apparaître les valeurs nodales avec une multiplicité égale au nombre de secteurs auxquels elles appartiennent.

Les matrices seront maintenues carrées en écrivant les équations avec une multiplicité égale au nombre de secteurs auxquels appartiennent les points de contrôle correspondants si la condition de glissement est locale, et avec la multiplicité de l'inconnue par rapport à laquelle la dérivation est effectuée si la condition de glissement est globale.

Une fois réalisé le changement de base, il est nécessaire d'éliminer les inconnues et les équations en trop dans les systèmes qui sont singuliers.

Les singularités étant déterminées, les termes hydrodynamiques sont calculés en intégrant les pressions correspondantes, degré de liberté par degré de liberté, au moyen des fonctions d'interpolation. Ces opérations peuvent être écrites sous forme matricielle de la manière suivante :

$$\begin{aligned} [MA_{lk}] &= -\rho \Re [P_{lj}][\varphi_{jk}] \\ &= -\rho \Re \{ [P_{lj}]\Omega_n^{-1} \} \{ \Omega_n[\varphi_{jk}] \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [TA_{lk}] &= -\rho\omega \Im [P_{lj}][\varphi_{jk}] \\ &= -\rho\omega \Im \{ [P_{lj}]\Omega_n^{-1} \} \{ \Omega_n[\varphi_{jk}] \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [Fex_i] &= -i\rho\omega [P_{lj}][\varphi_{(I+D)_j}] \\ &= -i\rho\omega \{ [P_{lj}]\Omega_n^{-1} \} \{ \Omega_n[\varphi_{(I+D)_j}] \} \end{aligned}$$

Expressions dans lesquelles  $l$  et  $k$  varient de 1 au nombre de degré de liberté du maillage.

### 3.4 Problème de la mécanique couplé

La dernière phase de la résolution du problème du couplage fluide-structure consiste à résoudre l'équation de Newton ou à en extraire ses modes propres.

Cette équation se présente sous la forme générale suivante :

$$[M_{lk} + MA_{lk}(\omega)] \frac{d^2}{dt^2} \Re \{ X(\omega) e^{-i\omega t} \} + [TA_{lk}(\omega)] \frac{d}{dt} \Re \{ X(\omega) e^{-i\omega t} \} + [H_{lk}] \Re \{ X(\omega) e^{-i\omega t} \} = \Re \{ F(\omega) e^{-i\omega t} \}$$

Equation matricielle dans laquelle  $M$ ,  $MA$ ,  $TA$  et  $K$  sont des matrices carrées dont l'ordre est égal au nombre  $n$  des degrés de liberté de la structure,  $X$  et  $F$  des vecteurs colonnes de  $n$  lignes. Ces termes désignent respectivement :

$M$	la matrice des masses de la structure ;
$MA(\omega)$	la matrice des masses d'eau ajoutée ;
$TA(\omega)$	la matrice des amortissements ;
$K$	la matrice des raideurs de la structure ;
$F(\omega)$	le vecteur des efforts d'excitation ;
$X(\omega)$	le vecteur des déplacements nodaux.

L'excitation étant harmonique, cette équation se simplifie, et il vient :

$$\{-\omega^2[M + MA(\omega)] - i\omega TA(\omega) + K\}X(\omega) = F(\omega)$$

Il est clair que pour pouvoir appliquer avec quelque intérêt les changements de base, il est nécessaire que toutes ces matrices reflètent les symétries du problème. C'est bien évidemment le cas de  $M$  et  $K$ , et

ce sera également celui de  $MA$  et  $TA$  si les degrés de liberté choisis sont compatibles avec les symétries, c'est à dire s'ils sont définis dans un repère adéquat. Ainsi les problèmes présentant des symétries planes seront traités en repère cartésien, tandis que ceux présentant des symétries cycliques devront être résolus en coordonnées cylindriques que ce soit pour le calcul de la réponse ou pour celui des modes propres.

Dans ces conditions, si nous nous intéressons à la réponse, nous aurons à résoudre les  $g$  blocs d'équations issus de :

$$\Omega_n \{-\omega^2[M + MA(\omega)] - i\omega TA(\omega) + K\} \Omega_n^{-1} \Omega_n X(\omega) = \Omega_n F(\omega)$$

et si nous voulons extraire les modes propres du système couplé, nous aurons à extraire les modes des  $g$  blocs issus de :

$$\Omega_n \{-\omega^2[M + MA] + K\} \Omega_n^{-1} \Omega_n X(\omega) = 0$$

## 4 Gains de place mémoire et de temps de calcul

Il nous reste désormais à estimer les gains de place mémoire nécessaire et de temps de calcul qui résultent de l'utilisation des symétries.

### 4.1 Gain de place mémoire

En ce qui concerne les groupes  $S_n$ , la prise en compte des symétries permet de remplacer un système linéaire d'ordre  $gn$  par  $g$  systèmes linéaires de dimension  $n$ . Dans le cas des groupes  $C_n$ , Il faut également tenir compte du gain occasionné par l'existence éventuelle de systèmes conjugués deux à deux dans le cas de matrices réelles.

Si nous n'utilisons pas de fichier pour stocker les matrices, le gain sera égal à  $g$  dans tous les cas.

Si nous utilisons des fichiers pour stocker les matrices, les systèmes sont résolus séquentiellement et le gain sera égal à  $g^2$  pour les symétries planes et les symétries cycliques si les matrices sont complexes, et à  $\frac{g^2}{2}$  pour les symétries cycliques si les matrices sont réelles.

Ces gains de place mémoire sont doublés dans le cas où la dimension des matrices est telle, que la résolution du système complet doit être faite en double précision ( $gn$  supérieur à 500), tandis que les résolutions des systèmes réduits peuvent encore être réalisées en simple précision ( $n$  inférieur à 500).

Le tableau ci-dessous illustre ces résultats :

Gains de place mémoire	$S_0$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$	$C_6$	$C_7$
Matrice réelle sans fichier	1	2	4	8	2	3	4	5	6	7
Matrice complexe sans fichier	1	2	4	8	2	3	4	5	6	7
Matrice réelle avec fichier	1	4	16	64	2	4.5	8	12.5	18	24.5
Matrice complexe avec fichier	1	4	16	64	4	9	16	25	36	49

### 4.2 Gain de temps de calcul

L'estimation du gain de temps de traitement sur une machine est plus délicate dans la mesure où celui-ci dépend essentiellement du type de méthode utilisé pour résoudre les systèmes linéaires ainsi que de la machine.

Si nous considérons que les matrices  $H$  sont pleines, non symétriques et complexes, ce qui est le cas des matrices d'influence dans les problèmes de comportement de structures sur houle, le gain de temps de calcul est de l'ordre de  $g$  pour la construction de  $H$  et de  $g^2$  pour la résolution supposée être réalisée en mémoire centrale sans pagination.

A titre d'exemple, pour une structure marine qu'on discrétise en  $N$  éléments, les gains de temps nécessaires pour calculer les fonctions de transfert sur houle sont donnés dans le tableau suivant en fonction de  $N$  et du type de symétrie.

Gains de temps calcul	$S_0$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$	$C_6$	$C_7$
$N = 100$ éléments	1.0	2.7	4.8	-	2.7	3.5	4.8	6.1	7.4	8.7
$N = 500$ éléments	1.0	2.8	7.3	-	2.8	5.0	7.3	9.6	12.0	14.4
$N = 1000$ éléments	1.0	3.2	9.1	-	3.2	6.0	9.1	12.4	15.9	19.5
$N = 1500$ éléments	1.0	3.4	10.3	-	3.4	6.6	10.3	14.4	18.8	23.3
$N = 2000$ éléments	1.0	3.5	11.2	-	3.5	7.0	11.2	15.9	20.9	26.3

Ces gains sont donnés à titre indicatif, et ne tiennent pas compte de la différence de temps de traitement qui existe entre la simple et la double précision.

### Conclusion

L'approche rationnelle du traitement des symétries à partir de la théorie des groupes de symétries, permet d'une part de mettre en évidence la classe de difficulté de chaque problème et d'autre part d'aborder en toute généralité ceux qui présentent un intérêt, en optimisant leur mise en œuvre sur le plan informatique. Les résultats obtenus peuvent être appliqués aussi bien aux problèmes traités par des méthodes intégrales que par des méthodes d'éléments finis. Mais, dans ces conditions, les symétries doivent être prise en compte lors de la fabrication des logiciels et non pas pendant la mise au point des données.

Notons enfin que les résultats obtenus, peuvent être étendus sans difficulté à des systèmes linéaires possédant plus d'équations que d'inconnues, ce qui permet alors d'utiliser une méthode du type Householder pour résoudre directement des problèmes au sens des moindres carrés.

### Bibliographie

- |     |  |     |  |
|-----|--|-----|--|
| [1] | BERTIN J.E. & M.J.<br>"Algèbre linéaire et géométrie classique"<br>Masson. Paris. 1981.  | [5] | GUEVEL P.<br>Cours de la Section d'Hydrodynamique Navale<br>Avancée. E.N.S.M. Nantes. 1978.      |
| [2] | BOUGIS J.<br>Rapport de recherche 82.12.074<br>Principia R. D. Sophia Antipolis. 1982.   | [6] | MALLIAVIN M.P.<br>"Les groupes finis et leurs représentations complexes"<br>Masson. Paris. 1981. |
| [3] | BOUGIS J. & HEMBISE O.<br>Rapport de recherche 83.05.074<br>Principia R. D. Sophia Antipolis. 1983.                                      | [7] | SERRE J.P.<br>"Représentations linéaires des groupes finis"<br>Hermann. Paris. 1978.             |
| [4] | FORTESCUE<br>"Method of symmetrical coordinates applied<br>to the solution of polyphase networks"<br>Transaction A.I.E.E., Vol.37. 1918. |     |  |

### Remerciements

Une partie de ces travaux a été réalisée avec le soutien du Service Technique des Constructions et Armes Navales. L'auteur remercie vivement Le Chef de la Section Calcul Scientifique du Groupe Matériaux et Structures Navals.