

UNIVERSITE DE TOULON ET DU VAR

SeaTech

Tenue à la mer des structures

par

Jean BOUGIS

Décembre 2016

Sommaire

| | |
|--|-----------------|
| 0. Introduction | 00-01-00 |
| 1. Les équations du mouvement du navire | |
| 1. Introduction | 01-01-00 |
| 1.1. Généralités | 01-01-00 |
| 1.2. Les problèmes typiques du navire | 01-01-00 |
| 1.3. Les problèmes typiques des structures off-shores | 01-04-00 |
| 1.4. Classification hydrodynamique des structures | 01-04-00 |
| 1.5. Systèmes de référence | 01-06-00 |
| 1.6. Définition des mouvements des navires et structures marines . . . | 01-11-00 |
| 1.7. Principales caractéristiques des navires | 01-12-00 |
| 2. Les forces appliquées aux navires et structures | 02-01-00 |
| 2.1. Bilan des efforts appliqués aux navires et structures | 02-01-00 |
| 2.2. Efforts d'inertie | 02-01-00 |
| 2.3. Efforts de pesanteur | 02-05-00 |
| 2.4. Efforts de pression dus à l'eau | 02-05-00 |
| 2.5. Efforts de pression dus à l'air ou au vent | 02-06-00 |
| 2.6. Efforts de liaison | 02-07-00 |
| 3. Evaluation des efforts de pression | 03-01-00 |
| 3.1. Les hypothèses de l'hydrodynamique navale théorique | 03-01-00 |
| 3.2. Torseur des efforts de pression | 03-03-00 |
| 3.3. Torseur des efforts hydrostatiques | 03-05-00 |
| 3.4. Torseur des efforts hydrodynamiques d'origine potentielle | 03-08-00 |
| 3.5. Poussée hydrodynamique conventionnelle | 03-11-00 |
| 4. Les équations du mouvement du navire | 04-01-00 |
| 4.1. Les équations générales | 04-01-00 |
| 4.2. La translation rectiligne en eau calme | 04-02-00 |
| 4.3. Evolution du navire en eau calme | 04-03-00 |
| 4.4. Mouvement du centre de gravité du navire stoppé sur houle longue | 04-04-00 |
| 5. Les moyens d'étude | 05-01-00 |

| | |
|--|-----------------|
| 5.1. Les essais sur modèle réduits | 05-01-00 |
| 5.2. L'expérimentation au réel | 05-01-00 |
| 5.3. La théorie et les modèles numériques | 05-02-00 |
| 5.4. Associations et sociétés savantes | 05-02-00 |
| 6. Différents types de navires et de structures marines | 06-01-00 |
| 6.1. Introduction | 06-01-00 |
| 6.2. Les navires et les barges | 06-01-00 |
| 6.3. Les plate-formes semi-submersibles | 06-05-00 |
| 6.4. Les plate-formes sur câbles tendus | 06-07-00 |
| 6.5. Les structures gravitaires | 06-09-00 |
| 6.6. Les structures treillis | 06-11-00 |
| 6.7. Les structures mixtes | 06-13-00 |
| 7. Références bibliographiques | 07-01-00 |

2. Tenue à la mer sur houle régulière

| | |
|---|-----------------|
| 1. Introduction | 01-01-00 |
| 2. Equation générale du mouvement sur houle | 02-01-00 |
| 2.1. Efforts hydrodynamiques sur houle | 02-01-00 |
| 2.2. Diffraction-radiation en théorie linéaire | 02-01-00 |
| 2.3. Détermination des mouvements de plate-forme | 02-11-00 |
| 2.4. Réponse non-linéaire | 03-13-00 |
| 2.5. Comportement de corps déformables | 03-13-00 |
| 3. Le roulis en eau calme | 03-01-00 |
| 3.1. Hypothèses | 03-01-00 |
| 3.2. Equation du roulis | 03-02-00 |
| 3.3. Détermination de l'amortissement - essais d'extinction | 03-04-00 |
| 3.4. Période propre de roulis | 03-06-00 |
| 4. Mouvement du navire sur houle de travers | 04-01-00 |
| 4.1. Décomposition du mouvement | 04-01-00 |
| 4.2. Equation du roulis sur houle | 04-02-00 |
| 4.3. Etude de la solution forcée | 04-02-00 |
| 4.4. Influence de la stabilité statique | 04-04-00 |

| | |
|--|-----------------|
| 4.5. Influence des non-linéarités | 04-06-00 |
| 4.6. Influence de la vitesse de route | 04-08-00 |
| 4.7. Stabilité dynamique en roulis | 04-08-00 |
| 5. Stabilisation des navires soumis au roulis | 05-01-00 |
| 5.1. Introduction | 05-01-00 |
| 5.2. Les quilles de roulis | 05-01-00 |
| 5.3. Stabilisation à ailerons mobiles | 05-02-00 |
| 5.4. Les cuves anti-roulis | 05-03-00 |
| 6. Le tangage et le pilonnement | 06-01-00 |
| 6.1. Hypothèses | 06-01-00 |
| 6.2. Equation de pilonnement-tangage en eau calme – périodes propres | 06-01-00 |
| 6.3. Equation de pilonnement-tangage sur houle | 06-03-00 |
| 6.4. Mouvements du navire sur mer de l'avant | 06-04-00 |
| 6.5. Mouvements du navire sur mer de l'arrière | 06-07-00 |
| 7. Cas particulier des petites structures | 07-01-00 |
| 7.1. Structures de faibles dimensions | 07-01-00 |
| 7.2. Efforts d'inertie | 07-02-00 |
| 7.3. Efforts de traînée | 07-08-00 |
| 7.4. Formule de Morison | 07-11-00 |
| 7.5. Calcul des efforts sur houle régulière | 07-20-00 |
| 8. Références bibliographiques | 08-01-00 |

3. Tenue à la mer sur houle irrégulière

| | |
|--|----------|
| 1. Introduction | 01-01-00 |
| 2. Les différents aspects de la tenue à la mer | 02-01-00 |
| 2.1. Les mouvements de plate-forme et leurs conséquences | 02-01-00 |
| 2.2. La résistance de la charpente du navire et des structures | 02-04-00 |
| 2.3. L'embarquement d'eau | 02-06-00 |
| 2.4. La réduction de vitesse | 02-07-00 |
| 3. Principe de l'étude de la tenue à la mer | 03-01-00 |
| 3.1. Introduction | 03-01-00 |
| 3.2. Spectre de rencontre | 03-01-00 |

| | |
|---|----------|
| 3.3. Opérateur de réponse en amplitude | 03-03-00 |
| 3.4. Navigation météorologique | 03-04-00 |
| 4. Les effets du vent et du courant | 04-01-00 |
| 4.1. Estimation des efforts dus au vent | 04-01-00 |
| 4.2. Estimation des efforts dus au courant | 04-03-00 |
| 5. Comportements non-linéaires | 05-01-00 |
| 5.1. Les différents types de non-linéarité | 05-01-00 |
| 5.2. Les efforts de dérive sur houle | 05-01-00 |
| 5.3. Efforts et mouvements basse-fréquence et haute-fréquence | 05-03-00 |
| 5.4. Formule de Morison | 05-05-00 |
| 6. Références bibliographiques | 06-01-00 |

0. Introduction

La dynamique du navire est la discipline de la théorie du navire qui étudie le mouvement le plus général du navire évoluant sur une mer agitée.

Le mouvement d'un navire est la conséquence des efforts de différentes origines qui s'exercent sur lui et dont les plus importants sont ceux engendrés par l'action de l'eau en mouvement sur sa carène.

Les rapports du navire avec l'eau qui l'entoure et le supporte constituent l'un des éléments les plus importants que l'architecte naval doit prendre en compte lors de l'élaboration d'un projet. Ils conditionnent en effet les formes et dimensions de la carène, le type et la puissance de l'appareil propulsif, la puissance de l'appareil à gouverner et l'échantillonnage de la coque.

L'étude de ces forces hydrodynamiques, qui relève de la mécanique des fluides, présente des difficultés importantes dans la mesure où les formes de la carène et, surtout, l'état de la mer, se prêtent mal à une description mathématique.

En pratique, il est donc souvent nécessaire de se contenter de schémas simplifiés, mais non simplistes, et de recourir à l'expérimentation et au calcul. Il convient également d'élargir le champ de l'étude au delà de celle des seuls mouvements, pour aborder l'examen de leurs conséquences.

Traditionnellement, et par nécessité, la dynamique du navire étudie d'abord certains mouvements particuliers du navire :

- la translation rectiligne uniforme en eau calme, la résistance à la marche et la propulsion,
- les évolutions, et plus particulièrement la giration du navire en eau calme,
- les mouvements de roulis et de tangage en eau calme ou sur houle régulière, avant d'aborder le problème le plus général de la tenue à la mer du navire sur houle régulière ou irrégulière.

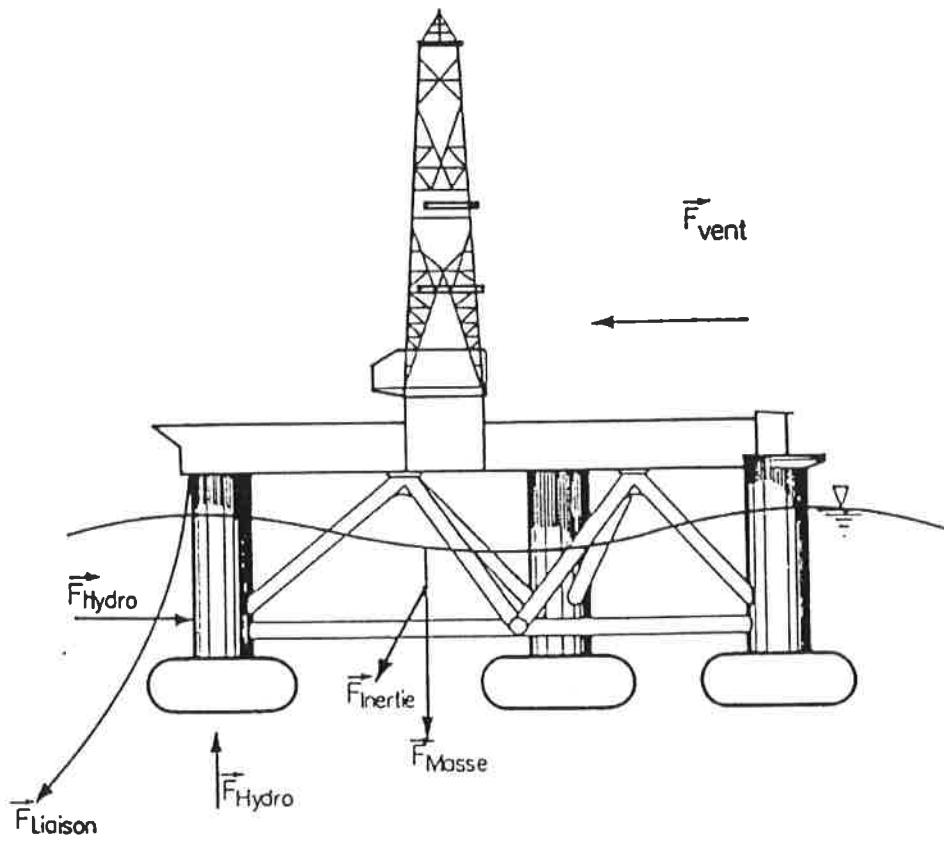
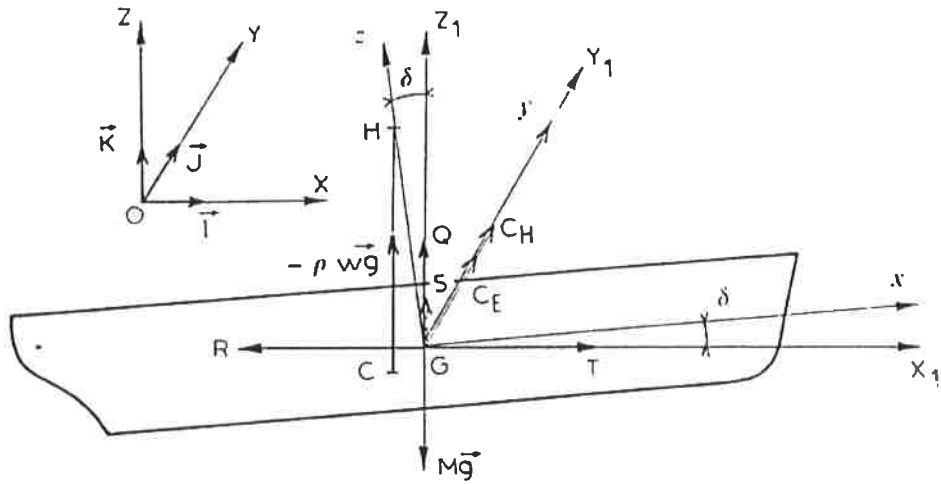
Par ailleurs, l'évolution de la recherche pétrolière en mer, et la mise en exploitation des champs pétroliers off-shore a conduit au développement de nouvelles techniques et technologies destinées à répondre à des problèmes nouveaux mais dont les solutions relèvent en grande partie des connaissances acquises dans le domaine de la dynamique du navire.

Il convient donc de traiter de manière unifiée, globale et cohérente les problèmes qui interviennent aussi bien dans le cadre de la dynamique du navire que dans celui de la tenue à la mer des structures marines. C'est la raison pour laquelle un effort particulier et permanent a été apporté à ne pas créer de différence artificielle, tout en traitant le plus clairement possible des problèmes spécifiques à chacun de ces domaines.

Partie 01

Les équations du mouvement des navires et des structures marines

$$\begin{cases} M \frac{d^2 X}{dt^2} \vec{I} = M \vec{g} - \rho W \vec{g} + \vec{\mathcal{F}} + \vec{F} \\ 0 = \vec{GC} \wedge (-\rho W \vec{g}) + \vec{\mathcal{M}} + \vec{M} \end{cases}$$



1. Introduction

1.1. Généralités

L'étude des mouvements des navires et des structures marines qui se déplacent en eau calme, ou qui sont soumises à l'action des éléments relève, d'une part, de la mécanique du solide, dont les théorèmes généraux s'appliquent directement, et d'autre part, de la mécanique des fluides, recours nécessaire pour l'évaluation des efforts extérieurs d'origines hydrodynamiques et aérodynamiques.

En fonction de leurs gammes de fréquences, les mouvements des structures flottantes peuvent être séparés en trois catégories :

- les mouvements à la fréquence de la houle,
- les mouvements basses fréquences, de dérive moyenne et de dérive lente,
- les mouvements hautes fréquences.

Les mouvements à la fréquence de la houle sont les mouvements de plateforme qui incluent les trois translations (cavalement, embardée et pilonnement), et les trois rotations (roulis, tangage et lacet). Dans les gammes de fréquences pour lesquelles la houle contient de l'énergie de manière significative, ils relèvent pour l'essentiel de la théorie linéaire, sauf, bien sûr, au voisinage des périodes propres.

Les mouvements de dérive moyenne et de dérive lente trouvent leur origine dans des excitations non-linéaires au voisinage de résonances à basses fréquences, comme dans le cas d'ancrages de structures ou de navires lourds avec de faibles raideurs. Les périodes auxquelles ils se manifestent sont souvent de l'ordre de une à deux minutes, voire plus.

Les mouvements à hautes fréquences trouvent également leur origine dans des excitations non-linéaires au voisinage de résonances à hautes fréquences, comme dans le cas de structures ancrées sur des lignes tendues de très grande raideurs (PLT). Les périodes auxquelles ils se manifestent sont souvent de l'ordre de deux à quatre secondes, voire moins.

1.2. Les problèmes typiques du navire

Les principaux problèmes qui concernent le comportement des navires à la mer ont diverses origines.

Tout d'abord, un navire est fait pour se déplacer sur un plan d'eau afin d'accomplir une mission (transport de fret ou de passagers, surveillance, protection, sauvetage, observations scientifiques, ...), dans les conditions économiques

et d'autonomie fixées. Cela pose de nombreux problèmes liés à la résistance à la marche, à la propulsion, aux évolutions et à la manœuvrabilité.

Ensuite, les conditions météorologiques ne sont pas toujours bonnes. Le vent peut souffler au-dessus du plan d'eau qui est souvent agité par des houles et des vagues. Cela pose de nombreux autres problèmes relatifs à la tenue à la mer, à la tenue de route ou à la tenue des ancrages, aux mouvements et aux efforts engendrés par la houle, à la fatigue de la charpente due à l'alternance de ces efforts.

Les performances des navires vis-à-vis de ces problèmes conditionnent leur capacité à remplir leurs missions, même dans des conditions plus ou moins dégradées.

Les principaux problèmes liés à la tenue à la mer et aux efforts engendrés par la houle sont illustrés sur la figure 1.2.1. Il est à noter que les accélérations et les déplacements qui affectent les différents degrés de liberté du navire peuvent engendrer des risques spécifiques.

Les accélérations verticales jouent un rôle prépondérant dans les efforts que subissent les navires et leurs équipements, ainsi que dans le mal de mer dont sont victimes les équipages et les passagers. Les mouvements verticaux relatifs entre la houle et le navire sont à l'origine des dommages dus aux chocs hydrodynamiques (slamming) et à l'envahissement du pont par les vagues (deckwetting).

Le roulis peut conduire à des problèmes importants pour les navires de pêche, les paquebots, les navires de guerre et les opérations de manutentions à la mer. La réduction du roulis des navires est un sujet qui est d'ailleurs souvent évoqué. Le mouvement de roulis, aggravé par les effets du vent et l'envahissement du pont par les vagues, est également à l'origine du chavirement des petites unités. Le roulis a aussi une incidence non négligeable sur la capacité du navire à garder sa stabilité de route, en particulier lorsque la fréquence de rencontre est faible.

Les chocs hydrodynamiques dans les réservoirs (sloshing) et les citernes peuvent être la cause de dommages importants pour les pétroliers et les méthaniers. Ces chocs peuvent être particulièrement violents lorsque le fluide contenu dans les cuves entre en résonance pour des fréquences proches de celles correspondant à des mouvements importants du navire.

Pour les grands navires, les efforts de cisaillement, les moments fléchissants et les moments de torsion engendrés par la houle peuvent être très importants. Deux problèmes plus particuliers peuvent également se produire : le fouettement (whipping) et la résonance vibratoire (springing). Le fouettement est une vibration élastique transitoire qui parcourt la coque ou la structure du navire, généralement due aux chocs hydrodynamiques. La résonance vibratoire correspond à une onde élastique stationnaire qui s'établit dans la coque ou dans la structure du

navire. Elle concerne essentiellement les très grands navires ; elle est est dû à des mécanismes d'excitations linéaires et/ou non-linéaires.

En tout état de cause, les mouvements des navires et les efforts qu'ils subissent, conduisent à des réductions de vitesse involontaires ou volontaires, et à des modifications de route. Les réductions de vitesse involontaires sont dues aux augmentations de la résistance à la marche et à la dégradation de l'efficacité des hélices propulsives, tandis que les réductions de vitesse volontaires sont destinées à limiter les chocs hydrodynamiques. Ils participent ainsi à la dégradation des capacités du navire à assurer sa mission.

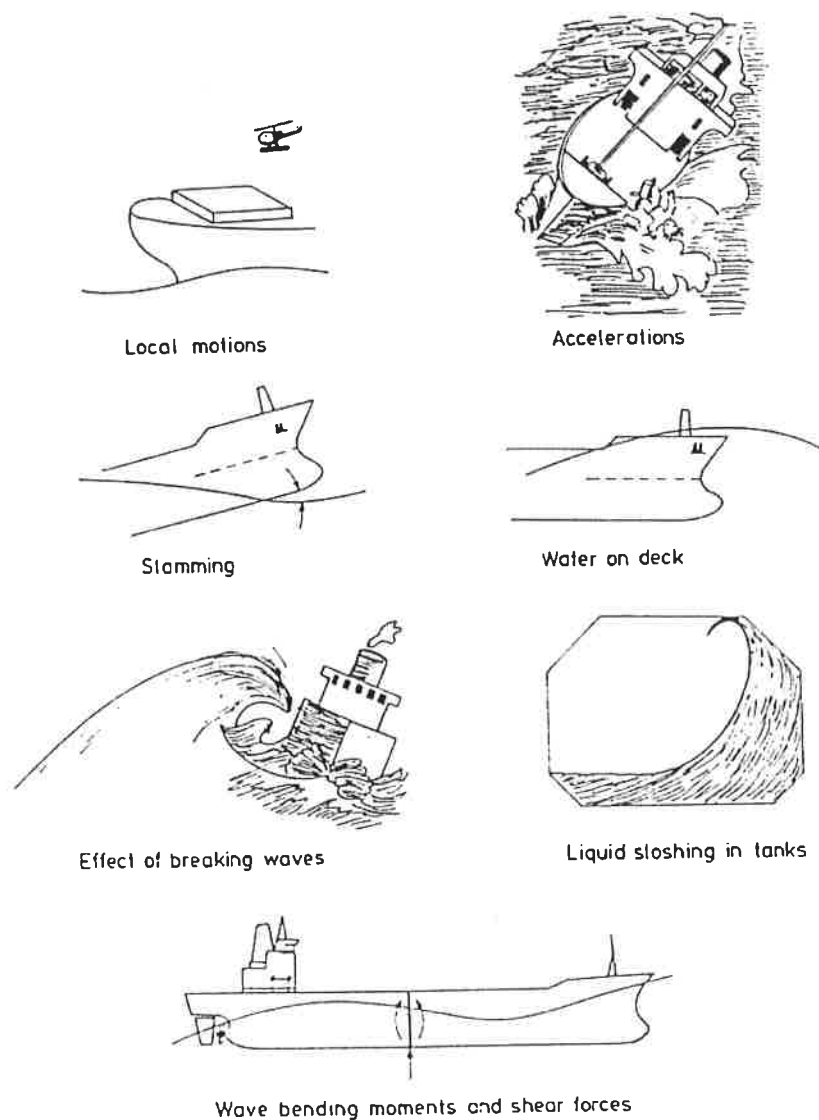


figure 1.2.1 Principaux problèmes de tenue à la mer des navires.

1.3. Les problèmes typiques des structures off-shores

Les principaux problèmes qui concernent le comportement à la mer des structures marines, et plus particulièrement des structures off-shores, sont essentiellement liés à la tenue sur houle et aux opérations marines.

En ce qui concerne les opérations de forage, la principale limite est liée au pilonnement, en raison du mouvement vertical du riser qui en résulte, et qui doit être compensé. Or il n'est quasiment plus possible de compenser le pilonnement des risers au delà de quatre mètres.

C'est la raison pour laquelle les plate-formes de forages sont étudiées pour que leur pilonnement soit le plus faible possible et qu'il soit possible d'opérer des forages pendant le maximum de temps. Les plate-formes semi-submersibles en sont un bon exemple.

Le roulis prend également de l'importance pour les manutentions de colis d'une structure à l'autre, pour le transport de plate-formes sur des barges, ou pour la mise en place de structures off-shores (jackets, ponts, ...).

Le roulis et le tangage sont des facteurs dimensionnants pour les opérations sur les plate-formes de production.

Les efforts et mouvements horizontaux sont également importants pour la tenue des ancrages ou le positionnement dynamique et le maintien des plate-formes au dessus des forages ou des têtes de puits (le déplacement horizontal ne doit pas dépasser 10% de la profondeur).

L'altitude d'implantation des ponts des plate-formes dépend de la plus grande hauteur que les vagues peuvent atteindre (airgap), afin de limiter les risques de chocs hydrodynamiques.

Les plate-formes ancrées et les postes de chargements, constitués de grands navires amarrés à des bouées ou à des colonnes oscillantes, sont soumis à des excitations basses fréquences qui les conduisent à faire de grandes excursions horizontales dimensionnantes pour leurs ancrages.

Enfin, les plate-formes sur câbles tendus sont susceptibles de subir des dommages liés au springing et au ringing.

1.4. Classification hydrodynamique des structures

L'analyse dimensionnelle montre que les principaux efforts hydrodynamiques qui interviennent dans l'étude du comportement des navires et des structures à la mer sont, d'une part les efforts de pesanteur dus à la gravité et les efforts

due à la pression qui incluent la diffraction et la radiation autour des obstacles, et d'autre part, les efforts de frottement et de sillage dus à la viscosité du fluide et à la turbulence.

Le problème qui se pose alors est de discerner :

— Les cas dans lesquels le comportement des structures est principalement gouverné par les effets d'inertie, de pesanteur et de pression, et pour lesquels les écoulements relèvent dans une large gamme d'applications de la théorie du potentiel. C'est, pour les grandes structures qui modifient les champs de vagues, le domaine de la diffraction-radiation, et, pour les structures trop petites pour modifier les champs de vagues, celui des efforts d'inertie.

— Les cas dans lesquels le comportement des structures est principalement gouverné par les effets de viscosité et de sillage tourbillonnaire. C'est le domaine des efforts de traînée.

La figure 1.4.1 montre les différentes zones d'influence de ces deux types d'efforts en fonction des dimensions caractéristiques des structures d par rapport à la longueur d'onde λ , et de la cambrure (quotient de la hauteur crête à creux H par la longueur d'onde).

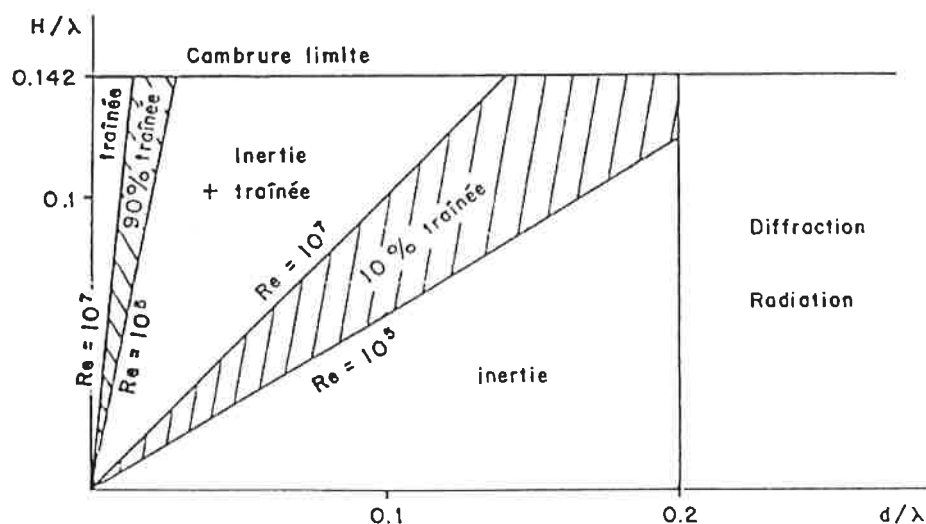


figure 1.4.1 Importance relative des efforts de diffraction et de viscosité sur les structures marines.

Il convient de remarquer que, si le comportement à la mer des grandes structures massives, et en particulier des navires, est largement dominé par les effets dus aux forces de gravité et de pression, les efforts de viscosité interviennent majoritairement sur certains aspects de leurs comportements.

Enfin, il existe des structures mixtes qui sont composées de parties en treillis de tubes et de parties plus massives.

1.5. Systèmes de référence

1.5.1. Systèmes de référence utilisés pour définir les mouvements de plate-forme

La décomposition des mouvements d'un navire ou d'une structure marine doit faciliter la représentation théorique de son comportement, tout en restant pertinente eu égard à l'expérience courante.

Comme les mouvements de plate-forme se superposent à la translation rectiligne uniforme du navire ou de la structure sur un plan d'eau calme, il convient de considérer quatre types de référentiels.

— Le repère absolu.

Le repère absolu est désigné par $(O_a ; x_a, y_a, z_a)$. Il est immobile par rapport à la terre. Son axe $O_a z_a$ est vertical ascendant. Les axes $O_a x_a$ et $O_a y_a$ coïncident avec le plan de la surface libre au repos. L'axe $O_a x_a$ est colinéaire à la vitesse d'avance moyenne des navires ou des structures \vec{U} si elle existe.

— Le repère galiléen.

Le repère galiléen est désigné par $(O_g ; x_g, y_g, z_g)$. Il est en translation rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{U} = (U_{x_a}, 0, 0)$ suivant l'axe $O_a x_a$ par rapport au repère absolu. Il est confondu avec lui à l'origine des temps (in extenso à instant $t = 0$), ce qui implique que leurs axes restent respectivement toujours parallèles.

Les relations suivantes permettent de passer du repère galiléen au repère absolu :

$$(1.1) \quad \begin{aligned} x_a(t) &= x_g(t) + U_{x_a} \cdot t \\ y_a(t) &= y_g(t) \\ z_a(t) &= z_g(t) \end{aligned}$$

— Les repères barycentriques.

Un repère barycentrique est désigné par $(G ; x_b, y_b, z_b)$. Il est en translation par rapport au repère galiléen, et leurs axes restent respectivement toujours parallèles. Son origine est liée au centre de gravité G d'un navire ou d'une structure. Il y a donc un repère barycentrique pour chaque navire et chaque structure.

Les relations suivantes permettent de passer d'un repère barycentrique au repère galiléen :

$$(1.2) \quad \begin{aligned} x_g(t) &= x_b(t) + x_{Gg}(t) \\ y_g(t) &= y_b(t) + y_{Gg}(t) \\ z_g(t) &= z_b(t) + z_{Gg}(t) \end{aligned}$$

expressions dans lesquelles x_{Gg} , y_{Gg} et z_{Gg} désignent respectivement les coordonnées de l'origine G du repère barycentrique dans le repère galiléen.

— Les repères relatifs.

Un repère relatif est désigné par $(G ; x_r, y_r, z_r)$. Il est fixe par rapport à un navire ou à une structure. Son origine est liée au centre de gravité G de ce navire ou de cette structure. L'axe Gx_r est colinéaire à la direction moyenne de la vitesse d'avance si elle existe, et l'axe Gz_r est vertical lorsque le navire ou la structure est à l'équilibre statique. Son orientation, par rapport au repère barycentrique associé, est définie par trois angles α , β et γ . Il y a un repère relatif pour chaque navire ou chaque structure.

On passe du repère $(G ; x_b, y_b, z_b)$ au repère $(G ; x_1, y_1, z_1)$ par une rotation R_1 d'angle γ autour de l'axe Gz_b .

$$(1.3) \quad R_1 = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On passe du repère $(G ; x_1, y_1, z_1)$ au repère $(G ; x_r, y_r, z_r)$ par une rotation R_2 d'angle β autour de l'axe Gy_1 .

$$(1.4) \quad R_2 = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

On passe du repère $(G ; x_r, y_r, z_r)$ au repère $(G ; x_g, y_g, z_g)$ par une rotation R_3 d'angle α autour de l'axe Gx_r .

$$(1.5) \quad R_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

Les relations suivantes permettent de passer d'un repère barycentrique à son repère relatif associé :

$$(1.6) \quad \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{bmatrix} = [R_3 \cdot R_2 \cdot R_1] \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix}$$

Et les relations suivantes permettent de passer d'un repère relatif à son repère barycentrique associé :

$$(1.7) \quad \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} = [R_3 \cdot R_2 \cdot R_1]^T \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{bmatrix}$$

Ce qui s'écrit également :

$$(1.8) \quad \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} = [R_1^T \cdot R_2^T \cdot R_3^T] \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{bmatrix}$$

Lorsque les trois angles α , β et γ sont tous nuls, le repère barycentrique et le repère relatif associés sont confondus.

Les figures 1.5.1 et 1.5.2 matérialisent ces divers repères.

1.5.2. Cas particulier de certains problèmes non-linéaires

Dans certains cas particulier de problèmes non-linéaires, il est nécessaire, ou utile de définir les repères autrement. Ceci, par exemple, quand la position verticale de l'axe Gx_r n'est pas exclue (tangage de 90°). En effet, dans ce cas, la matrice qui permet d'exprimer le vecteur rotation instantané dans le repère barycentrique est singulière ($\beta = \pm \frac{\pi}{2}$).

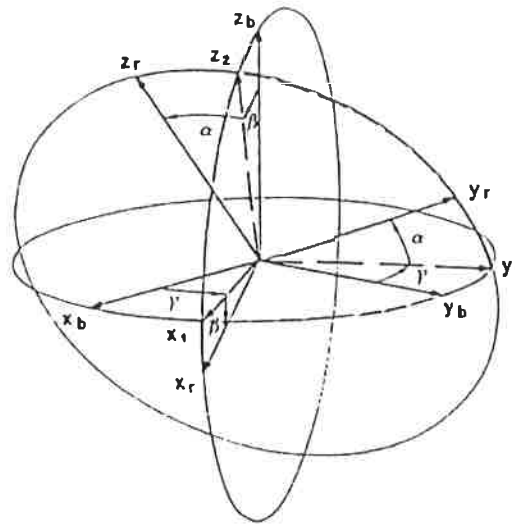


figure 1.5.1 Angles de rotation entre repère barycentrique et repère relatif.

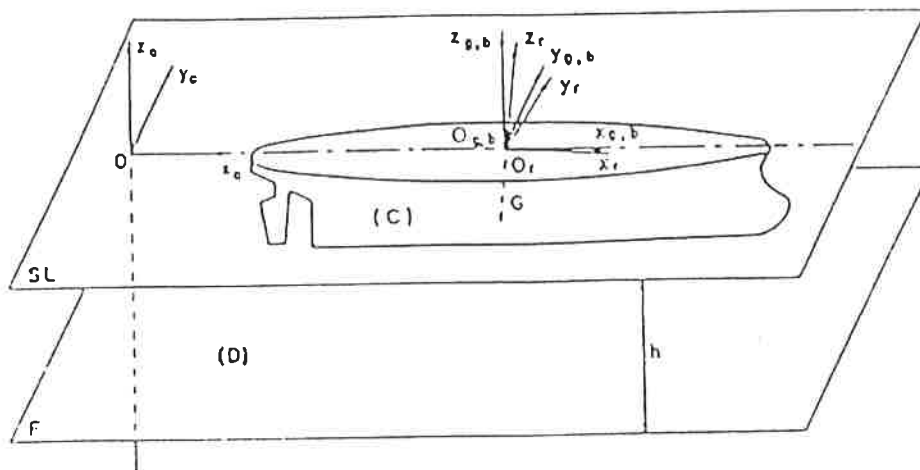


figure 1.5.2 Représentation des repères dans le cas d'un navire de surface.

1.5.3. Les repères de définition des données mécaniques

Pour définir les inerties mécaniques, la meilleure solution consiste à partir des rayons de giration qui sont des grandeurs scalaires intrinsèques définies de manière unique par :

$$(1.9) \quad \begin{aligned} R_{xx} &= \sqrt{\frac{\iiint_M (y^2 + z^2) dm}{M}}, & R_{xy} &= R_{yx} = 0 \\ R_{yy} &= \sqrt{\frac{\iiint_M (x^2 + z^2) dm}{M}}, & R_{xz} &= R_{zx} = 0 \\ R_{zz} &= \sqrt{\frac{\iiint_M (x^2 + y^2) dm}{M}}, & R_{yz} &= R_{zy} = 0 \end{aligned}$$

expressions dans lesquelles M désigne la masse du navire ou de la structure et où les coordonnées sont exprimées dans les axes principaux d'inertie.

Cependant, il est souvent plus commode de redéfinir ces grandeurs dans des axes qui ne sont pas nécessairement les axes principaux d'inertie – même si il n'en sont généralement pas très loin – mais les axes dans lesquels le devis de poids a été effectué (OH PPAR pour un navire). Pour cette raison, il peut être utile de définir un repère dont l'origine est le centre de gravité de la structure, et dont les orientations des axes (orthonormés directs) sont quelconques. Les grandeurs de base sont alors :

$$(1.10) \quad \begin{aligned} R_{xx} &= \sqrt{\frac{\iiint_M (y^2 + z^2) dm}{M}}, & R_{xy} &= R_{yx} = \sqrt{\frac{\iiint_m xy dm}{m}} \\ R_{yy} &= \sqrt{\frac{\iiint_M (x^2 + z^2) dm}{M}}, & R_{xz} &= R_{zx} = \sqrt{\frac{\iiint_m xz dm}{m}} \\ R_{zz} &= \sqrt{\frac{\iiint_M (x^2 + y^2) dm}{M}}, & R_{yz} &= R_{zy} = \sqrt{\frac{\iiint_m yz dm}{m}} \end{aligned}$$

1.5.4. Les points de réduction des torseurs et des rotations

Un torseur d'efforts est composé de deux éléments qui sont d'une part un vecteur représentant une force et d'autre part un pseudo-vecteur représentant le moment de cette force par rapport à un point donné. Ce point est appelé point de réduction du torseur.

De même, lors de la décomposition d'un mouvement complexe en composantes élémentaires (par exemple les déplacements unitaires suivant les six degrés de liberté), les rotations sont réduites par rapport à un point donné.

En tout état de cause, il doit être clair, que si il est aisé de transférer le point de réduction d'un torseur, ou d'un tenseur d'inertie, il n'en va pas de

même pour les matrices en général, et en particulier dans le cas des matrices de termes hydrodynamiques pour lesquelles le théorème de Huygens ne s'applique certainement pas !

Le meilleur point de réduction est le centre de gravité, car alors, la plupart des termes d'inertie de couplage sont nuls.

1.6. Définition des mouvements des navires et structures marines

Si dans le cadre d'une théorie linéaire, la définition des degrés de liberté est une chose aisée, il n'en est plus de même dès qu'on cherche à appréhender des phénomènes non-linéaires pour lesquels la composition des rotations n'est plus une simple somme algébrique. Dans ces conditions, il convient de préciser ici, la terminologie employée pour désigner les divers degrés de liberté.

D'une façon générale, la position d'un point M quelconque d'un navire ou d'une structure peut être définie, dans le repère absolu, par la relation suivante :

$$(1.11) \quad \overline{O_a M}(t) = \overline{O_a O_g}(t) + \overline{O_g G}(t) + \overline{GM}(t)$$

expression dans laquelle, \overline{GM} est un vecteur constant dans le repère relatif.

— Trajectoire.

On appelle trajectoire du navire ou de la structure, l'évolution de l'extrémité du vecteur $\overline{O_a G}(t)$ dans le repère absolu ; c'est la trajectoire de son centre de gravité. Elle est définie par les composantes du vecteur $\overline{O_a G}(t)$ exprimées dans le repère absolu.

— Trajectoire moyenne.

On appelle trajectoire moyenne du navire ou de la structure, l'évolution de l'extrémité du vecteur $\overline{O_a O_g}(t)$ dans le repère absolu ; la trajectoire moyenne est donc définie par les composantes de ce vecteur exprimées dans le repère absolu.

— Fluctuation autour de la trajectoire moyenne.

On appelle fluctuation autour de la trajectoire moyenne du navire ou de la structure, l'évolution de l'extrémité du vecteur $\overline{O_g G}(t)$ dans le repère galiléen ; la fluctuation de la trajectoire moyenne est donc définie par les composantes de ce vecteur exprimées dans le repère galiléen.

— Cavalement, embardée et pilonnement.

On appelle respectivement cavalement, embardée et pilonnement les composantes du vecteur $\overline{O_r G}(t)$ exprimées dans le repère relatif.

— Roulis, tangage et lacet.

On appelle roulis l'angle ϕ formé entre d'une part le plan vertical contenant l'axe Gx_r et d'autre part le plan $(G ; x_r, z_r)$. L'angle α est donc égal à l'angle de roulis ϕ :

$$(1.12) \quad \phi = \alpha$$

On appelle tangage l'angle θ formé entre d'une part le plan vertical contenant l'axe Gy_r et d'autre part le plan $(G ; y_r, z_r)$. L'angle β n'est donc pas égal à l'angle de tangage θ qui est donné par les relations :

$$(1.13) \quad \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sqrt{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \beta}} \\ \sin \theta &= \frac{\sin \beta}{\sqrt{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \beta}} \end{aligned}$$

On appelle lacet l'angle ψ formé entre d'une part l'intersection du plan $(G ; x_r, z_r)$ et du plan de la surface libre, et d'autre part le cap donné qui est matérialisé par l'axe Gx_b . L'angle γ n'est donc pas égal à l'angle de lacet ψ qui est donné par la relation :

$$(1.14) \quad \begin{aligned} \cos \psi &= \frac{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma}{\sqrt{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta + \cos^2 \alpha}} \\ \sin \psi &= - \frac{\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \gamma}{\sqrt{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta + \cos^2 \alpha}} \end{aligned}$$

Naturellement, lorsque les angles sont infinitésimaux, il est aisé de retrouver les définitions classiques de ces différents degrés de liberté, données dans le cadre d'une théorie linéaire :

| | | |
|-------------|---------------------|------------------------------|
| $\eta_1(t)$ | cavement (surge) | translation suivant Gx_r , |
| $\eta_2(t)$ | embardée (sway) | translation suivant Gy_r , |
| $\eta_3(t)$ | pilonnement (heave) | translation suivant Gz_r , |
| $\eta_4(t)$ | roulis (roll) | rotation autour de Gx_r , |
| $\eta_5(t)$ | tangage (pitch) | rotation autour de Gy_r , |
| $\eta_6(t)$ | lacet (yaw) | rotation autour de Gz_r . |

1.7. Principales caractéristiques des navires

Les plans de référence sont définis comme suit :

- Le plan longitudinal du navire est le plan défini par Gx_rz_r .
- Le plan de flottaison du navire est le plan défini par $Gx_r y_r$.
- Le plan perpendiculaire ou transversal du navire est le plan défini par Gy_rz_r .

Le déplacement d'un navire est le poids de l'eau déplacée par sa carène, appendices inclus.

La jauge d'un navire est une mesure du volume disponible pour les passagers ou pour le fret. La jauge ou tonnage du navire est purement conventionnelle et n'a qu'une valeur de comparaison entre navires et sert de base à la taxation douanière. Il existe différentes définitions de la jauge (jauge brute, jauge nette, ...). Les jauges sont exprimées en tonneaux de 2.83 m³ (100 pieds cube).

| Définition | Marine nationale | Norme N.F. | Marines anglo-saxonnes |
|---|-------------------------|-------------------------|------------------------|
| Longueur entre perpendiculaires | L | L_{PP} | LBP |
| Longueur de flottaison | L_1 | LWL | |
| Flottaison de référence | $10H$ | $10H$ | DWL |
| Section transversale à la PPM | $C10$ | $C10$ ou \overline{C} | \overline{C} |
| Largeur de flottaison | l | B | B |
| Aire au C 10 | B_1^2 | | |
| Aire au maître couple | B^2 | A_x | |
| Creux au C 10 | c | D | |
| Profondeur de carène au C 10 | P | P | T |
| Surface de flottaison | Σ | A_w | |
| Surface mouillée de la carène | S | S | |
| Volume de la carène | W | ∇ | ∇ |
| Déplacement | $\rho g W$ | D | Δ |
| Coefficient de bloc | $\frac{W}{LTP}$ | δ | C_B |
| Coefficient de remplissage du maître couple | $\frac{B^2}{IP}$ | β | β ou C_M |
| Coefficient prismatique | $\frac{W}{B^2L}$ | φ | φ |
| Coefficient prismatique vertical | $\frac{W}{\Sigma P}$ | Φ | C_{VP} |
| Coefficient de remplissage de la flottaison | $\frac{\Sigma}{LI}$ | α | α |
| | | | ou C_W |
| Coefficient de finesse | $\frac{L}{\sqrt[3]{W}}$ | f | |
| Tirant d'eau aux PP | | $TAV - TAR$ | T |

2. Les forces appliquées aux navires et structures

2.1. Bilan des efforts appliqués aux navires et structures

Un navire ou une structure marine subissent un certain nombre d'efforts qui contribuent à les animer de divers mouvements. Le théorème de Newton stipule qu'il y a, à chaque instant, équilibre entre le torseur des efforts d'inertie propre au navire ou à la structure, et les efforts extérieurs qui lui sont appliqués.

Il convient donc, dans un premier temps, d'identifier les divers types d'efforts qui sollicitent le navire ou la structure, puis d'essayer d'en comprendre les origines et le comportement et de les quantifier.

Ces efforts extérieurs qui s'appliquent au navire ou à la structure peuvent être classer en quatre groupes :

- Les efforts volumiques de pesanteur,
- Les efforts surfaciques de pression dus à l'eau,
- Les efforts surfaciques de pression dus à l'air ou au vent,
- Les efforts ponctuels de liaison.

Avant d'explicitier chacun de ces efforts, il convient d'exprimer les efforts d'inertie qui sollicitent les navires et les structures marines.

2.2. Efforts d'inertie

Afin d'établir les équations dans le cas le plus général, les éléments des torseurs seront calculés en supposant que l'origine O du repère relatif est, a priori, quelconque. Les propriétés particulières, obtenues quand O et le centre de gravité G du solide sont confondus, ne seront qu'in fine, mises à profit.

2.2.1. Résultante des efforts d'inertie

La force d'inertie $\vec{F}_I(M;t)$ est, par définition, la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement $\vec{Q}(t)$ du solide.

Aux instants t et $t + dt$, les quantités de mouvement attachées à la masse élémentaire dm ont respectivement pour expressions :

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \vec{Q}(t) &= \left[\vec{C}(t) + \vec{\Omega}(t) \wedge \vec{OM}(t) \right] dm \\ \vec{Q}(t + dt) &= \left[\vec{C}(t + dt) + \vec{\Omega}(t + dt) \wedge \vec{OM}(t + dt) \right] dm \end{aligned}$$

comme $\overline{OM}(t + dt)$ peut être exprimé, au premier ordre, sous les diverses formes suivantes :

$$\begin{aligned}
 \overline{OM}(t + dt) &= -\overline{C}(t)dt + \overline{OM}(t) + \overline{V}_E(t)dt \\
 (2.2) \qquad &= -\overline{C}(t)dt + \overline{OM}(t) + [\overline{C}(t) + \overline{\Omega}(t) \wedge \overline{OM}(t)] dt \\
 &= \overline{OM}(t) + \overline{\Omega}(t) \wedge \overline{OM}(t)dt
 \end{aligned}$$

la variation de la quantité de mouvement pendant le temps dt devient :

$$\begin{aligned}
 (2.3) \qquad \overline{Q}(t + dt) - \overline{Q}(t) &= \\
 &= \left\{ \overline{C}(t + dt) - \overline{C}(t) + [\overline{\Omega}(t + dt) - \overline{\Omega}(t)] \wedge \overline{OM}(t) + \overline{\Omega}(t + dt) \wedge [\overline{\Omega}(t) \wedge \overline{OM}(t)] dt \right\} dm
 \end{aligned}$$

d'où, en passant à la limite quand dt tend vers zéro :

$$(2.4) \qquad d\overline{F}_I(t) = \left\{ \dot{\overline{C}}(t) + \dot{\overline{\Omega}}(t) \wedge \overline{OM}(t) + \overline{\Omega}(t) \wedge [\overline{\Omega}(t) \wedge \overline{OM}(t)] \right\} dm$$

La force résultante qui s'exerce sur l'ensemble du solide de masse M s'écrit donc, en désignant par S le domaine solide :

$$\begin{aligned}
 (2.5) \qquad \overline{F}_I(t) &= \iiint_S d\overline{F}_I(t) \\
 &= \left\{ \dot{\overline{C}}(t) + \dot{\overline{\Omega}}(t) \wedge \overline{OG}(t) + \overline{\Omega}(t) \wedge [\overline{\Omega}(t) \wedge \overline{OG}(t)] \right\} M
 \end{aligned}$$

ce qui se réduit, dans le cas où l'origine du repère coïncide avec le centre de gravité, à l'égalité bien connue :

$$(2.6) \qquad \overline{F}_I(t) = M \dot{\overline{C}}(t)$$

2.2.2. Moment résultant des efforts d'inertie

Le moment d'inertie, réduit en un point A , $\overline{M}_{I/A}(M; t)$ est, par définition, la dérivée temporelle du moment de la quantité de mouvement $\overline{M}_A(t)$ du solide réduit en ce point supposé fixe.

Aux instants t et $t + dt$, les moments des quantités de mouvement attachées à la masse élémentaire dm ont respectivement pour expressions :

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \overline{\mathcal{M}}_A(t) &= \overline{AM}(t) \wedge [\overline{\mathcal{C}}(t) + \overline{\Omega}(t) \wedge \overline{OM}(t)] dm \\ \overline{\mathcal{M}}_A(t + dt) &= \overline{AM}(t + dt) \wedge [\overline{\mathcal{C}}(t + dt) + \overline{\Omega}(t + dt) \wedge \overline{OM}(t + dt)] dm \end{aligned}$$

En introduisant dans les relations (2.7) la dernière des expressions (2.2), la variation du moment de la quantité de mouvement pendant le temps dt s'écrit, aux termes d'ordre supérieurs près :

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \overline{\mathcal{M}}_A(t + dt) - \overline{\mathcal{M}}_A(t) = \\ \overline{AM}(t) \wedge \left\{ \overline{\mathcal{C}}(t + dt) - \overline{\mathcal{C}}(t) + [\overline{\Omega}(t + dt) - \overline{\Omega}(t)] \wedge \overline{OM}(t) + \overline{\Omega}(t + dt) \wedge [\overline{\Omega}(t) \wedge \overline{OM}(t)] dt \right\} dm \\ + \overline{AM}(t) \wedge \left\{ \overline{V}_E(M; t) \wedge \overline{V}_E(M; t + dt) \right\} dt dm \end{aligned}$$

soit, en considérant la limite de l'expression (2.8) quand dt tend vers zéro :

$$(2.9) \quad d\overline{\mathcal{M}}_{I/A}(t) = \overline{AM}(t) \wedge \left\{ \dot{\overline{\mathcal{C}}}(t) + \dot{\overline{\Omega}}(t) \wedge \overline{OM}(t) + \overline{\Omega}(t) \wedge [\overline{\Omega}(t) \wedge \overline{OM}(t)] \right\} dm$$

Le moment des efforts d'inertie qui s'exerce sur le solide de masse M s'obtient, en intégrant le moment élémentaire sur l'ensemble du domaine solide S :

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \overline{\mathcal{M}}_{I/A}(t) &= \iiint_S d\overline{\mathcal{M}}_{I/A}(t) \\ &= M(\overline{AG}(t) \wedge \dot{\overline{\mathcal{C}}}(t)) \\ &\quad + \iiint_S \overline{AM}(t) \wedge \left\{ \dot{\overline{\Omega}}(t) \wedge \overline{OM}(t) + \overline{\Omega}(t) \wedge [\overline{\Omega}(t) \wedge \overline{OM}(t)] \right\} dm \end{aligned}$$

Dans le cas particulier où d'une part le point A de réduction des moments est confondu avec le centre de gravité, et où d'autre part l'origine O du repère coïncide également avec le centre de gravité du solide, cette expression se simplifie sous la forme (2.11).

Il convient de noter que si le point A devait être supposé fixe lors de la dérivation temporelle, rien n'empêche plus, lorsque celle-ci est effectuée, d'écrire l'équation de Newton en un point qui se déplace dans le temps.

$$(2.11) \quad \vec{M}_{I/G}(t) = \iiint_S \overline{GM}(t) \wedge \left\{ \dot{\vec{\Omega}}(t) \wedge \overline{GM}(t) + \vec{\Omega}(t) \wedge [\vec{\Omega}(t) \wedge \overline{GM}(t)] \right\} dm$$

Cette nouvelle formulation du moment des efforts d'inertie est susceptible d'être encore modifiée par application de la formule du double produit vectoriel :

$$(2.12) \quad \vec{\Omega}(t) \wedge [\vec{\Omega}(t) \wedge \overline{GM}(t)] = \vec{\Omega}(t) [\vec{\Omega}(t) \cdot \overline{GM}(t)] - \overline{GM}(t) [\vec{\Omega}(t) \cdot \vec{\Omega}(t)]$$

pour devenir :

$$(2.13) \quad \vec{M}_{I/G}(t) = \iiint_S \overline{GM}(t) \wedge \left\{ \dot{\vec{\Omega}}(t) \wedge \overline{GM}(t) + \vec{\Omega}(t) [\vec{\Omega}(t) \cdot \overline{GM}(t)] \right\} dm$$

En ré-appliquant cette formule du double produit vectoriel au premier terme de l'intégrale, puis en lui ajoutant le terme identiquement nul :

$$(2.14) \quad \vec{\Omega}(t) \wedge \iiint_S |GM(t)|^2 \vec{\Omega}(t) dm$$

il vient :

$$(2.15) \quad \begin{aligned} \vec{M}_{I/G} = & \iiint_S \left[|GM(t)|^2 \dot{\vec{\Omega}}(t) - \overline{GM}(t) (\dot{\vec{\Omega}}(t) \cdot \overline{GM}(t)) \right] dm \\ & + \vec{\Omega}(t) \wedge \iiint_S \left[|GM(t)|^2 \vec{\Omega}(t) - \overline{GM}(t) (\vec{\Omega}(t) \cdot \overline{GM}(t)) \right] dm \end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$(2.16) \quad [\vec{M}_{I/G}] = [I(t)][\dot{\vec{\Omega}}(t)] + [\Omega(t)][I(t)][\vec{\Omega}(t)]$$

expressions dans laquelle la matrice d'inertie $[I(t)]$ et la matrice du produit vectoriel $[\Omega(t)]$ sont définies respectivement par :

$$(2.17) \quad [I(t)] = \begin{bmatrix} \iiint_S (y^2 + z^2) dm & - \iiint_S xy dm & - \iiint_S xz dm \\ - \iiint_S xy dm & \iiint_S (x^2 + z^2) dm & - \iiint_S yz dm \\ - \iiint_S xz dm & - \iiint_S yz dm & \iiint_S (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix}$$

et :

$$(2.18) \quad [\Omega(t)] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

2.3. Efforts de pesanteur

Le torseur des efforts de pesanteur qui sollicitent un navire ou une structure marine, réduit par rapport à un point A quelconque, s'écrit :

$$(2.19) \quad \begin{aligned} \vec{F}_g &= -Mg \vec{k} \\ \vec{M}_{g/A} &= -Mg(\vec{AG} \wedge \vec{k}) \end{aligned}$$

Si le point A coïncide avec le centre de gravité G de la structure, le torseur des efforts de gravité se réduit au seul poids de celle-ci :

$$(2.20) \quad \begin{aligned} \vec{F}_g &= -Mg \vec{k} \\ \vec{M}_{g/G} &= 0 \end{aligned}$$

Dans la pratique, le torseur des efforts de gravité d'une structure flottante est combiné aux efforts de pression hydrostatique pour donner une somme nulle à l'équilibre statique.

2.4. Efforts de pression dus à l'eau

Le torseur des efforts de pression rassemble les forces hydrostatiques et les forces hydrodynamiques que les particules d'eau en mouvement exercent sur la carène.

Bien que ces efforts résultent du mouvement global du fluide, il est possible de les décomposer arbitrairement pour isoler certaines composantes particulières. Il s'agit là d'une approximation qui doit trouver sa justification, a priori, dans la connaissance théorique et expérimentale des écoulements, et a posteriori, dans la vérification pratique et expérimentale des résultats obtenus.

Ainsi, selon les problèmes, les efforts de pression dus à l'eau seront décomposés en :

- Les efforts hydrostatiques.
- Les efforts engendrés par un fluide parfait en écoulement irrotationnel.
- Les efforts de portance dus aux circulations en écoulement rotationnel.
- Les efforts de traînée dus à la viscosité.
- Les efforts engendrés par les courants.

2.5. Efforts de pression dus à l'air ou au vent

Les efforts dus à l'air concernent la résistance que l'air au repos oppose aux mouvements des navires et structures marines.

Les efforts dus au vent sont engendrés par le propre écoulement de l'air. Ils s'exercent même sur des navires et structures marines à l'arrêt et, en fonction de l'angle d'incidence du vent, ne s'opposent pas nécessairement à leurs mouvements.

Le vent se manifeste comme un phénomène aléatoire. Il est donc défini à partir d'un spectre d'énergie qui traduit les fluctuations de sa vitesse autour d'un profil moyen.

Comme la vitesse du vent fluctue dans le temps et dans l'espace, et comme ses fluctuations temporelles contiennent des composantes à basse fréquence de l'ordre de une à plusieurs minutes, les efforts dus au vent contribuent notablement aux efforts excitateurs à basse fréquence. Il est donc fondamental d'en tenir compte lors de l'étude de la réponse des navires et des structures à des efforts basse fréquence engendrés, en particulier, par des couplages entre diverses composantes périodiques d'une houle complexe.

La formulation des efforts dus au vent est globale. Elle consiste à exprimer, dans le repère relatif de chaque navire ou chaque structure, le torseur des efforts dus au vent sous la forme générale suivante :

$$(2.21) \quad \begin{aligned} \vec{F}_v(t) &= \frac{1}{2} \rho |V_R(G;t)|^n \sum_{p=1}^3 S_p C_p^{(n)}(i, \chi; Re) \vec{e}_p \\ \vec{M}_v(t) &= \frac{1}{2} \rho |V_R(G;t)|^n \sum_{p=1}^3 S_{p+3} L_{p+3} C_{p+3}^{(n)}(i, \chi; Re) \vec{e}_p \end{aligned}$$

où :

- ρ est la masse volumique de l'air (1.293 kg/m³ dans les conditions normales) ;
- S_p est la surface de référence arbitraire pour le mode p ;
- L_p est la longueur de référence arbitraire pour le mode p ;
- $\vec{V}_R(G;t)$ est la vitesse relative du centre de gravité G de la structure considérée ;

- n désigne la puissance de la vitesse utilisée pour le dépouillement des résultats à partir desquels ont été tirées les fonctions $C_p^{(n)}$ (généralement n est pris égal à 2) ;
- $C_p^{(n)}$ représente le "coefficient de traînée et/ou portance" suivant l'axe p (il ne s'agit réellement d'un coefficient sans dimension que pour n égal à 2) ;
- i désigne l'angle d'incidence formé entre le vecteur vitesse relative $\vec{V}_R(G;t)$ et sa projection sur le plan $(G; x_r, y_r)$;
- χ désigne l'angle de dérapage formé entre l'axe Gx_r et la projection du vecteur vitesse relative $\vec{V}_R(G;t)$ sur le plan $(G; x_r, y_r)$;
- Re est le nombre de Reynolds, réduit par rapport à la plus grande longueur L de la structure suivant ses axes, défini par :

$$Re = \frac{V_R(G;t)L}{\nu}$$

Dans ces expressions, les fonctions $C_p^{(n)}$ concernent chaque structure de manière globale. Elles peuvent être obtenues de trois manières différentes.

- A partir d'essais expérimentaux en soufflerie ou au bassin effectués sur le navire ou la structure étudié, ou sur une navire ou une structure de même type.
- A partir de résultats, fournis par la littérature, concernant un navire ou une structure réputé de même type.
- A partir de l'application des règles recommandées par un organisme de classification.

Il convient de souligner, ici, que dans les formules (2.21), les fonctions $C_p^{(n)}$ sont utilisées en régime transitoire, avec des vitesses fluctuantes, alors qu'elles sont le plus souvent mesurées expérimentalement ou évaluées par les règles en régime permanent !

Dans le cas où plusieurs navires ou structures évoluent les un à coté des autres, cette formulation ne permet naturellement de tenir compte des interactions et des effets de masque ou de solidification que si les fonctions $C_p^{(n)}$ ont été établies dans cette configuration ; elle ne permet toutefois pas de tenir compte de l'évolution de tels effets au cours du temps si les navires et les structures se déplacent les uns par rapport aux autres.

Les figures 2.5.1 montrent les fonctions $C_p^{(2)}$ obtenues en soufflerie pour un pétrolier de 100 000 tdw de 225 mètres de long possédant un château arrière.

2.6. Efforts de liaison

Les efforts de liaison comprennent toutes les forces extérieures appliquées au navire ou à la structure, en dehors de son poids et des efforts hydrodynamiques ou aérodynamiques déjà cités. Ils incluent entre autres :

- Les efforts dus aux actions des remorques et des amarres.
- Les efforts dus aux ancrages.
- Les efforts dus au positionnement dynamique.
- Les efforts de propulsion.

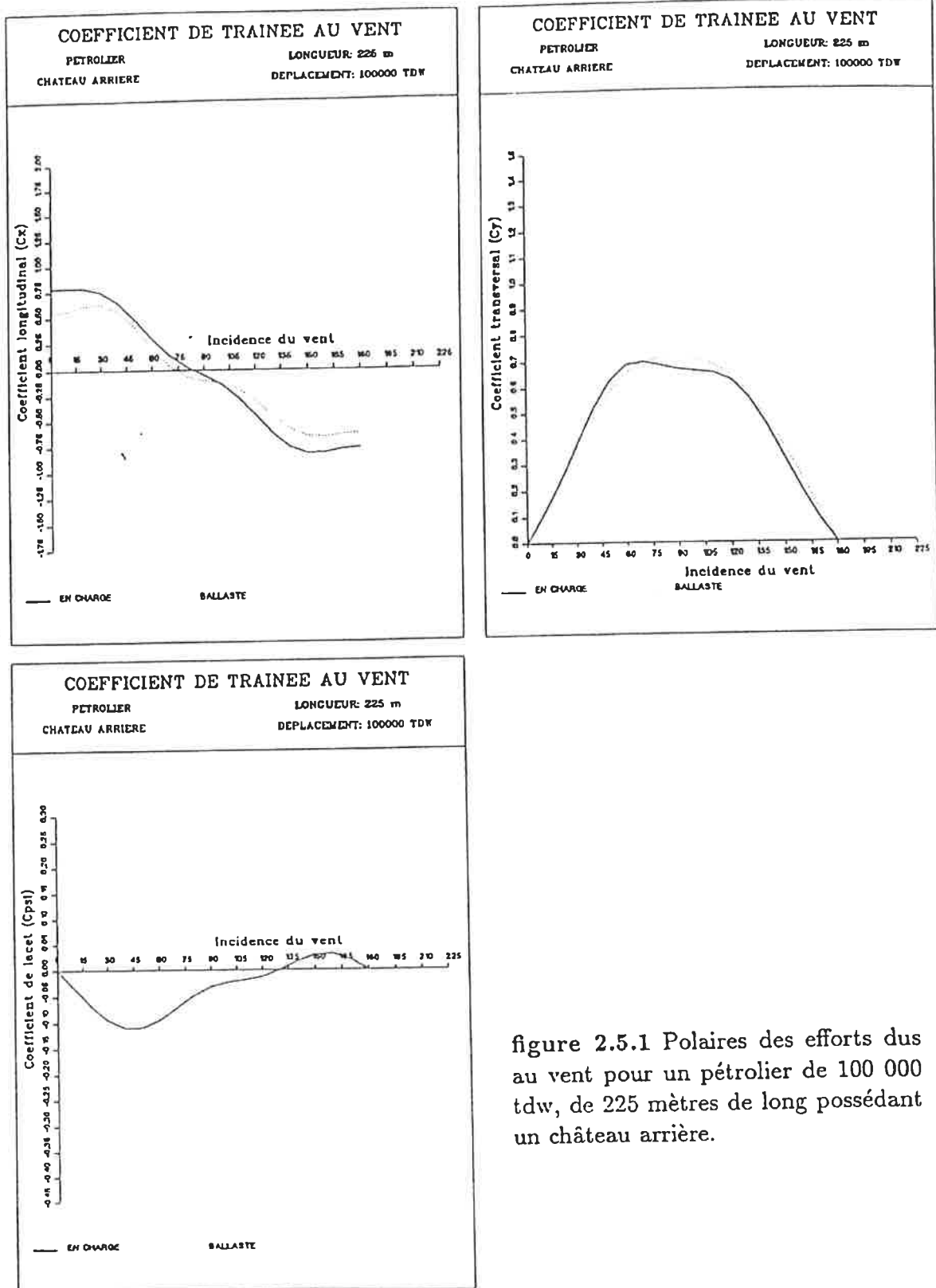


figure 2.5.1 Polaires des efforts dus au vent pour un pétrolier de 100 000 tdw, de 225 mètres de long possédant un château arrière.

3. Evaluation des efforts de pression

3.1. Les hypothèses de l'hydrodynamique navale théorique

3.1.1. Le problème général

Le comportement mécanique du fluide est régi par un problème aux limites qui comprend des équations indéfinies qui doivent être vérifiées en tout point du domaine fluide, et des conditions aux limites qui ne doivent être vérifiées que sur les frontières du domaine fluide.

Dans les cas qui intéressent le comportement à la mer des navires et des structures, il est légitime de considérer que l'eau est un fluide isovolume, c'est à dire incompressible et isotherme. Dans ces conditions, les équations indéfinies qui gouvernent les mouvements du fluide sont :

— l'équation de continuité qui traduit la conservation de la masse au sein du fluide. Elle s'écrit, pour un fluide isovolume, en absence de sources et de puits :

$$(3.1) \quad \operatorname{div} \vec{V}(M;t) = 0$$

— l'équation de Navier-Stokes qui traduit, pour toute particule fluide, l'égalité à chaque instant entre les efforts d'inertie et les efforts extérieurs qu'elle subit (poids, efforts de pression, efforts de frottement visqueux). Cette équation s'écrit, pour un fluide isovolume :

$$(3.2) \quad \frac{d}{dt} \vec{V}(M;t) = -g \vec{k} - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\operatorname{grad} p}(M;t) + \nu \Delta \vec{V}(M;t)$$

En ce qui concerne les conditions aux limites, elles traduisent que :

- Le fond de la mer est étanche (vitesse nulle).
- Les carènes des navires et structures marines sont étanches (vitesse relative nulle).
- La pression qui régné au dessus de la surface libre ne dépend ni du temps ni de l'espace : elle est constante, et cette constante peut être choisie identiquement nulle.
- En dehors de la houle incidente, l'infini ne fournit pas d'énergie.

La résolution de ce type de problème d'hydrodynamique navale dépasse largement le cadre de la dynamique des navires et de la tenue à la mer des structures.

3.1.2. Le problème linéarisé en fluide parfait

Dans l'état actuel des connaissances et des modèles de calcul, la résolution de ce problème dans le cas le plus général n'est pas encore possible. Pour pouvoir actuellement résoudre des problèmes pratiques d'hydrodynamique navale, il faut consentir des hypothèses simplificatrices, quitte à apporter des réserves et/ou des corrections aux résultats obtenus. Les cinq principales hypothèses à faire dans le cas général, sont que :

— **Le fluide est parfait.** Le fluide est supposé être non visqueux, quitte à tenir compte dans l'équation de Newton, de manière empirique, de forces de frottement ou traînées. Dans le cas d'un fluide parfait ($\nu = 0$), l'équation (3.2) prend alors la forme suivante connue sous le nom d'équation d'Euler :

$$(3.3) \quad \frac{d}{dt} \vec{V}(M;t) = -g \vec{k} - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} p(M;t)$$

— **Les écoulements sont irrotationnels.** Le problème est formulé dans le cadre de la théorie des écoulements à potentiel des vitesses. Le fluide est donc le siège d'écoulements exempts de toute vorticité.

Le fluide étant parfait, barotrope et en mouvement dans un champ de forces volumiques dérivant d'un potentiel scalaire (champ de pesanteur terrestre : $\vec{g} = -g \vec{k} = -\overrightarrow{\text{grad}} gz$), il existe à tout instant un potentiel des accélérations. S'il existe à un instant donné un potentiel des vitesses, le théorème de Lagrange en assurera la pérennité.

L'utilisation d'un modèle de champ incident irrotationnel, dont la fonction potentiel des vitesses absolues est désignée par $\Phi_I(M;t)$, justifiera l'hypothèse de l'écoulement à potentiel des vitesses.

Il résulte de ce qui précède que le champ des vitesses absolues qui sera désignée par $\vec{V}(M;t)$, dérive d'un potentiel scalaire harmonique $\Phi(M;t)$. Comme par ailleurs, la conservation de la masse impose à un fluide isovolume exempt de singularité en son sein, une divergence des vitesses absolues nulle, les équations indéfinies suivantes doivent être satisfaites en tout point du fluide :

$$(3.4) \quad \begin{cases} \vec{V}(M;t) = \overrightarrow{\text{grad}} \Phi(M;t) \\ \Delta \Phi(M;t) = 0 \end{cases}$$

En explicitant la dérivée particulaire au moyen de la formule d'Helmholtz :

$$(3.5) \quad \frac{d}{dt} \vec{V}(M;t) = \frac{\partial}{\partial t} \vec{V}(M;t) + \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} v^2(M;t) + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}(M;t) \wedge \vec{V}(M;t)$$

et en supposant que le rotationnel de la vitesse est identiquement nul, il vient :

$$(3.6) \quad \frac{\partial}{\partial t} \vec{V}(M;t) + \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} V^2(M;t) = -g \vec{k} - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} p(M;t)$$

comme la force de pesanteur dérive aussi d'un potentiel, l'équation d'Euler peut s'intégrer pour donner l'équation de Bernoulli-Lagrange :

$$(3.7) \quad \rho \frac{\partial}{\partial t} \Phi(M;t) + \frac{1}{2} \rho V^2(M;t) + \rho g z + p(M;t) = F(t)$$

expression dans laquelle $F(t)$ est la constante d'intégration de Lagrange qui peut être, sous certaines conditions, prise identiquement nulle, puisque la fonction potentiel des vitesses est définie à une constante près.

— **Les déplacements des carènes sont de faibles amplitudes.** Les amplitudes des oscillations des structures sont supposées être suffisamment faibles pour que la condition de glissement sur leurs parois puisse être affichée sur la position moyenne occupée par celles-ci au cours du temps dans le repère galiléen.

— **Les conditions de surface libre sont linéarisables.** L'amplitude et la cambrure de la houle incidente et des ondes de surface sont supposées être suffisamment faibles pour que les termes d'ordres supérieurs à l'unité soient négligeables (en particulier, les carrés des vitesses et des accélérations absolues des particules fluides à proximités de la surface libre) et qu'il soit possible d'afficher la condition de surface libre sur le plan horizontal qui coïncide avec l'interface liquide-atmosphère à l'équilibre statique.

Cette dernière hypothèse a pour conséquence que seul le modèle de houle d'amplitude infinitésimale d'Airy peut être retenu.

— **Les mouvements autorisés pour les carènes sont relativement simples :** mouvements de plate-forme autour d'un mouvement de translation rectiligne uniforme.

3.2. Torseur des efforts de pression

A cette étape, les différents problèmes aux limites qui gouvernent les écoulements sont supposés résolus. La fonction potentiel des vitesses $\Phi(M;t)$ est donc supposée connue à chaque instant et en tout point du domaine fluide.

La pression qui règne au sein d'un fluide parfait isovolume, est donnée par la formule de Bernoulli-Lagrange. Si la fonction potentiel des vitesses absolues est exprimée dans le repère absolu, cette relation s'écrit :

$$(3.8) \quad p(M;t) = -\rho \left[gz + \frac{V^2(M;t)}{2} + \frac{\partial\Phi(M;t)}{\partial t} + F(t) \right]$$

tandis que, dans le cas où la fonction potentiel des vitesses absolues est exprimée dans le repère relatif lié au navire ou à la structure i , elle devient :

$$(3.9) \quad p_i(M;t) = -\rho \left[gz + \frac{V^2(M;t)}{2} - \vec{V}(M;t) \cdot \vec{V}_{Ei}(M;t) + \frac{\partial\Phi(M;t)}{\partial t} + F(t) \right]$$

Il en résulte que le torseur des efforts de pression auquel donne accès la théorie du potentiel a pour expression générale pour chaque navire ou chaque structure :

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \vec{F}_i(t) &= \rho \iint_{C_i} \left[gz_a + \frac{V^2(M;t)}{2} - \vec{V}(M;t) \cdot \vec{V}_{Ei}(M;t) + \frac{\partial\Phi(M;t)}{\partial t} + F(t) \right] \vec{n}(M) dS \\ \vec{M}_i(t) &= \rho \iint_{C_i} \left[gz_a + \frac{V^2(M;t)}{2} - \vec{V}(M;t) \cdot \vec{V}_{Ei}(M;t) + \frac{\partial\Phi(M;t)}{\partial t} + F(t) \right] (\vec{G}_i \vec{M} \wedge \vec{n}(M)) dS \end{aligned}$$

Il convient de noter que dans le cas présent, la fonction potentiel des vitesses étant définie à une fonction du temps près, la fonction de Bernoulli-Lagrange $F(t)$ peut être choisie identiquement nulle, ce qui revient à considérer que la pression sur la surface libre au repos est nulle.

Le torseur des efforts de pression est, ici, la somme de quatre termes qui représentent respectivement des efforts de pression d'origine hydrostatique pour le premier, et des efforts de pression d'origine potentielle pour les trois autres.

Il est bien évident que les résultats précédents, obtenus à partir de l'approximation du fluide parfait, ne sont que partiellement représentatifs de la réalité physique ; ils ne prennent en compte ni les effets de portance, ni les effets d'origine visqueuse, ni les efforts dus au gouvernail ou aux organes de positionnement dynamique. Si de tels phénomènes doivent être pris en compte, il est indispensable de les compléter par d'autres approches, que ce soit par la mise en œuvre de programmes de calcul traitant des écoulements de fluides visqueux, par des essais expérimentaux sur modèle réduit libre ou captif, ou par l'expérimentation in-situ sur un prototype.

Ainsi, de manière générale, le torseur des efforts de pression peut être décomposé en plusieurs parties. Cette décomposition est étroitement liée à la physique prise en compte lors de l'analyse dimensionnelle du problème, ainsi qu'aux hypothèses faites quant aux interactions et couplages entre les différents

phénomènes qui y contribuent, et au niveau d'approximation consenti lors de sa résolution.

Dans le cas présent, il sera décomposé suivant le schéma suivant, classique en hydrodynamique marine :

- le torseur des efforts d'origine hydrostatique $\mathcal{T}_{s,i}(\vec{F}_{s,i}, \vec{M}_{s,i})$;
- le torseur des efforts d'origine potentielle $\mathcal{T}_{\phi,i}(\vec{F}_{\phi,i}, \vec{M}_{\phi,i})$.

Ces différents torseurs d'efforts sont exprimés et analysés dans les paragraphes suivants. Pour alléger l'écriture, l'indice i du navire ou de la structure sera omis tant qu'il n'y aura pas de confusion possible.

3.3. Torseur des efforts hydrostatiques

Il convient naturellement de commencer par exprimer la contribution des efforts de pression d'origine hydrostatique qui ne dépendent, dans le cadre d'une théorie entièrement linéarisée que de la position occupée dans l'espace par la carène à l'instant t .

3.3.1. Expression du torseur pour des mouvements quelconques

En absence de mouvement du navire ou de la structure, et de houle incidente, le fluide est au repos. Les équations de Navier-Stokes ou d'Euler deviennent alors :

$$(3.11) \quad -g \vec{k} - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} p(M;t) = 0$$

et la pression s'écrit :

$$(3.12) \quad p(M) = -\rho g z$$

Le torseur des efforts hydrostatiques, noté $\mathcal{T}_s(\vec{F}_s, \vec{M}_s)$, a donc pour expression :

$$(3.13) \quad \begin{aligned} \vec{F}_s &= \rho g \iint_C z \vec{n}(M) dS \\ \vec{M}_s &= \rho g \iint_C z (\vec{GM} \wedge \vec{n}(M)) dS \end{aligned}$$

où z désigne la cote du point M comptée au dessus du plan de référence constitué par la surface libre au repos qui est le plan $(O_a; x_a, y_a)$ du repère absolu.

Puisque z est nul sur la surface libre, il est possible d'exprimer simplement le torseur des efforts d'origine hydrostatique par application de la formule de gradient à la résultante, et de la formule du rotationnel au moment résultant. Il vient alors :

$$(3.14) \quad \begin{aligned} \vec{F}_s &= \rho g \iiint_W dW \vec{k} = \rho g W \vec{k} \\ \vec{M}_s &= \rho g \iiint_W \overline{GM} dW \wedge \vec{k} = \rho g W (\overline{GQ} \wedge \vec{k}) \end{aligned}$$

expression dans laquelle Q désigne le centre de carène, W le volume immergé et \vec{k} le vecteur unitaire vertical ascendant.

Par ailleurs, afin de mettre en évidence les caractéristiques de l'équilibre statique, il est d'usage d'associer au torseur des efforts de pression d'origine hydrostatique, le torseur $\mathcal{T}_{g/A}(\vec{F}_g, \vec{M}_{g/A})$ des efforts de gravité (réduit par rapport à un point A quelconque). Ainsi, le torseur total statique $\mathcal{T}_{ts}(\vec{F}_{ts}, \vec{M}_{ts})$, une fois réduit par rapport au centre de gravité de la structure, se met sous la forme :

$$(3.15) \quad \begin{aligned} \vec{F}_{ts} &= g(\rho W - M) \vec{k} \\ \vec{M}_{ts} &= \rho g W (\overline{GQ} \wedge \vec{k}) \end{aligned}$$

Cette formulation est valable pour des déplacements quelconques. Si la carène est entièrement immergée le calcul est achevé dans la mesure où les différents termes qui interviennent sont constants. Ce n'est évidemment pas le cas si la carène intercepte la surface libre, le calcul peut alors être poursuivi pour exprimer ce torseur total statique en tenant compte de l'hypothèse des petits déplacements de la carène.

3.3.2. Expression du torseur pour des petits mouvements

Dans ce qui suit, les grandeurs relatives à l'état statique seront indicées par 0, et les grandeurs relatives à l'état déplacé ne seront pas indicées.

Soit Q'_0 la position, liée au flotteur, du centre de carène Q_0 , et $\delta W = W - W_0$ la variation de volume immergé. Le torseur (3.15) s'écrit encore :

$$(3.16) \quad \begin{aligned} \vec{F}_{ts} &= \rho g \delta W \vec{k} \\ \vec{M}_{ts} &= \rho g W_0 (\overline{GQ'_0} \wedge \vec{k}) + \rho g \iiint_{\delta W} \overline{GM} dW \wedge \vec{k} \end{aligned}$$

Soit $z = g(x, y)$ l'équation de la carène dans le repère relatif qui coïncide au repos avec le repère absolu. Cette relation n'a évidemment pas de d'expression explicite dans le cas générale, ni toujours de détermination unique, mais le principe du raisonnement reste valide. En désignant par SF la surface de flottaison, le volume immergé s'écrit à l'équilibre statique :

$$(3.17) \quad W_0 = \iiint_{W_0} dW = \iint_{SF_0} \left[\int_{g(x,y)}^0 dz \right] dx dy = - \iint_{SF_0} g(x, y) dx dy$$

Dans une position déplacée infiniment voisine de la position d'équilibre statique, l'équation de la surface de flottaison SF peut s'écrire, dans le repère lié à la carène, en fonction des petits déplacements généralisés :

$$(3.18) \quad z = -\eta_{r3} - y\eta_{r4} + x\eta_{r5}$$

d'où, en notant SF'_0 la projection de SF sur le plan contenant SF_0 , et en remarquant que la surface $SF_0 - SF'_0$ est, du fait de l'hypothèse des petits mouvements, du deuxième ordre devant SF_0 :

$$(3.19) \quad W = - \iint_{SF_0} [\eta_{r3} + y\eta_{r4} - x\eta_{r5}] dx dy - \iint_{SF_0} g(x, y) dx dy$$

et la variation de volume immergé s'écrit finalement :

$$(3.20) \quad \delta W = W - W_0 = -\eta_{r3} SF_0 - \eta_{r4} \iint_{SF_0} y dx dy + \eta_{r5} \iint_{SF_0} x dx dy$$

Il reste désormais à exprimer l'intégrale qui intervient dans (3.16) :

$$(3.21) \quad \iiint_{\delta W} \overline{GM} dW = \iint_{SF_0} \left[\int_0^{-\eta_{r3} - y\eta_{r4} + x\eta_{r5}} \overline{GM} dz \right] dx dy$$

ce qui s'écrit en ne retenant que les termes du premier ordre

$$(3.22) \quad \iiint_{\delta W} \overline{GM} dW = \left[\eta_{r3} \iint_{SF_0} x dx dy + \eta_{r4} \iint_{SF_0} xy dx dy - \eta_{r5} \iint_{SF_0} x^2 dx dy \right] \vec{i} + \left[\eta_{r3} \iint_{SF_0} y dx dy + \eta_{r4} \iint_{SF_0} y^2 dx dy - \eta_{r5} \iint_{SF_0} xy dx dy \right] \vec{j}$$

L'hypothèse des oscillations de faible amplitude permet enfin de confondre les vecteurs de base du repère mobile et ceux du repère fixe et d'écrire :

$$(3.23) \quad \overline{GQ_0'} \simeq \overline{GQ_0} + \overline{\Theta} \wedge \overline{GQ_0} \quad \text{avec} \quad \overline{GQ_0} \simeq \overline{GQ_0} \mathbf{k}$$

ce qui conduit finalement à l'expression matricielle des efforts d'origine hydrostatiques :

$$(3.24) \quad [\overline{F}_{1s}(t)] = -[H_S] [\overline{\eta}'(t)]$$

avec :

$$(3.25) \quad [H_S] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho g S F_0 & \rho g \iint_{S F_0} y dx dy & -\rho g \iint_{S F_0} x dx dy & 0 \\ 0 & 0 & \rho g \iint_{S F_0} y dx dy & \rho g \left[\mathcal{W}_0 \overline{GQ_0} + \iint_{S F_0} y^2 dx dy \right] & -\rho g \iint_{S F_0} x y dx dy & 0 \\ 0 & 0 & -\rho g \iint_{S F_0} x dx dy & -\rho g \iint_{S F_0} x y dx dy & \rho g \left[\mathcal{W}_0 \overline{GQ_0} + \iint_{S F_0} x^2 dx dy \right] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.4. Torseur des efforts hydrodynamiques d'origine potentielle

Le torseur des efforts de pression hydrodynamique d'origine potentielle $\mathcal{T}_\phi(\overline{F}_\phi, \overline{M}_\phi)$, qui correspond aux trois derniers termes de l'équation (3.10) – exception faite, bien sûr, de la fonction $F(t)$ – a pour expression générale :

$$(3.26) \quad \begin{aligned} \overline{F}_\phi(t) &= \rho \iint_C \left[\frac{V^2(M;t)}{2} - \overline{V}(M;t) \cdot \overline{V}_E(M;t) + \frac{\partial \Phi(M;t)}{\partial t} \right] \overline{\pi}(M) dS \\ \overline{M}_\phi(t) &= \rho \iint_C \left[\frac{V^2(M;t)}{2} - \overline{V}(M;t) \cdot \overline{V}_E(M;t) + \frac{\partial \Phi(M;t)}{\partial t} \right] (\overline{GM} \wedge \overline{\pi}(M)) dS \end{aligned}$$

Il est intéressant de noter ici, que ce torseur comporte des termes de deux nature différentes, qu'il convient de distinguer.

D'abord le torseur $\mathcal{T}_{\phi\gamma}(\overline{F}_{\phi\gamma}, \overline{M}_{\phi\gamma})$ des termes du type "instationnaire" qui traduisent des actions qui ne se manifestent que dans le cas où le mouvement du navire ou de la structure n'est pas permanent dans le repère relatif. Ces termes

sont caractérisés par la dérivée temporelle de la fonction potentiel des vitesses absolues $\Phi(M;t)$:

$$(3.27) \quad \begin{aligned} \vec{F}_{\phi v}(t) &= \rho \iint_C \frac{\partial \Phi(M;t)}{\partial t} \vec{n}(M) dS \\ \vec{M}_{\phi v}(t) &= \rho \iint_C \frac{\partial \Phi(M;t)}{\partial t} (\vec{GM} \wedge \vec{n}(M)) dS \end{aligned}$$

Ensuite le torseur $\mathcal{T}_{\phi v}(\vec{F}_{\phi v}, \vec{M}_{\phi v})$ des termes du type "stationnaire" qui traduisent des actions qui se manifestent dans tous les types d'écoulements :

$$(3.28) \quad \begin{aligned} \vec{F}_{\phi v}(t) &= \rho \iint_C \left[\frac{V^2(M;t)}{2} - \vec{V}(M;t) \cdot \vec{V}_E(M;t) \right] \vec{n}(M) dS \\ \vec{M}_{\phi v}(t) &= \rho \iint_C \left[\frac{V^2(M;t)}{2} - \vec{V}(M;t) \cdot \vec{V}_E(M;t) \right] (\vec{GM} \wedge \vec{n}(M)) dS \end{aligned}$$

L'intégrand du premier torseur est exclusivement du premier ordre par rapport à l'amplitude des déplacements ; ce torseur est donc appelé torseur des efforts hydrodynamiques du premier ordre. L'intégrand du second torseur est exclusivement du deuxième ordre par rapport à ces mêmes amplitudes : ce torseur est donc appelé torseur des efforts hydrodynamiques du second ordre.

Lorsque le mouvement du navire ou de la structure est permanent, seul le second torseur existe. C'est le cas pour les problèmes suivants :

- la résistance à la marche,
- les navires et structures soumises à l'action d'un vent et/ou d'un courant constant.

A noter qu'il est nul en fluide parfait illimité pour une carène en translation rectiligne uniforme (paradoxe de d'Alembert).

Lorsque le mouvement du navire ou de la structure est transitoire ou oscillatoire autour d'une position donnée, les deux torseurs doivent être pris en compte. C'est le cas pour les problèmes suivants :

- les évolutions et la manœuvrabilité,
- la tenue à la mer.

Toutefois, en ce qui concerne la tenue à la mer, compte tenu de l'hypothèse des petits mouvements, le second torseur sera négligé pour le calcul des amplitudes des mouvements de plate-forme de la carène soumise à l'action de la houle, mais il sera pris en compte pour le calcul des efforts de dérive sur houle et de dérive lente.

L'analyse détaillée de ces différents torseurs n'est réellement nécessaire que dans le cadre de l'étude de la tenue à la mer. Toutefois, il est utile de faire, ici, à leurs sujets quelques remarques d'ordre général.

3.4.1. Forme générale du torseur des efforts du premier ordre

Le problème aux limites qui gouverne les mouvement du navire ou de la structure, contient que des équations linéaires (ou linéarisées). Si de plus elles sont, soit indépendantes du temps, soit exemptes de dérivations temporelles, la fonction potentiel des vitesses peut s'écrire sous une forme à variables spatiales et temporelle séparées :

$$(3.29) \quad \Phi(M; t) = \sum_{i=1,6} \phi_i(M) \cdot C_i(t)$$

expression dans laquelle $\phi_i(M)$ désigne la fonction potentiel des vitesses pour une vitesse $C_i(t)$ unitaire dans le mode i .

C'est le cas, en particulier, d'un engin sous-marin qui évolue assez loin de la surface libre, ou lorsqu'un navire de surface évolue de manière suffisamment lente.

Le torseur des efforts "instationnaires" peut alors s'écrire :

$$(3.30) \quad \begin{aligned} \vec{F}_{\phi\gamma}(t) &= \rho \iint_C \frac{\partial \Phi(M; t)}{\partial t} \vec{n}(M) dS = \sum_{i=1,6} \rho \iint_C \phi_i(M) \vec{n}(M) dS \frac{dC_i(t)}{dt} \\ \vec{M}_{\phi\gamma}(t) &= \rho \iint_C \frac{\partial \Phi(M; t)}{\partial t} (\vec{GM} \wedge \vec{n}(M)) dS = \sum_{i=1,6} \rho \iint_C \phi_i(M) (\vec{GM} \wedge \vec{n}(M)) dS \frac{dC_i(t)}{dt} \end{aligned}$$

Ce torseur peut donc se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$(3.31) \quad [\vec{F}_{\phi\gamma i}(t)] = -[\mathcal{M}_{ij}] \left[\frac{dC_j(t)}{dt} \right]$$

où la matrice $[\mathcal{M}_{ij}]$, qui ne dépend que de la carène, a la dimension d'une masse ou d'une inertie. Elle est appelée "matrice des masses d'eau ajoutée".

Sous les hypothèses faites, ci-dessus, les efforts hydrodynamiques peuvent donc se mettre sous la forme du produit de termes qui ont la dimension d'une masse par l'accélération de la carène.

Une forme analogue, mais un peu plus compliquée, peut être établie dans le cas d'un mouvement oscillatoire à une période donnée, c'est à dire dans le cadre de la tenue à la mer.

3.4.2. Forme générale du torseur des efforts du second ordre

Le torseur des efforts hydrodynamiques correspondant au régime de translation uniforme $\mathcal{T}_{vu}(\vec{F}_{vu}, \vec{M}_{vu})$, peut être déterminé expérimentalement. Il se présente classiquement sous la forme suivante :

$$(3.32) \quad \begin{aligned} \vec{F}_{vu} &= \frac{1}{2} \rho |C|^2 \sum_{p=1}^3 S_p C_p(i, \chi; Re) \vec{e}_p \\ \vec{M}_{vu} &= \frac{1}{2} \rho |C|^2 \sum_{p=1}^3 S_p L_p C_{p+3}(i, \chi; Re) \vec{e}_p \end{aligned}$$

Expressions dans lesquelles :

- i désigne l'angle d'incidence formé entre la projection du vecteur vitesse $\vec{C}(t)$ sur le plan $(G; x_r, y_r)$ et le vecteur $\vec{C}(t)$ lui-même ;
- χ désigne l'angle de dérapage formé entre l'axe Gz_r et la projection du vecteur vitesse $\vec{C}(t)$ sur le plan $(G; x_r, y_r)$;
- S_p une surface de référence arbitraire pour le mode p ;
- L_p une longueur de référence arbitraire pour le mode p .

Il convient de souligner, ici, que les fonctions C_p qui interviennent dans les expressions (3.32), sont mesurées expérimentalement en régime permanent, mais qu'elles sont souvent utilisées lorsque i , χ et \vec{C} sont des fonctions du temps !

3.5. Poussée hydrodynamique conventionnelle

La notion de poussée hydrodynamique conventionnelle est utilisée pour faciliter l'étude des mouvement de plate-forme des navires et structures à la mer, et notamment dans le cas du roulis.

Le torseur de l'ensemble des efforts de pression (hydrostatiques et hydrodynamiques) s'écrit, en considérant la normale extérieure \vec{n} à la carène :

$$(3.33) \quad \begin{aligned} \vec{F}_p &= - \iint_C p(M; t) \vec{n}(M) dS \\ \vec{M}_p &= - \iint_C p(M; t) (\vec{GM} \wedge \vec{n}(M)) dS \end{aligned}$$

La pression étant nulle sur la surface libre, le torseur des efforts de pression s'écrit encore :

$$(3.34) \quad \begin{aligned} \vec{F}_p &= - \iint_{C \cup SF} p(M;t) \vec{n}(M) dS \\ \vec{M}_p &= - \iint_{C \cup SF} p(M;t) (\overline{GM} \wedge \vec{n}(M)) dS \end{aligned}$$

Comme $C \cup SF$ est une surface fermée, il est possible de transformer les intégrales de surface en intégrales de volume, par application de la formule de gradient à la résultante, et de la formule du rotationnel au moment résultant. Ceci est, bien sûr, subordonné à la possibilité de définir les champs de vitesse et de pression à l'intérieur de la carène. Il vient alors :

$$(3.35) \quad \begin{aligned} \vec{F}_p &= - \iiint_W \overline{\text{grad}} p(M;t) dW \\ \vec{M}_p &= + \iiint_W \overline{\text{rot}} p(M;t) \overline{GM} dW \\ &= + \iiint_W \overline{\text{grad}} p(M;t) \wedge \overline{GM} dW \end{aligned}$$

En faisant l'hypothèse que le fluide est parfait (non visqueux), $\overline{\text{grad}} p(M;t)$ peut être exprimé à partir de l'équation d'Euler (3.3) :

$$(3.36) \quad \begin{aligned} \vec{F}_p &= +\rho \iiint_W \left[\frac{d}{dt} \vec{V}(M;t) + g \vec{k} \right] dW \\ \vec{M}_p &= -\rho \iiint_W \left[\frac{d}{dt} \vec{V}(M;t) + g \vec{k} \right] \wedge \overline{GM} dW \end{aligned}$$

ce qui s'écrit encore :

$$(3.37) \quad \begin{aligned} \vec{F}_p &= +\rho \iiint_W \frac{d}{dt} \vec{V}(M;t) dW + \rho g W \vec{k} \\ \vec{M}_p &= -\rho \iiint_W \frac{d}{dt} \vec{V}(M;t) \wedge \overline{GM} dW \end{aligned}$$

Si la dérivée particulière de la vitesse varie suffisamment peu sur le volume occupé à chaque instant par la carène, il est possible d'évaluer les intégrales de ce torseur en utilisant la formule de la moyenne. Cela suppose que les dimensions de la carène sont suffisamment faibles par rapport à la longueur caractéristique de l'écoulement (longueur d'onde de la houle λ). Il vient alors en désignant toujours par Q le centre de carène :

$$(3.38) \quad \begin{aligned} \vec{F}_p &= +\rho W \frac{d}{dt} \vec{V}(Q;t) + \rho g W \vec{k} \\ \vec{M}_p &= -\rho W \frac{d}{dt} \vec{V}(Q;t) \wedge \vec{GQ} \end{aligned}$$

La vitesse $\vec{V}(Q;t)$ est égale à la somme de la vitesse et de la pression incidente qui règnerait dans le volume W en l'absence de la carène $\vec{V}_I(Q;t)$ et de la vitesse de perturbation $\vec{V}_P(Q;t)$. De même, la pression $p(Q;t)$ est égale à la somme de la pression incidente qui règnerait dans le volume W en l'absence de la carène $p_I(Q;t)$ et de la pression de perturbation $p_P(Q;t)$.

Il faut garder présent à l'esprit que la dérivation particulaire n'est pas une opération linéaire en fonction de la vitesse. Comme les champs de vitesse et de pression incidents vérifient les équations du problème aux limites homogène, cela implique que les champs perturbés ne les vérifient pas !

Le torseur des efforts incluant le seul effet dynamique du champ incident non perturbé est appelé torseur hydrodynamique conventionnel, et la force résultante est la poussée hydrodynamique conventionnelle :

$$(3.39) \quad \begin{aligned} \vec{F}_c &= +\rho W \frac{d}{dt} \vec{V}_I(Q;t) + \rho g W \vec{k} = -\rho W (\vec{g} - \vec{\gamma}_I(Q;t)) \\ \vec{M}_c &= -\rho W \frac{d}{dt} \vec{V}_I(Q;t) \wedge \vec{GQ} = -\rho W \vec{\gamma}_I(Q;t) \wedge \vec{GQ} \end{aligned}$$

où $\vec{\gamma}_I(Q;t)$ désigne l'accélération du point Q entraîné dans le mouvement de l'écoulement.

Ainsi définie, le torseur conventionnel correspond à la somme de deux termes qui sont la forme asymptotique du torseur des efforts de Froude-Krilov et le torseur des efforts hydrostatiques.

Le torseur des efforts de perturbation s'écrit :

$$(3.40) \quad \begin{aligned} \vec{F}_p &= +\rho W \frac{d}{dt} \vec{V}_P(Q;t) = +\rho W \vec{\gamma}_P(Q;t) \\ \vec{M}_p &= -\rho W \frac{d}{dt} \vec{V}_P(Q;t) \wedge \vec{GQ} = -\rho W \vec{\gamma}_P(Q;t) \wedge \vec{GQ} \end{aligned}$$

où $\vec{\gamma}_P(Q;t)$ désigne l'accélération de perturbation du point Q entraîné dans le mouvement de l'écoulement. Ce torseur tend asymptotiquement vers une valeur limite nulle quand la longueur d'onde devient très grande devant la dimension caractéristique de la carène.

Ainsi, le torseur des efforts conventionnels tend asymptotiquement vers l'ensemble des efforts de pression hydrostatiques et hydrodynamiques quand la longueur d'onde devient très grande devant la dimension caractéristique de la carène.

4. Les équations du mouvement du navire

4.1. Les équations générales

Une fois les efforts qui agissent sur le navire ou la structure inventoriés et définis, il est possible d'écrire les équations qui régissent son mouvement le plus général. Il suffit pour cela d'appliquer le théorème de Newton qui stipule qu'il y a, à chaque instant, équilibre entre le torseur des efforts d'inertie propre au navire ou à la structure, et les efforts extérieurs qui lui sont appliqués. Les efforts extérieurs étant :

- les efforts de pesanteur $\vec{F}_p(t), \vec{M}_{p/G}(t)$,
 - les efforts hydrostatiques $\vec{F}_s(t), \vec{M}_{s/G}(t)$,
 - les efforts hydrodynamiques complets $\vec{F}(t), \vec{M}_{/G}(t)$, qui se décomposent en :
 - les efforts hydrodynamiques du premier ordre "instationnaires" $\vec{F}_{\phi\gamma}(t), \vec{M}_{\phi\gamma/G}(t)$,
 - les efforts hydrodynamiques du second ordre "stationnaires" $\vec{F}_{\phi\nu}(t), \vec{M}_{\phi\nu/G}(t)$,
 - les autres efforts hydrodynamiques complémentaires $\vec{F}_h(t), \vec{M}_{h/G}(t)$,
 - les efforts dus au vent $\vec{F}_v(t), \vec{M}_{v/G}(t)$,
 - les efforts de liaison $\vec{F}_l(t), \vec{M}_{l/G}(t)$,
- d'où :

$$(3.41) \quad \begin{aligned} \vec{F}_I(t) &= \vec{F}_p(t) + \vec{F}_s(t) + \vec{F}_{\phi\gamma}(t) + \vec{F}_{\phi\nu}(t) + \vec{F}_h(t) + \vec{F}_v(t) + \vec{F}_l(t) \\ \vec{M}_{I/G}(t) &= \vec{M}_{p/G}(t) + \vec{M}_{s/G}(t) + \vec{M}_{\phi\gamma/G}(t) + \vec{M}_{\phi\nu/G}(t) + \vec{M}_{h/G}(t) + \vec{M}_{v/G}(t) + \vec{M}_{l/G}(t) \end{aligned}$$

Ou encore, dans le cas où il est préférable de faire apparaître la force hydrodynamique conventionnelle, les efforts hydrodynamiques de perturbation étant alors inclus dans les efforts hydrodynamiques complémentaires :

$$(3.42) \quad \begin{aligned} \vec{F}_I(t) &= \vec{F}_p(t) + \vec{F}_c(t) + \vec{F}_h(t) + \vec{F}_v(t) + \vec{F}_l(t) \\ \vec{M}_{I/G}(t) &= \vec{M}_{p/G}(t) + \vec{M}_{c/G}(t) + \vec{M}_{h/G}(t) + \vec{M}_{v/G}(t) + \vec{M}_{l/G}(t) \end{aligned}$$

Ces deux équations vectorielles sont ensuite projetées sur les axes de coordonnées d'un référentiel, ce qui fournit un système non-linéaire de six équations à six inconnues couplées. La résolution de ce système permet d'obtenir les six degrés de liberté en fonction du temps.

La résolution de ce système dans le cas général reste compliquée pour deux raisons :

- Tous les efforts ne peuvent pas être explicités sans approximations, et leur évaluation nécessite soit de résoudre des problèmes aux limites par des méthodes numériques, soit d'effectuer des essais sur modèle réduit.

— Le système d'équations lui-même est non-linéaire. Dans la pratique, il est donc nécessaire soit de recourir à une résolution numérique itérative du système, soit de le linéariser, et éventuellement de découpler les différentes équations, pour le résoudre analytiquement par rapport à certains degrés de liberté.

Il est toutefois utile d'analyser ce que deviennent ces équations dans certains cas particuliers qui sont :

- la translation rectiligne en eau calme,
- les évolutions du navire en eau calme,
- le mouvement du centre de gravité du navire stoppé sur houle longue,
- le roulis du navire stoppé sur houle longue,
- le pilonnement et le tangage du navire stoppé sur houle longue.

4.2. La translation rectiligne en eau calme

Dans le cas de la translation rectiligne en eau calme, les équations se simplifient pour donner :

$$(3.43) \quad M \frac{d^2 x_G}{dt^2} \vec{i} = g(\rho W - M) \vec{k} - \mathcal{M}_{11} \frac{d^2 x_G}{dt^2} \vec{i} - R \vec{i} - (S' - S'') \vec{k} + T \vec{i} - R_v \vec{i}$$

$$\vec{M}_{I/G}(t) = \vec{0} = \rho g W (\vec{GQ} \wedge \vec{k}) - R \vec{GH} \wedge \vec{i} - S' \vec{GH} \wedge \vec{k} + T \vec{GP} \wedge \vec{i} + S'' \vec{GP} \wedge \vec{k} + \vec{M}_{v/G}$$

expression dans laquelle :

— la composante horizontale de $\vec{F}_{\phi_v}(t)$ se réduit à la résistance à la marche $-R \vec{i}$ et sa composante verticale à la force de surenfacement $-S' \vec{k}$; cette force étant appliquée au point H .

— la composante horizontale de \vec{F}_h se réduit à la poussée horizontale de l'hélice (ou à la force de remorquage) $T \vec{i}$ et sa composante verticale à $+S'' \vec{k}$; cette force étant appliquée au point P qui est la butée de palier.

Ainsi, la projection sur l'axe des abscisses conduit à :

$$(3.44) \quad [M + \mathcal{M}_{11}] \frac{d^2 x_G}{dt^2} = -R + T - R_v$$

de même la projection verticale conduit à :

$$(3.45) \quad g(\rho W - M) - (S' - S'') \vec{k} = 0$$

et la projection de moment sur l'axe des ordonnées :

$$(3.46) \quad -\rho g W(x_Q - x_g) - R(z_H - z_G) + S'(x_H - x_G) + T(z_P - z_G) - S''(x_P - x_G) + M_{v/G}$$

La première équation donne la loi du mouvement rectiligne du centre de gravité G en fonction du temps. A vitesse constante, elle se réduit à : $-R + T - R_v$.

La seconde équation la position verticale du centre de gravité dans l'équilibre dynamique lié aux composantes verticales de la poussée de l'hélice et de la force hydrodynamique qui sont compensées par une variation de la force hydrostatique.

La troisième équation donne l'assiette du navire en route.

4.3. Evolution du navire en eau calme

Lorsque le navire se déplace en eau calme sans autre mouvement de plateforme qu'une rotation γ autour de l'axe Gz_b . Le vecteur rotation est égal à :

$$(3.47) \quad \vec{\omega} = \frac{d\gamma}{dt} \vec{k}$$

le centre de gravité suit une trajectoire notée (G) dans le plan horizontal $Ox_g y_g$. La vitesse $\vec{V}(G;t)$ du point G fait un angle de dérive δ avec l'axe Gx_r . $\vec{V}(G;t)$ est tangent à la trajectoire (G) en G .

Soient respectivement \vec{t} et \vec{n} le vecteur tangent et le vecteur normal à la trajectoire (G) à l'instant t orientés dans le sens direct. Puisque δ n'est pas nul, l'écoulement relatif de l'eau autour de la carène n'est pas symétrique par rapport au plan longitudinal. Il en résulte que la composante horizontale des efforts hydrodynamiques complets qui s'exercent sur la carène se réduisent à :

$$(3.48) \quad \vec{F}_h = -R \vec{t} + N \vec{n}$$

tandis que le moment des efforts hydrodynamiques complets a une composante verticale $\vec{M}_{z/G}$.

Pour réaliser ce mouvement, le navire doit être soumis à un système de forces extérieures :

— la poussée de l'hélice supposée horizontale (ou la force de remorquage) T et éventuellement la force due au vent :

$$(3.49) \quad \vec{F}_h = +T\vec{i} + \vec{F}_v$$

— le moment vertical $U\vec{k}$ qui provient de l'action du vent et éventuellement de celle du gouvernail. Quand le couple provient de l'action du gouvernail, son apparition s'accompagne d'une force hydrodynamique \vec{f} oblique par rapport à Gz_r .

Le mouvement est alors régi par les équations suivantes :

$$(3.50) \quad \begin{aligned} M\vec{\gamma}_G &= \vec{F}_h + \vec{F}_v + \vec{f} \\ I_z \frac{d^2\gamma}{dt^2} &= M_{z/G} + U \end{aligned}$$

Ces équations gouvernent deux mouvements particuliers qui sont la marche oblique, ou translation sous incidence, et la giration.

4.4. Mouvement du centre de gravité du navire stoppé sur houle longue

En supposant que le navire est stoppé sur une houle longue et qu'il ne subit aucune force extérieure et qu'il n'est pas soumis à l'action du vent.

Alors, l'équation (3.42) conduit à écrire :

$$(3.51) \quad M(\vec{g} - \vec{\gamma}_G) - \rho W(\vec{g} - \vec{\gamma}_Q) = 0$$

Comme à l'équilibre $M = \rho W$, il en résulte qu'à chaque instant :

$$(3.52) \quad \vec{\gamma}_G = \vec{\gamma}_Q$$

Le vecteur $(\vec{g} - \vec{\gamma}_G)$ représente l'accélération de la pesanteur apparente en G et sa direction est la verticale apparente en G .

5. Les moyens d'étude

Les moyens d'étude du comportement des navires et des structures marines sont essentiellement au nombre de trois :

- L'expérimentation au réel,
- Les essais sur modèles réduits,
- La théorie et les modèles numériques.

Ils ne sont pas nécessairement concurrents, et l'efficacité des études peut être grandement accrue lorsqu'ils sont utilisés conjointement de manière judicieuse.

5.1. L'expérimentation au réel

Il est évident que l'idée de pouvoir procéder à la réalisation d'essais au réel sur le prototype est, sur le plan intellectuel, particulièrement séduisante et intéressante.

Toutefois, ces essais in-situ sont toujours très délicats à mettre en œuvre et à exploiter, dans la mesure où les conditions expérimentales ne peuvent pas toutes être maîtrisées (houle, vent, courant, ...). Il n'est pas, non plus, concevable d'attendre que des conditions extrêmes se produisent pour réaliser de tels essais.

Par ailleurs, les essais au réel sont toujours longs et très coûteux à réaliser.

5.2. Les essais sur modèles réduits

Les essais en laboratoire sur modèles réduits permettent, théoriquement, de maîtriser parfaitement les conditions environnementales, et sont, de toute évidence moins onéreux.

Ce procédé expérimental présente toutefois des inconvénients dont les deux principaux sont :

- Les effets d'échelle qui rendent parfois très complexe l'extrapolation au réel des résultats d'essais sur modèle réduit, surtout lorsque le phénomène physique dépend simultanément d'efforts de différentes origines (gravité, inertie, viscosité).
- Les effets de laboratoire qui font qu'il n'est jamais possible de réaliser des conditions expérimentales exactement conformes au réel. (effets de parois des bassins, courants de retour, réflexions parasites, possibilités des batteurs limitées en fréquences, ...)

5.3. La théorie et les modèles numériques

Le récent développement des ordinateurs très rapides possédant de grandes mémoires centrales ont permis la réalisation de modèles numériques de plus en plus performants.

La mise en œuvre des modèles numériques constitue certainement, et de loin, le moyen d'étude le plus léger et le moins coûteux. Il est désormais à la portée du bureau d'étude et peut être utilisé dès l'avant-projet, ce qui explique également son succès grandissant.

L'approche numérique présente toutefois des inconvénients qui sont liés aux limitations théoriques des modèles mathématiques qui sont résolus. Des hypothèses simplificatrices importantes doivent être consenties pour pouvoir obtenir des équations susceptibles d'être résolues (fluide parfait, équations linéarisées, ...). Cela réduit bien évidemment les domaines de validité des programmes de calcul, sans que les utilisateurs en soient toujours conscients.

5.4. Associations et sociétés savantes

Différentes sociétés et associations, dites "sociétés savantes", participent sous diverses formes à faire progresser les connaissances dans le domaine de la dynamique du navire, de la tenue à la mer et des moyens d'étude.

Pour résoudre des problèmes particuliers liés aux essais sur modèles, différents centres d'hydrodynamique navale mettent en commun, depuis 1933, leurs expériences au cours des réunions régulières de "l'International Towing Tank Conference" (ITTC). En faisant progresser la technique des essais sur modèle, et en en standardisant les conditions, elle participe à améliorer le principal outil d'étude du comportement des navires. Par l'intermédiaire de ses comités techniques spécialisés, elle organise également des programmes d'étude sur lesquels différents laboratoires travaillent en commun.

D'autres associations participent également à faire progresser les connaissances en hydrodynamique navale :

- l'"International Ship Structures Congress" (ISSC),
- les "symposiums of ship hydrodynamics" organisés tous les deux ans par l'"Office of Naval Research" américain,
- la "Society of Naval Architects and Marine Engineers" (SNAME) qui assure la publication le "Journal of Ship research" et "Marine Technologie",
- la "Royale Institution of Naval Architects" (RINA),
- l'"Association Technique Maritime et Aéronautique" (ATMA),
- la "Shiffban Technische Gesellschaft".

6. Différents types de navires et de structures marines

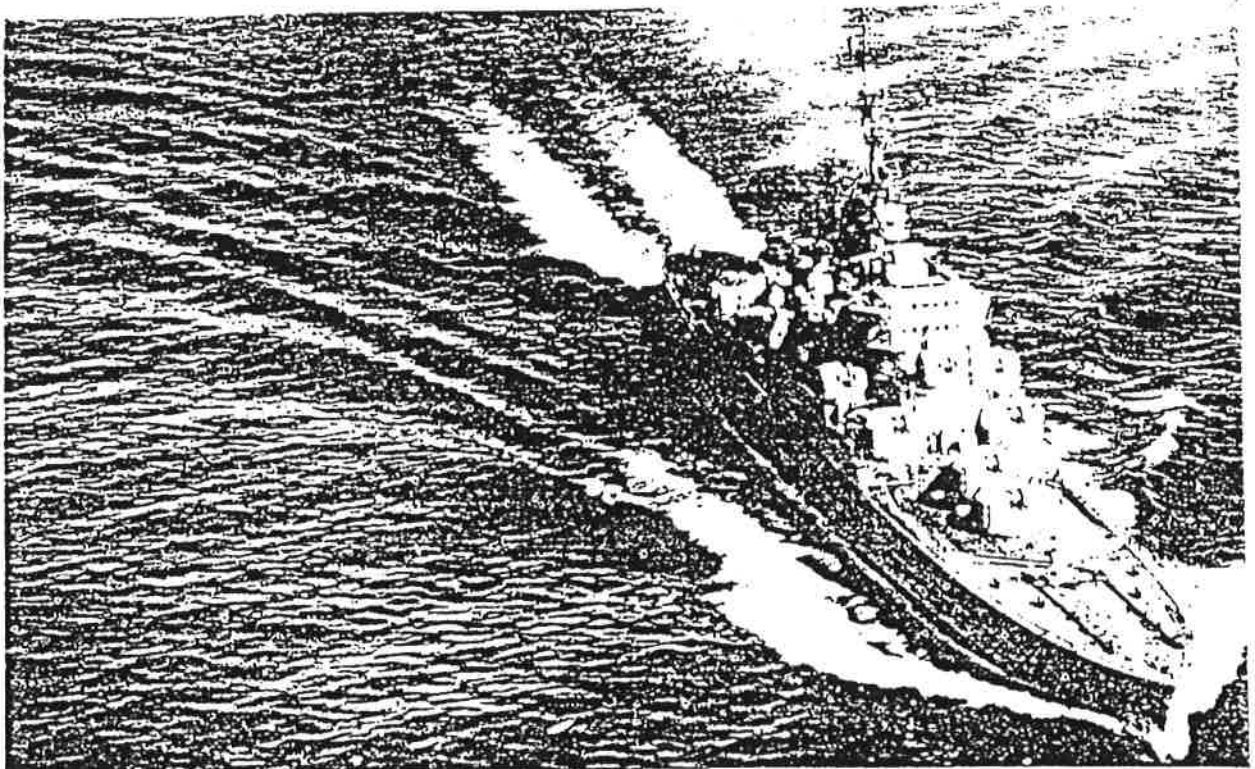
6.1. Introduction

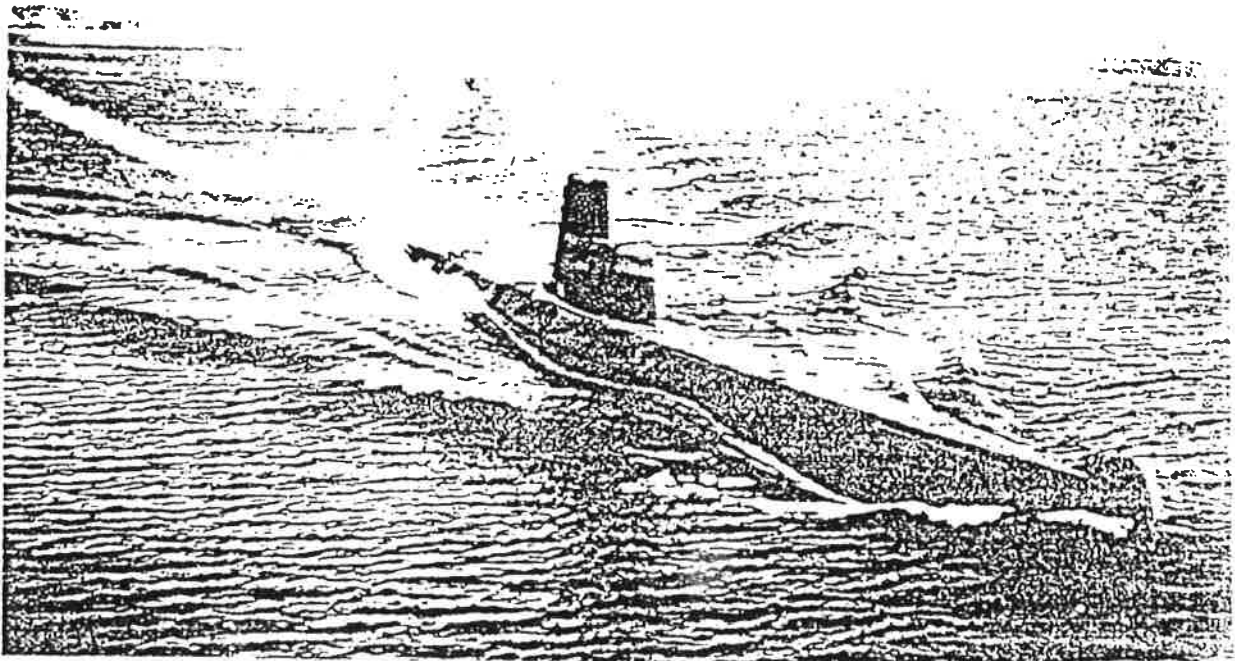
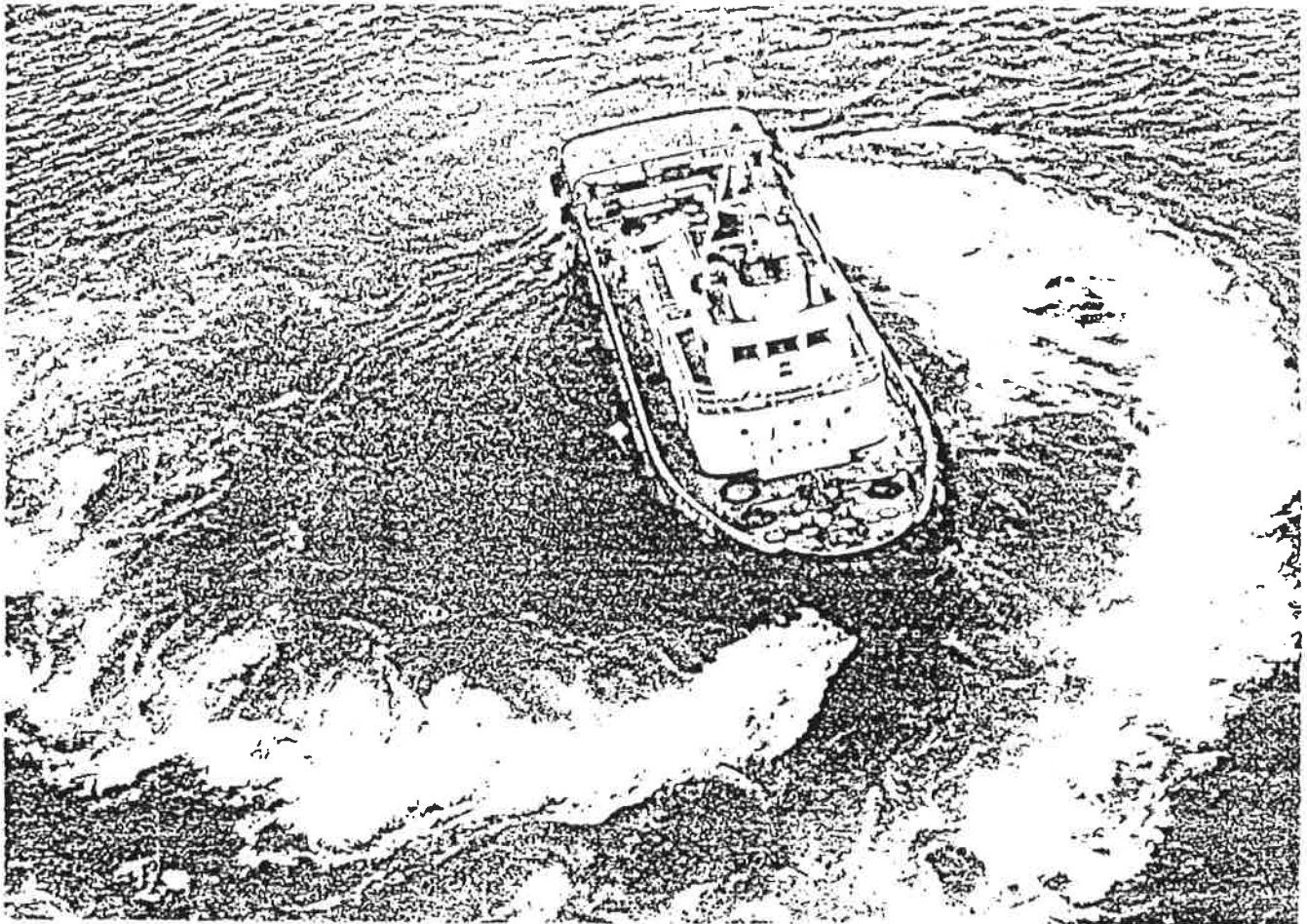
Les structures marines sont de types très variés, et présentent des comportements à la mer très différents. Il est clair qu'une structure treillis fixe (jacket) n'a pas le même comportement dans la houle qu'un pétrolier ancré.

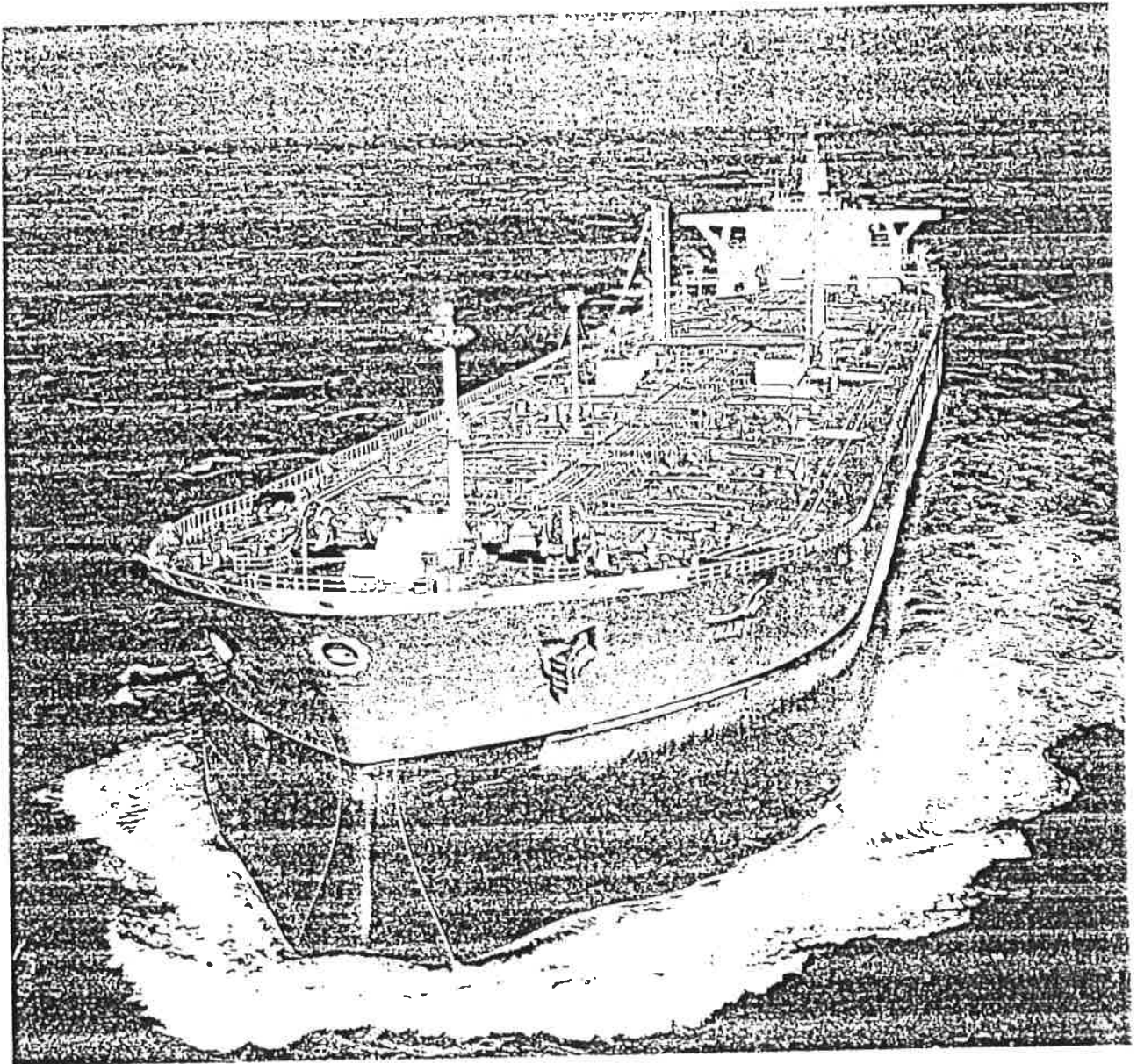
Il n'est évidemment pas possible le cadre de ce cours d'examiner le comportement marin de chaque type de structure. Il est cependant intéressant et utile de commencer par regarder les principaux types de structures marines, à savoir :

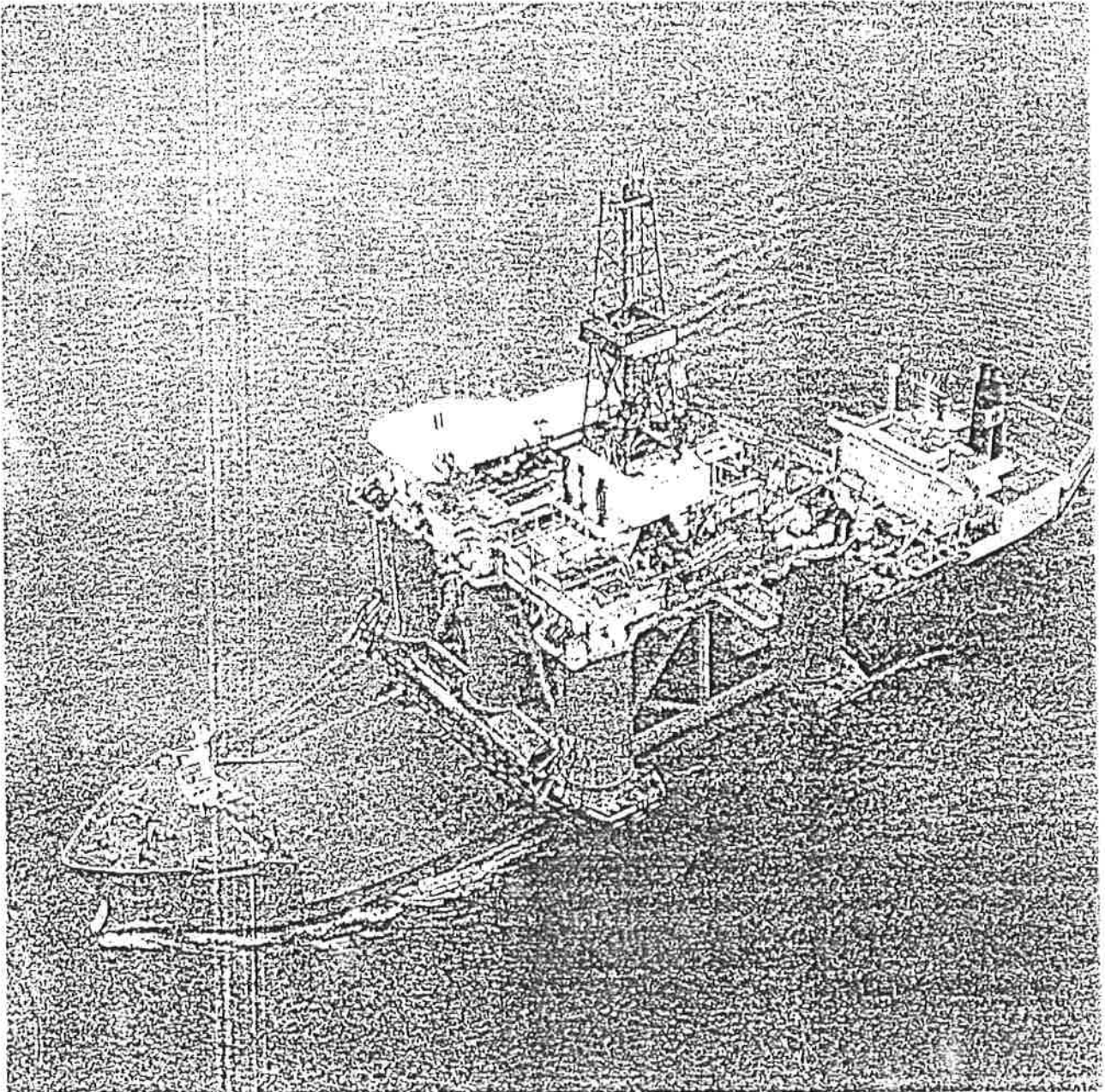
- les navires et les barges,
- les plateformes semi-submersibles,
- les plateformes sur câbles tendus (TLP),
- les structures gravitaires,
- les structures treillis,
- les structures mixtes.

6.2. Les navires et les barges

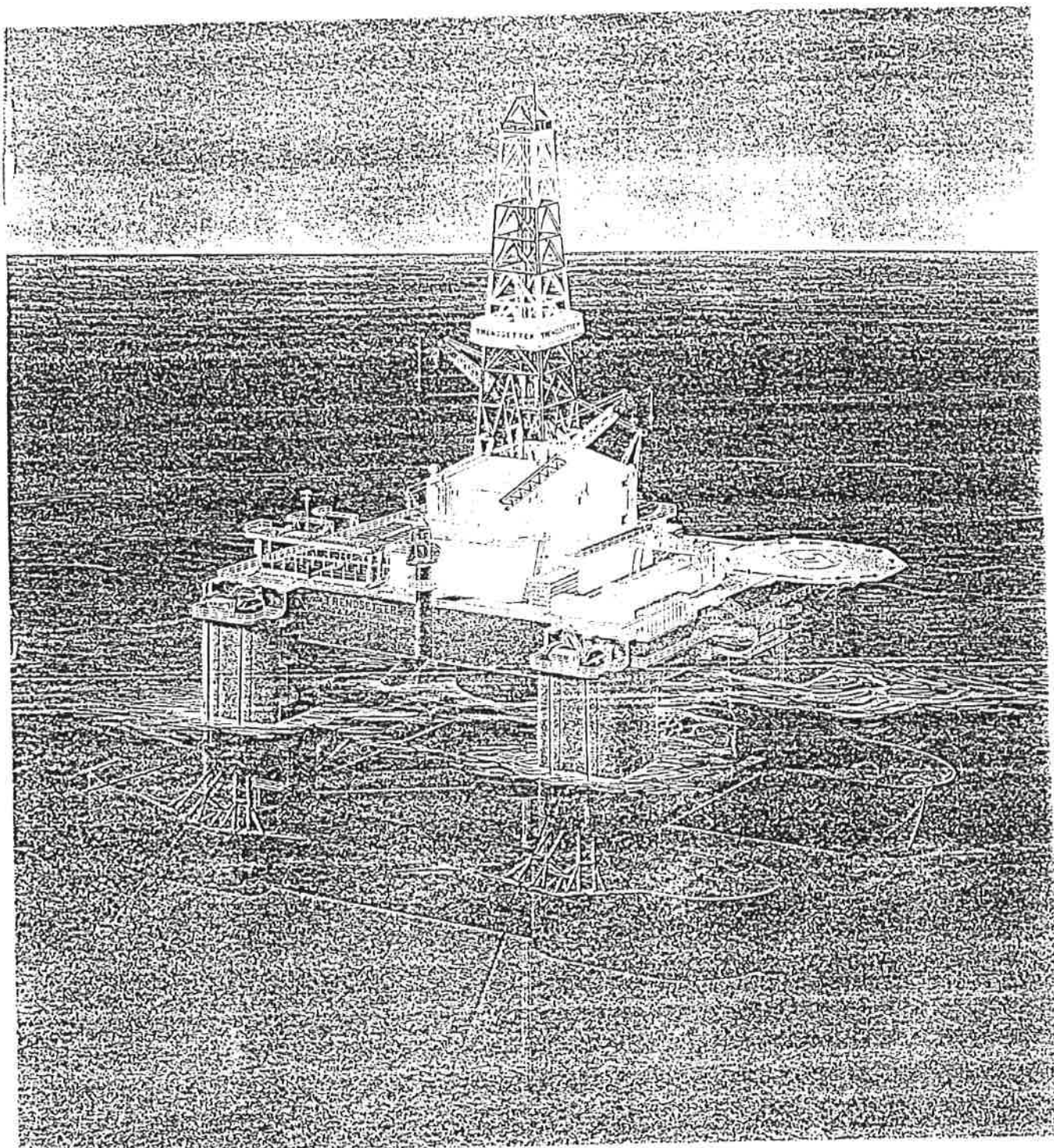


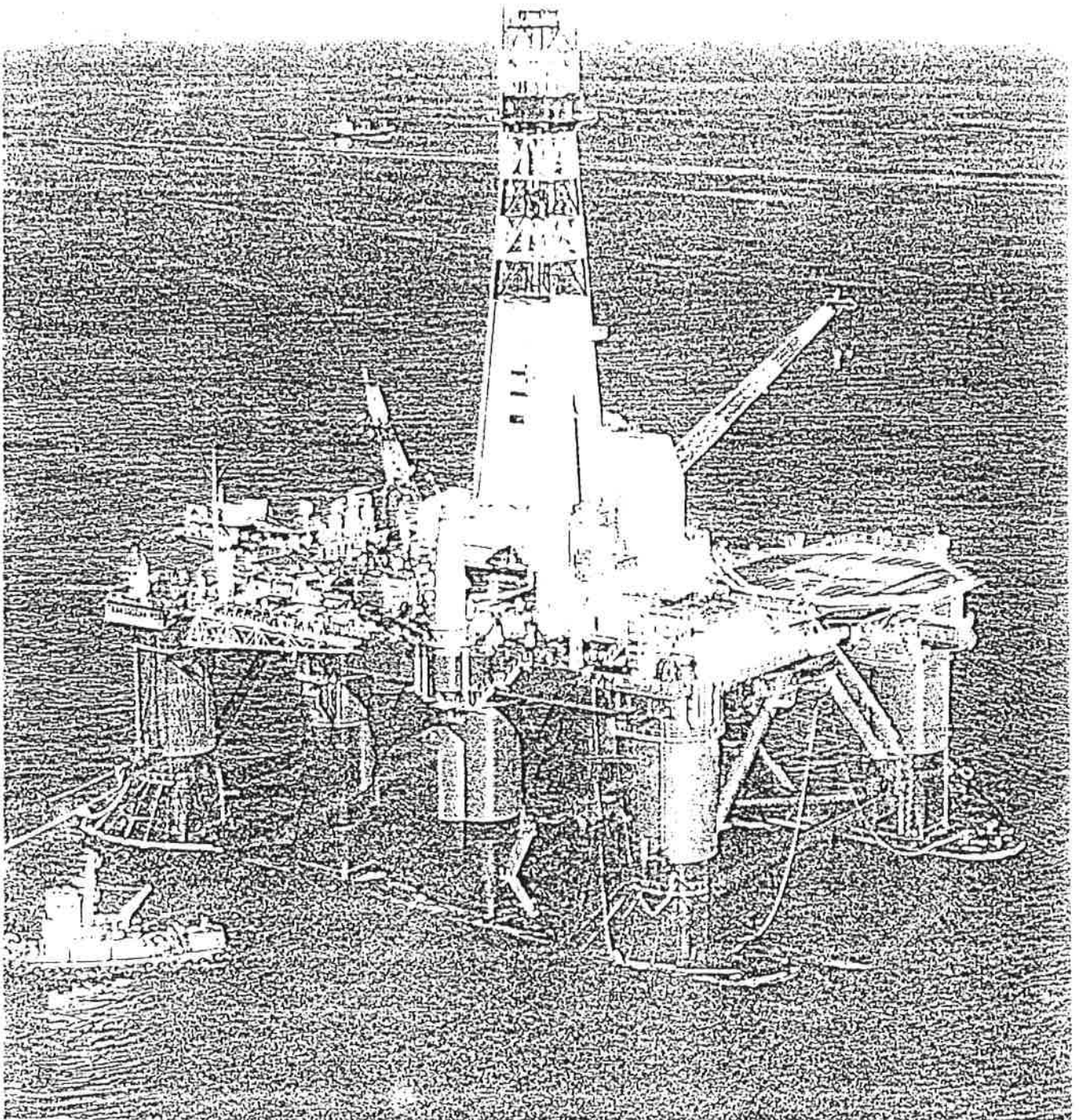




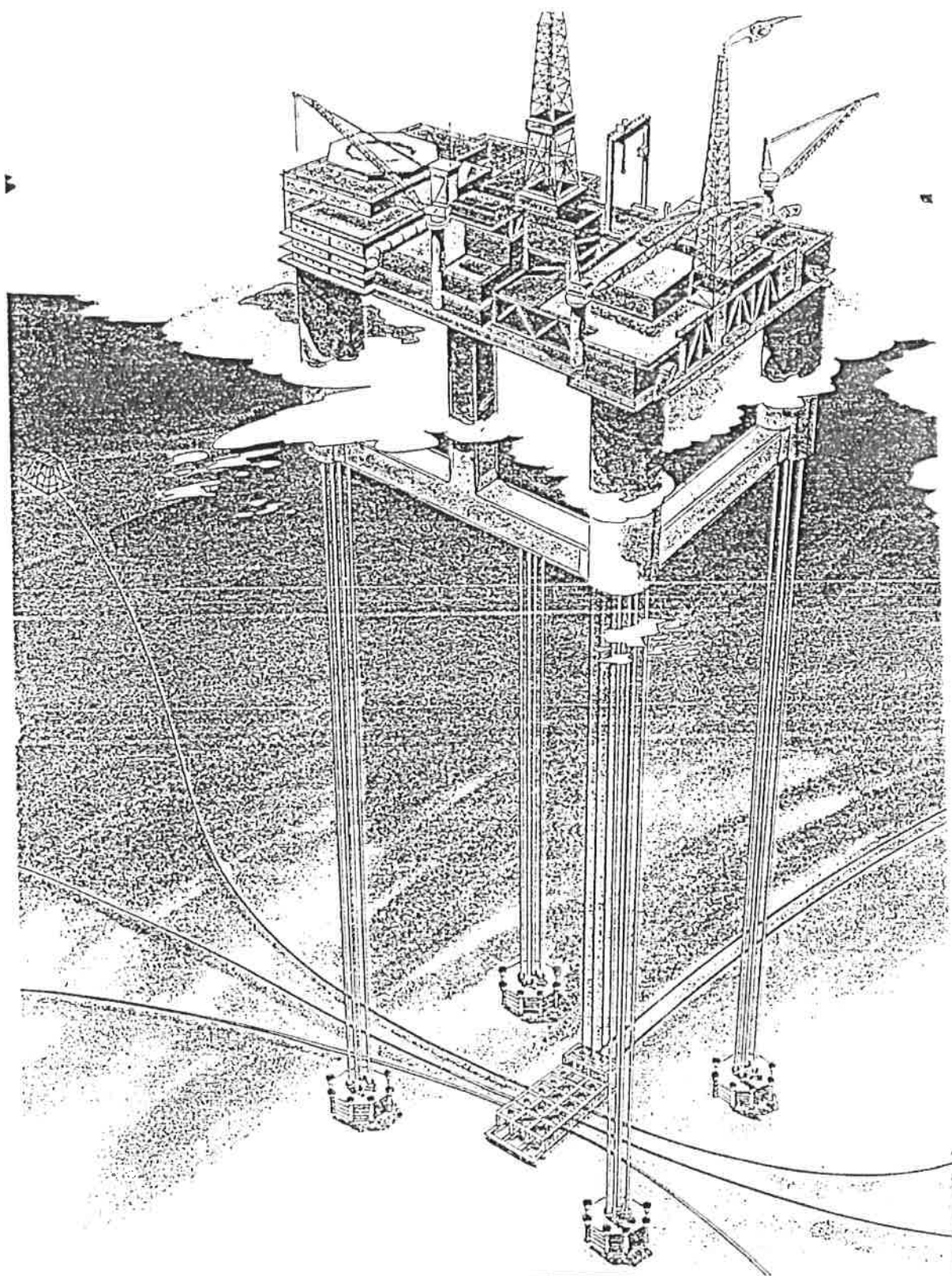


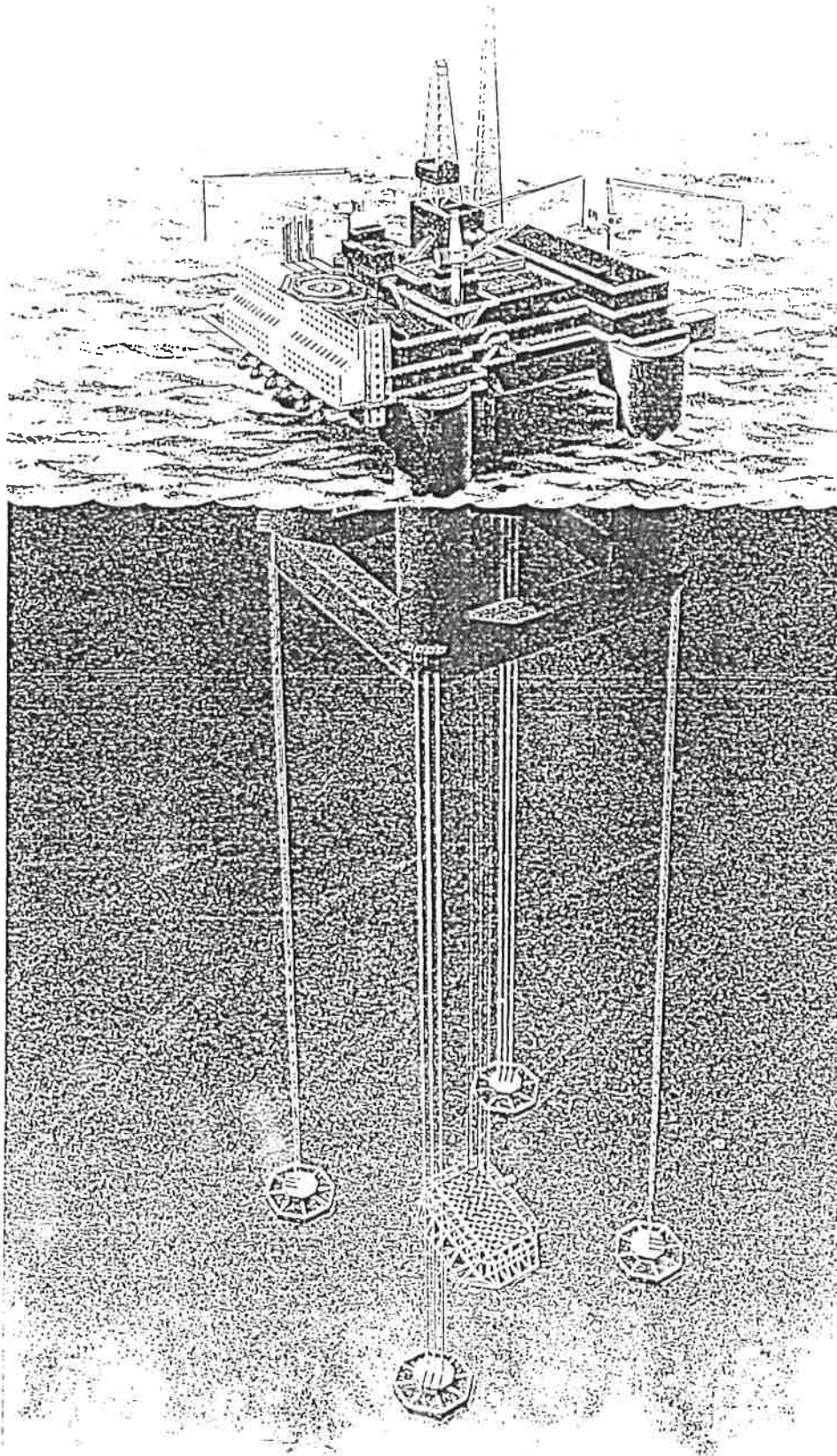
6.3. Les plate-formes semi-submersibles



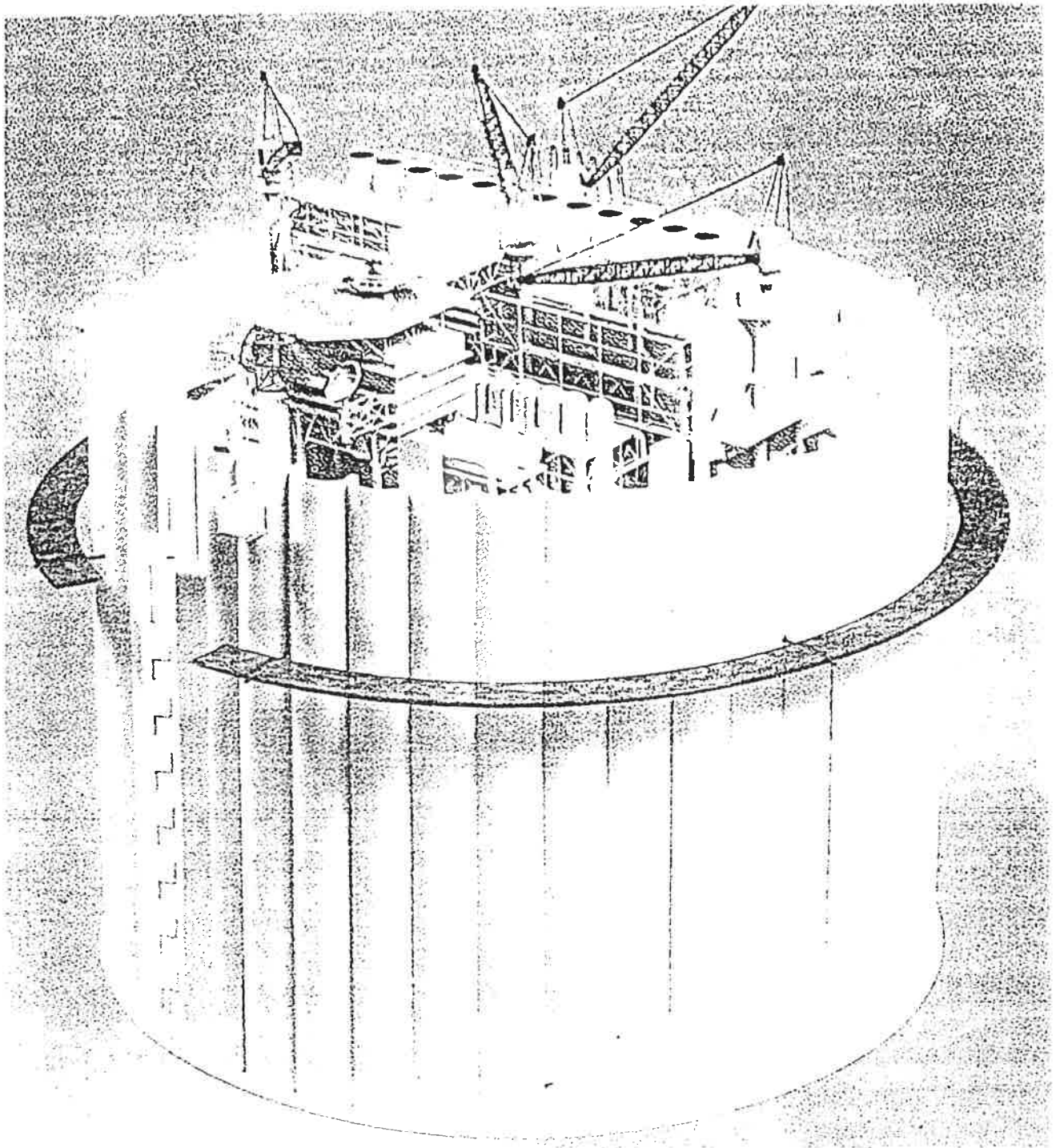


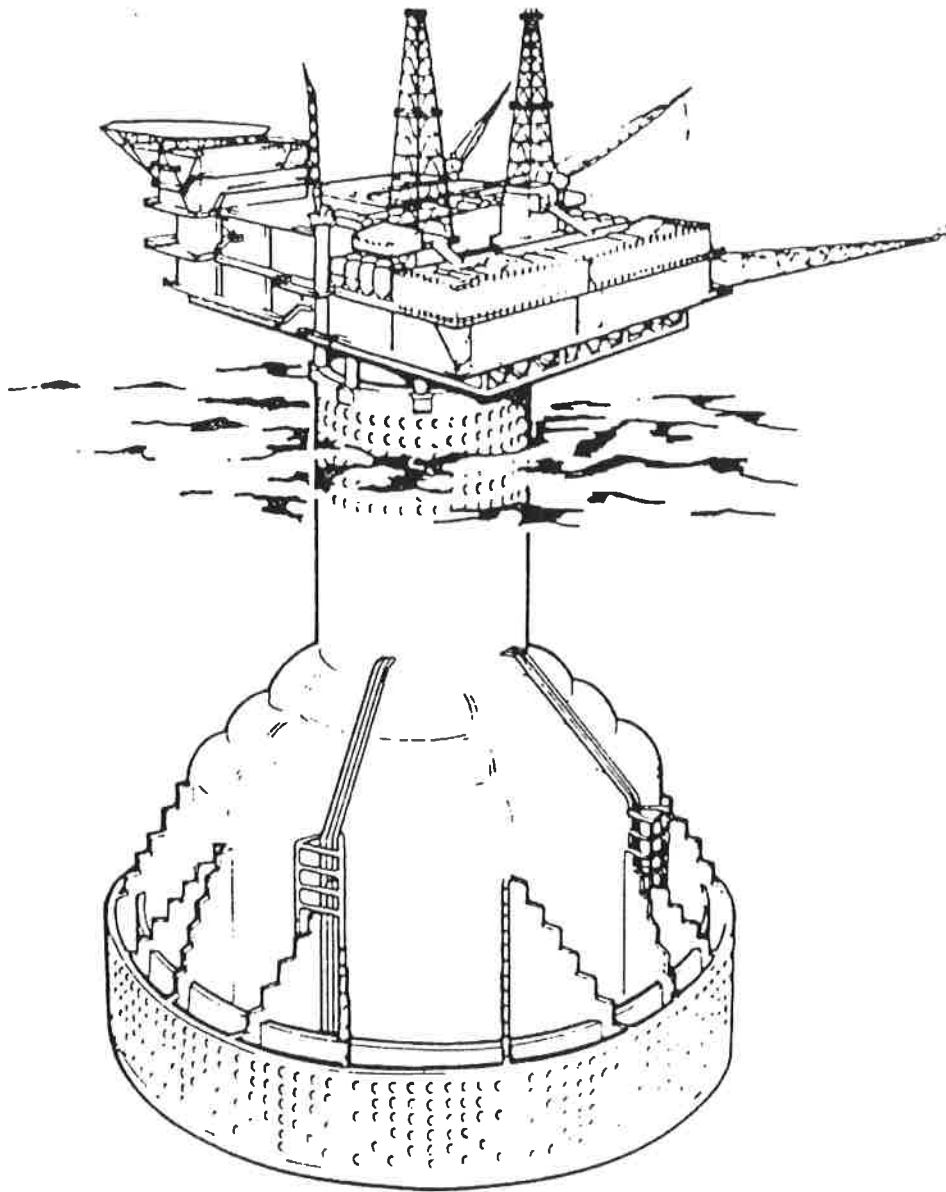
6.4. Les plate-formes sur câbles tendus

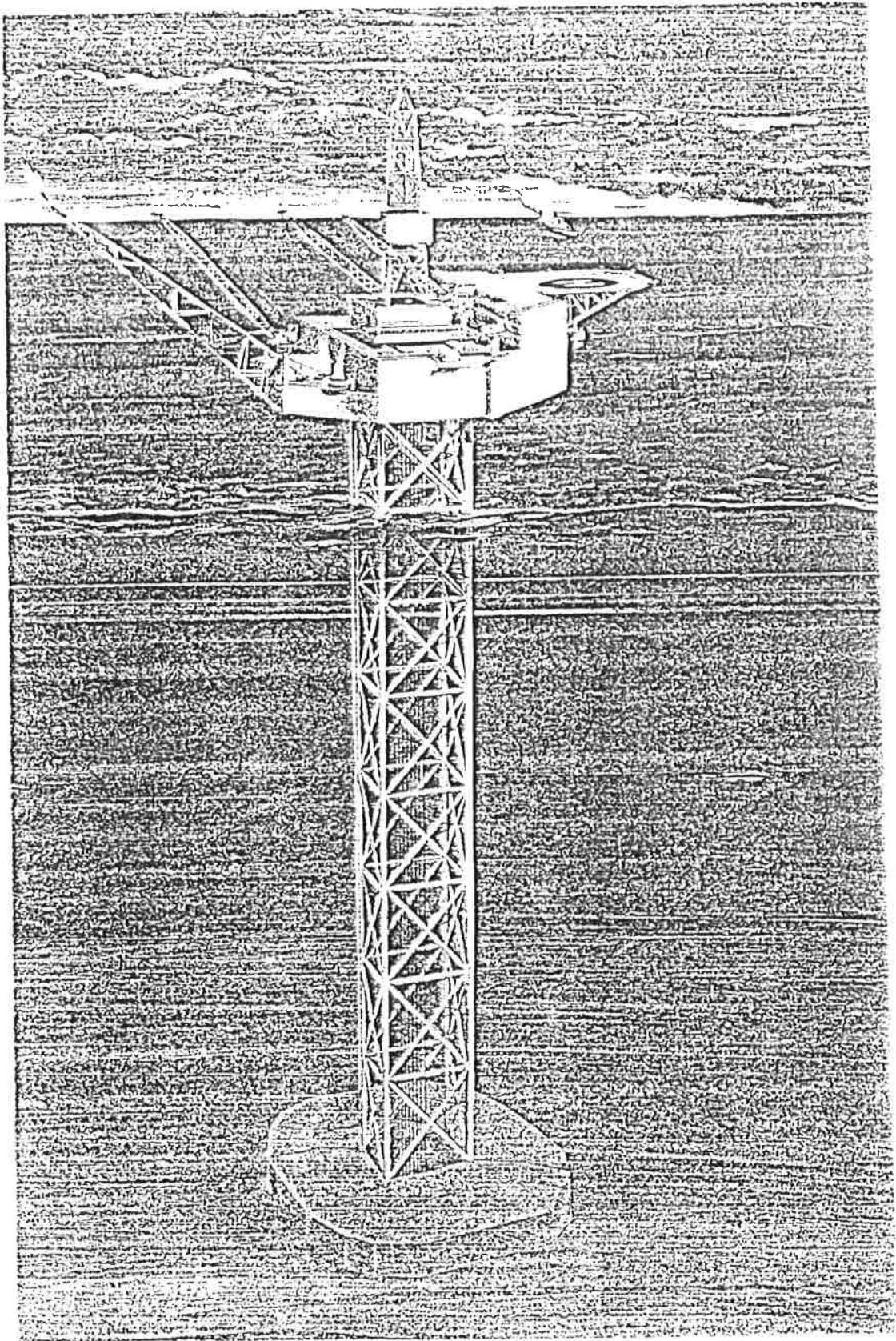




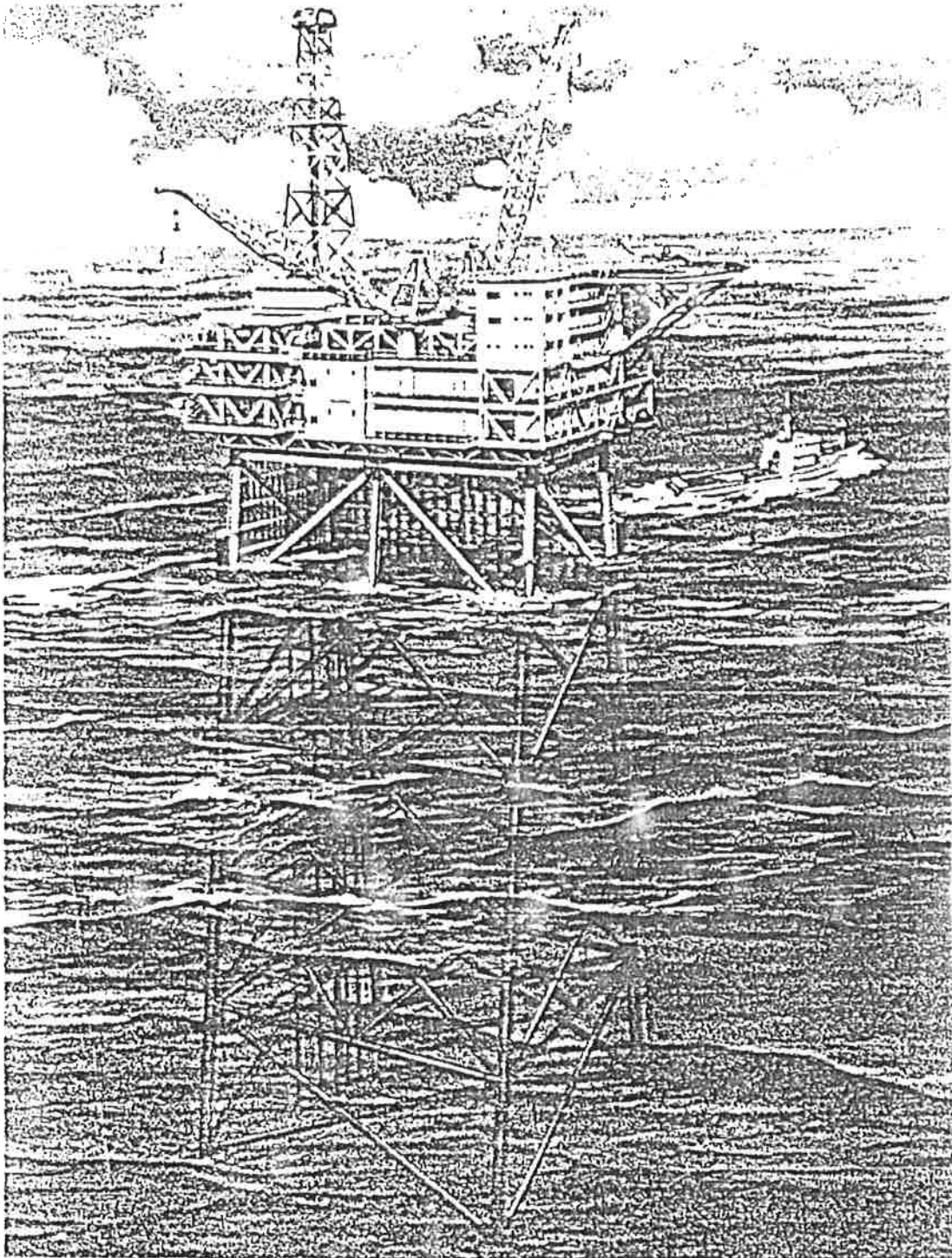
6.5. Les structures gravitaires



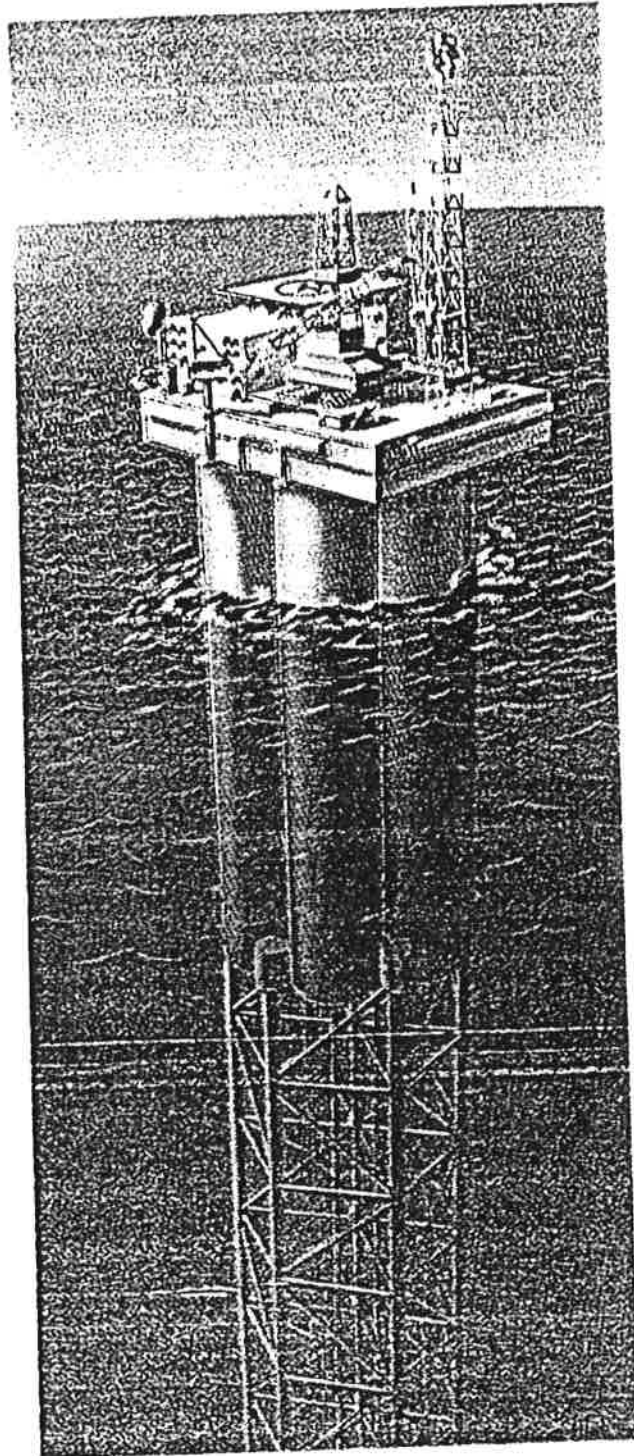


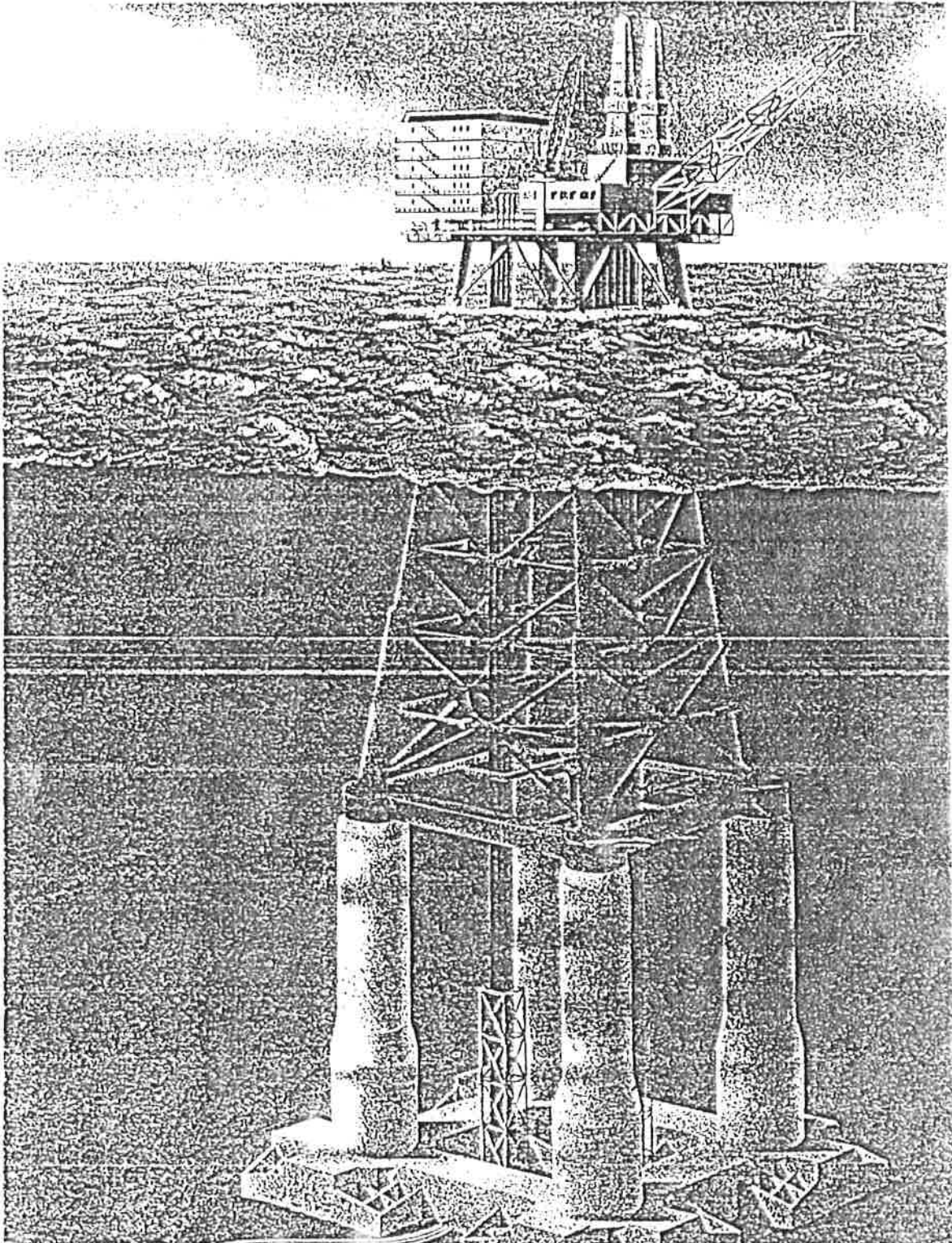


6.6. Les structures treillis



6.7. Les structures mixtes



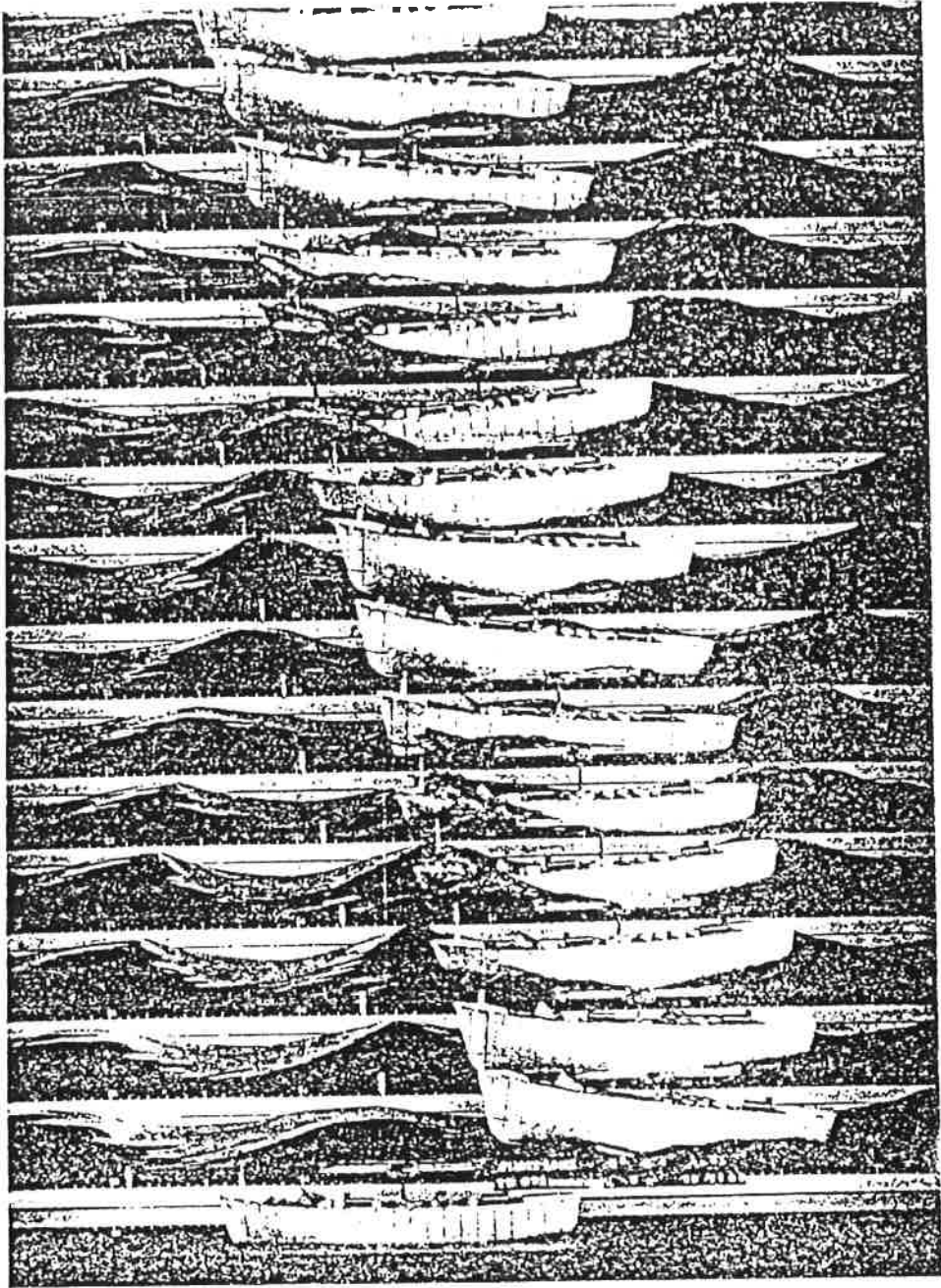


7. Références bibliographiques

- [1] **BINDEL S.**
"Hydrodynamique navale"
Cours de l'Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées
ENSTA, Paris /1982/
- [2] **BOUGIS J.**
"Houles réelles et états de mer"
Cours de l'Université de Toulon et du Var
I.S.I.T.V., Toulon /1993/
- [3] **DEVAUCHELLE P.**
"Dynamique du navire"
Bibliothèque de l'Institut Français d'Aide à la Formation
Professionnelle Maritime.
Masson, Paris /1986/
- [4] **FALTINSEN O.M.**
"Sea loads on ships and offshore structures"
Ocean technology series
Cambridge University Press, Cambridge /1990/
- [5] **SARPKAYA T. and ISAACSON M.**
"Mechanics of wave forces on offshore structures"
Van Nostrand Reinhold Company Inc., New York /1981/
- [6] **SERVIERES R.**
"Connaissance du navire – tome 1 : théorie du navire"
Cours de l'Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées
ENSTA, Paris /1973/
- [7] **SUSBIELLES G. et BRATU C.**
"Vagues et ouvrages pétroliers en mer"
Publications de l' Institut Français du Pétrole
Editions Technip, Paris /1981/

Partie 02

Tenue à la mer
sur houle régulière



1. Introduction

L'industrie navale a connu une évolution très rapide, tant en ce qui concerne les performances des engins que leur diversité. Certains navires sont destinés à des transports de plus en plus rapides, tandis que les pétroliers ont atteint des tailles gigantesques. La recherche océanique et l'exploitation des océans sont conditionnées par la construction d'usines flottantes et de plate-formes offshore.

Les systèmes de production rencontrés en offshore pétrolier sont nombreux et variés par leurs tailles, leurs architectures et leurs fonctions. Leurs caractéristiques varient au cours des différentes phases de leur vie : construction, transport et installation, conditions d'opération et de survie, retrait.

Les navires qui naviguent dans toutes les mers du globe, comme les systèmes de production, qui opèrent au point fixe dans des mer ouvertes, doivent être conçus et dimensionnés pour résister à toutes les conditions d'environnement qu'ils risquent de rencontrer au cours des différentes phases de leur vie.

Le dimensionnement des différents composants de ces structures nécessite la connaissance préalable des efforts auxquels ils seront soumis pendant la durée de leur exploitation.

2. Equations générales du mouvement sur houle

2.1. Efforts hydrodynamiques sur houle

Lorsque les dimensions des éléments de la structure sont grandes devant la longueur d'onde de la houle, le champ de vagues incident est fortement modifié. Les efforts d'inertie sont d'autant plus prédominants devant les efforts de traîné que le nombre de Keulegan et Carpenter (rapport entre l'amplitude du déplacement et la dimension caractéristique de la structure) est petit.

La détermination des efforts nécessite alors la connaissance précise des champs de vitesses et de pression au voisinage de la carène.

Si la structure est fixe, le champ de vague est perturbé par des effets de réflexion et de diffraction. Les efforts qui en résultent sont appelés efforts de diffraction. Ils s'ajoutent aux efforts dus au champ de pression de la houle incidente non perturbée pour donner les efforts d'excitation. Ils ne dépendent que de la forme de la carène et des caractéristiques de la houle incidente.

Sous l'action de tels efforts d'excitation, un navire ou une structure flottante bougent et leurs mouvements créent un champ de vagues radiées. Les efforts qui en résultent sont les efforts de radiation. Ils dépendent de la forme de la carène, de la période de la houle incidente, mais aussi des déplacements de la carène suivant les six degrés de liberté.

La formulation, dans le cadre de la théorie du potentiel, du problème de la détermination des efforts et des mouvements des navires et structures marines sur houle est connue sous le nom de diffraction-radiation.

2.2. Diffraction-radiation en théorie linéaire

Le problème de la diffraction-radiation au point fixe concerne l'étude du comportement d'un ou de plusieurs (N) navires et/ou structures marines, partiellement ou complètement immergés, soumis aux actions de la houle, lorsqu'ils sont assujettis à demeurer sur un site donné grâce à des dispositifs de positionnement statiques ou dynamiques.

La mer, réputée d'étendue infinie, est soit supposée de profondeur illimitée, soit supposée être limitée par un fond plan et horizontal indéfini.

La résolution de ce problème peut être abordée en consentant différents niveaux d'approximations qui permettent de le simplifier. Certaines méthodes conservent la généralité des formes des structures, tandis que d'autres méthodes

extrêmement performantes sont limitées à des formes particulières (méthode des tranches, multipôles, ...).

Il s'agit d'un phénomène stationnaire dans le repère fixe.

2.2.1. Hypothèses

Le problème est formulé dans le cas d'un fluide parfait incompressible. Les écoulements sont donc régis par les équations d'Euler.

L'écoulement est supposé exempt de toute turbulence. Le fluide étant parfait, barotrope et en mouvement dans un champ de force volumique dérivant d'un potentiel scalaire (champ de pesanteur terrestre), il existe à tout instant un potentiel des accélérations. Si il existe à un instant donné un potentiel des vitesses, le théorème de Lagrange assurera sa pérennité.

L'utilisation d'un modèle de houle incidente irrotationnelle justifie l'hypothèse de l'écoulement à potentiel des vitesses.

La pression atmosphérique est supposée constante au dessus de la surface libre.

Les amplitudes des oscillations des structures sont supposées être suffisamment faibles pour que la condition de glissement sur leurs parois puisse être affichée sur la position moyenne occupée par celles-ci au cours du temps.

L'amplitude et la cambrure de la houle incidente et des ondes de surface sont supposées être suffisamment faibles pour que les termes d'ordre supérieur à l'unité soient négligeables (en particulier, les carrés des vitesses et des accélérations absolues des particules fluides à proximités de la surface libre) et qu'il soit possible d'afficher la condition de surface libre sur le plan horizontal qui coïncide avec l'interface liquide-atmosphère à l'équilibre statique.

Cette dernière hypothèse a pour conséquence que seul le modèle de houle d'amplitude infinitésimale d'Airy peut être retenu.

2.2.2. Le problème aux limites dans le domaine temporel

Il résulte de ce qui précède que le champ des vitesses absolues qui sera désigné par $\vec{V}(M;t)$, dérive d'un potentiel scalaire harmonique $\Phi(M;t)$; par convention, sauf indication contraire, $\Phi(M;t)$ désignera toujours la fonction potentiel des vitesses absolues exprimée dans le repère fixe.

On note \mathcal{D} le domaine fluide limité, d'une part par les carènes $\mathcal{C} = \bigcup_{i=1}^N \mathcal{C}_i$ et la surface libre SL (plan de cote $z = 0$), et d'autre part, soit par la demi-sphère Σ de cotes négatives, de rayon infini R , centrée sur les carènes, soit par le fond F et le cylindre Σ d'axe vertical, de rayon infini R , centré sur les carènes.

Par convention, la normale intérieure au fluide, et donc tournée vers l'extérieure des carènes, est notée $\vec{n}(M;t)$.

Comme la conservation de la masse impose à un fluide isovolume exempt de singularité en son sein, une divergence des vitesses absolues nulle, les équations indéfinies suivantes doivent être satisfaites en tout point du fluide :

$$(2.1) \quad \begin{cases} \vec{V}(M;t) &= \overline{\text{grad}} \Phi(M;t) \\ \Delta \Phi(M;t) &= 0 \quad \forall M \in \mathcal{D} \quad (-h \leq z \leq 0) \end{cases}$$

La condition de glissement sur une carène traduit son étanchéité ; elle stipule que la composante normale de la vitesse relative est identiquement nulle en tout point M de la paroi, et ce, à tout instant :

$$(2.2) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n}(M;t) = \vec{V}_{Ei}(M;t) \cdot \vec{n}(M;t) \quad \forall M \in \mathcal{C}_i, \quad \forall i \in [1, N]$$

expression dans laquelle $\vec{V}_{Ei}(M;t)$ désigne la vitesse d'entraînement de la carène i :

$$(2.3) \quad \vec{V}_{Ei}(M;t) = \vec{C}_i(t) + \vec{\Omega}_i(t) \wedge \overline{G_i M}$$

en notant respectivement $\vec{C}_i(t)$ et $\vec{\Omega}_i(t)$ la vitesse absolue du centre de gravité G_i du navire ou de la structure i d'une part, et son vecteur vitesse de rotation instantanée d'autre part.

La condition de glissement sur le fond traduit son étanchéité ; elle stipule que la composante normale de la vitesse absolue est identiquement nulle en tout point M de la paroi, et ce, à tout instant :

$$(2.4) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n}(M;t) = 0 \quad \forall M \in F \quad (z = -h)$$

Enfin, la dernière hypothèse faite se traduit par la condition de surface libre linéarisée, qui s'écrit :

$$(2.5) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}(M;t) + g \frac{\partial \Phi}{\partial z}(M;t) = 0 \quad \forall M \in SL \quad (z = 0)$$

Par ailleurs, une condition de radiation doit exprimer que les ondes de perturbation s'éloignent indéfiniment des structures, et que l'infini ne les réfléchit pas.

2.2.3. Le problème aux limites dans le domaine fréquentiel

Dans le cadre d'une théorie linéaire, il est possible de passer du domaine temporel au domaine fréquentiel par transformation de Fourier, en considérant les solutions harmoniques dans le temps. Toutes les grandeurs sont alors supposées varier sinusoidalement dans le temps à la pulsation ω , ce qui permet de poser :

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \Phi_{\omega}(M; t) &= \Re\{\phi_{\omega}(M)e^{-i\omega t}\} \\ \vec{V}_{Ei}(M; t) &= \Re\{\vec{V}_{Ei}(M)e^{-i\omega t}\} \\ \vec{C}_i(t) &= \Re\{\vec{C}_i e^{-i\omega t}\} \\ \vec{\Omega}_i(t) &= \Re\{\vec{\Omega}_i e^{-i\omega t}\} \\ \vec{F}_i(t) &= \Re\{\vec{F}_i e^{-i\omega t}\} \end{aligned}$$

Afin de poursuivre, il convient d'écrire que le potentiel des vitesses total est la somme du potentiel des vitesses de la houle incidente et du potentiel des vitesses de perturbation dû à la présence des structures :

$$(2.7) \quad \phi_{\omega}(M) = \phi_{\omega I}(M) + \phi_{\omega P}(M)$$

La houle incidente d'Airy étant définie par :

$$(2.8) \quad \Phi_{\omega I}(M; t) = \Re\{\phi_{\omega I}(M)e^{-i\omega t}\}$$

avec :

$$(2.9) \quad \begin{cases} \phi_{\omega I}(M) = -\frac{ag}{\omega} e^{k_{\infty} z} e^{ik_{\infty}(x \cos \beta + y \sin \beta)} & \text{si la profondeur est illimitée} \\ \phi_{\omega I}(M) = -\frac{ag}{\omega} \frac{\text{ch } m_0(z+h)}{\text{ch } m_0 h} e^{im_0(x \cos \beta + y \sin \beta)} & \text{si la profondeur } h \text{ est finie} \end{cases}$$

où k_{∞} désigne le nombre d'onde en profondeur illimitée défini par :

$$(2.10) \quad k_{\infty} = \frac{\omega^2}{g}$$

où β désigne l'incidence de la houle, et m_0 le nombre d'onde en profondeur finie, relié à k_∞ par la relation de dispersion :

$$(2.11) \quad m_0 \operatorname{th} m_0 h = k_\infty$$

La fonction complexe $\phi_{\omega P}(M)$ indépendantes du temps doit alors être solution du problème aux limites suivant dans lequel la condition de radiation est exprimée sous la forme dite de Sommerfeld :

$$(2.12) \quad \begin{cases} \Delta \phi_{\omega P}(M) = 0 & \forall M \in \mathcal{D} \quad (-h \leq z \leq 0) \\ \frac{\partial \phi_{\omega P}}{\partial z}(M) - k_\infty \phi_{\omega P}(M) = 0 & \forall M \in SL \quad (z = 0) \\ \frac{\partial \phi_{\omega P}}{\partial n}(M) = -\frac{\partial \phi_{\omega I}}{\partial n}(M) + \vec{\nabla}_{E_i}(M) \cdot \vec{n}(M) & \forall M \in C_i, \quad \forall i \in [1, N] \\ \frac{\partial \phi_{\omega P}}{\partial n}(M) = 0 & \forall M \in F \quad (z = -h) \\ \frac{\partial \phi_{\omega P}}{\partial R}(M) - ik \phi_{\omega P}(M) = 0 & \forall M \in \Sigma \end{cases}$$

2.2.4. Les problèmes aux limites élémentaires

Le problème aux limites (2.12) n'étant formé que d'équations linéaires, il est possible de le décomposer en une combinaison linéaire de $6N + 1$ problèmes élémentaires définis à partir des $6N + 1$ termes du second membre de la condition de glissement sur les N carènes, obtenus après avoir exprimé la composante normale de la vitesse en fonction de ses composantes.

En explicitant, à cette fin, le second membre de la troisième équation, il vient :

$$(2.13) \quad \frac{\partial \phi_{\omega P}}{\partial n}(M) = -\frac{\partial \phi_{\omega I}}{\partial n}(M) + [\vec{C}_i + \vec{\Omega}_i \wedge \vec{G}_i \vec{M}] \cdot \vec{n}(M) \quad \forall M \in C_i, \quad \forall i \in [1, N]$$

Ce qui peut s'écrire encore en désignant par $\vec{e}_{i,q}$, ($q \in [1, 2, 3]$) les vecteurs unitaires portés par les axes du repère relatif de la structure i :

$$(2.14) \quad \frac{\partial \phi_{\omega P}}{\partial n}(M) = -\frac{\partial \phi_{\omega I}}{\partial n}(M) + \sum_{q=1}^3 C_{riq} [\vec{e}_{i,q} \cdot \vec{n}] + \sum_{q=1}^3 \Omega_{riq} [(\vec{e}_{i,q} \wedge \vec{G}_i \vec{M}) \cdot \vec{n}(M)] \quad \forall M \in C_i, \quad \forall i \in [1, N]$$

Il est donc clair que la fonction potentiel des vitesses absolues de perturbation $\phi_{\omega P}(M)$ peut être décomposée sous la forme :

$$(2.15) \quad \phi_{\omega P}(M) = \phi_{\omega D}(M) + \phi_{\omega R}(M)$$

avec :

$$(2.16) \quad \phi_{\omega R}(M) = \sum_{i=1}^N \sum_{q=1}^6 C_{riq} \varphi_{\omega iq}(M)$$

En définissant les vecteurs vitesse généralisée et normale généralisée par :

$$(2.17) \quad \left[\begin{array}{l} C_{ri1} = C_{ri1} \\ C_{ri2} = C_{ri2} \\ C_{ri3} = C_{ri3} \\ C_{ri4} = \Omega_{ri1} \\ C_{ri5} = \Omega_{ri2} \\ C_{ri6} = \Omega_{ri3} \end{array} \right] \quad \text{et} \quad \left[\begin{array}{l} N_{i1}(M) = \overline{n}(M) \cdot \overline{e}'_{i1} \\ N_{i2}(M) = \overline{n}(M) \cdot \overline{e}'_{i2} \\ N_{i3}(M) = \overline{n}(M) \cdot \overline{e}'_{i3} \\ N_{i4}(M) = (\overline{G}_i \overline{M} \wedge \overline{n}(M)) \cdot \overline{e}'_{i1} \\ N_{i5}(M) = (\overline{G}_i \overline{M} \wedge \overline{n}(M)) \cdot \overline{e}'_{i2} \\ N_{i6}(M) = (\overline{G}_i \overline{M} \wedge \overline{n}(M)) \cdot \overline{e}'_{i3} \end{array} \right] \quad \forall M \in C_i$$

Ces fonctions potentiel des vitesses absolues partielles sont respectivement les solutions du problème aux limites extérieur de diffraction :

$$(2.18) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Delta \phi_{\omega D}(M) = 0 & \forall M \in \mathcal{D} \quad (-h \leq z \leq 0) \\ \frac{\partial \phi_{\omega D}}{\partial z}(M) - k_{\infty} \phi_{\omega D}(M) = 0 & \forall M \in SL \quad (z = 0) \\ \frac{\partial \phi_{\omega D}}{\partial n}(M) = -\frac{\partial \phi_{\omega I}}{\partial n}(M) & \forall M \in \mathcal{C} \\ \frac{\partial \phi_{\omega D}}{\partial n}(M) = 0 & \forall M \in F \quad (z = -h) \\ \frac{\partial \phi_{\omega D}}{\partial R}(M) - ik \phi_{\omega D}(M) = 0 & \forall M \in \Sigma \end{array} \right.$$

et des $6N$ problèmes aux limites extérieurs de radiation :

$$(2.19) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Delta \varphi_{\omega iq}(M) = 0 & \forall M \in \mathcal{D} \quad (-h \leq z \leq 0) \\ \frac{\partial \varphi_{\omega iq}}{\partial z}(M) - k_{\infty} \varphi_{\omega iq}(M) = 0 & \forall M \in SL \quad (z = 0) \\ \frac{\partial \varphi_{\omega iq}}{\partial n}(M) = N_{iq}(M) & \forall M \in C_i \\ \frac{\partial \varphi_{\omega iq}}{\partial n}(M) = 0 & \forall M \in F \quad (z = -h) \\ \frac{\partial \varphi_{\omega iq}}{\partial R}(M) - ik \varphi_{\omega iq}(M) = 0 & \forall M \in \Sigma \end{array} \right.$$

Il convient de noter que dans le cas présent, il n'y a pas d'intérêt particulier à exprimer la fonction potentiel des vitesses absolues dans le repère relatif, puisque les fonctions élémentaires $\varphi_{\omega i q}(M)$ ne sont indépendantes du temps dans ce repère, comme d'ailleurs dans le repère absolu, qu'en vertu de l'hypothèse des mouvements infinitésimaux.

2.2.5. Torseur des efforts de pression

A cette étape, les différents problèmes aux limites extérieurs de diffraction et de radiation sont supposés résolus que ce soit par une méthode analytique dans les cas où la définition de la carène est simple (cylindres, formes de Lewis ...), ou par une méthode numérique (équations intégrales et méthode de singularités, méthode d'éléments finis, méthode mixte ...), dans les cas plus complexes. Les fonctions potentiel des vitesses $\phi_{\omega D}(M)$ et $\varphi_{\omega i q}$ sont donc supposées connues en tout point du domaine fluide.

La pression qui règne au sein d'un fluide parfait isovolume, est donnée par la formule de Bernoulli-Lagrange. Si la fonction potentiel des vitesses absolues est exprimée dans le repère absolu, cette relation s'écrit :

$$(2.20) \quad p(M;t) = -\rho \left[gz + \frac{V^2(M;t)}{2} + \frac{\partial \Phi(M;t)}{\partial t} + F(t) \right]$$

tandis que, dans le cas où la fonction potentiel des vitesses absolues est exprimée dans le repère relatif lié au navire ou à la structure i , elle devient :

$$(2.21) \quad p_i(M;t) = -\rho \left[gz + \frac{V^2(M;t)}{2} - \vec{V}(M;t) \cdot \vec{V}_{Ei}(M;t) + \frac{\partial \Phi(M;t)}{\partial t} + F(t) \right]$$

Il en résulte que le torseur des efforts de pression auquel donne accès la théorie du potentiel a pour expression générale pour chaque navire ou chaque structure :

$$(2.22) \quad \begin{aligned} \vec{F}_i(t) &= \rho \iint_{C_i} \left[gz + \frac{V^2(M;t)}{2} - \vec{V}(M;t) \cdot \vec{V}_{Ei}(M;t) + \frac{\partial \Phi(M;t)}{\partial t} + F(t) \right] \vec{n}(M) dS \\ \vec{M}_i(t) &= \rho \iint_{C_i} \left[gz + \frac{V^2(M;t)}{2} - \vec{V}(M;t) \cdot \vec{V}_{Ei}(M;t) + \frac{\partial \Phi(M;t)}{\partial t} + F(t) \right] (\vec{G}_i \vec{M} \wedge \vec{n}(M)) dS \end{aligned}$$

Il convient de noter que dans le cas présent, la fonction potentiel des vitesses étant définie à une fonction du temps près, la fonction de Bernoulli-Lagrange $F(t)$ peut être choisie identiquement nulle, ce qui Comme pression sur la

surface libre au repos est nulle, la fonction temporelle de Bernoulli-Lagrange $F(t)$ est nulle.

Le torseur des efforts de pression est la somme de quatre termes qui représentent respectivement des efforts de pression d'origine hydrostatique pour le premier, et des efforts de pression d'origine potentielle pour les trois autres.

Le torseur des efforts d'origine hydrostatique a déjà été exprimé dans le cas général, et dans le cas particulier de petits mouvements.

De même, il a déjà été montré que le torseur des efforts hydrodynamique d'origine potentielle est la somme de deux termes de nature différentes :

— Le torseur $\mathcal{T}_{\phi\gamma}(\vec{F}_{\phi\gamma}, \vec{M}_{\phi\gamma})$ des termes du type "instationnaire" qui traduisent des actions qui ne se manifestent que dans le cas où le mouvement du navire ou de la structure n'est pas permanent dans le repère relatif. Ces termes sont caractérisés par la dérivée temporelle de la fonction potentiel des vitesses absolues $\Phi(M;t)$:

$$(2.23) \quad \begin{aligned} \vec{F}_{\phi\gamma}(t) &= \rho \iint_C \frac{\partial \Phi(M;t)}{\partial t} \vec{n}(M) dS \\ \vec{M}_{\phi\gamma}(t) &= \rho \iint_C \frac{\partial \Phi(M;t)}{\partial t} (\vec{GM} \wedge \vec{n}(M)) dS \end{aligned}$$

L'intégrand de ce premier torseur est exclusivement du premier ordre par rapport à l'amplitude des déplacements ; ce torseur est donc appelé torseur des efforts hydrodynamiques du premier ordre.

— Le torseur $\mathcal{T}_{\phi\nu}(\vec{F}_{\phi\nu}, \vec{M}_{\phi\nu})$ des termes du type "stationnaire" qui traduisent des actions qui se manifestent dans tous les types d'écoulements :

$$(2.24) \quad \begin{aligned} \vec{F}_{\phi\nu}(t) &= \rho \iint_C \left[\frac{V^2(M;t)}{2} - \vec{V}(M;t) \cdot \vec{V}_E(M;t) \right] \vec{n}(M) dS \\ \vec{M}_{\phi\nu}(t) &= \rho \iint_C \left[\frac{V^2(M;t)}{2} - \vec{V}(M;t) \cdot \vec{V}_E(M;t) \right] (\vec{GM} \wedge \vec{n}(M)) dS \end{aligned}$$

L'intégrand de ce second torseur est exclusivement du deuxième ordre par rapport à ces mêmes amplitudes : ce torseur est donc appelé torseur des efforts hydrodynamiques du second ordre.

Dans le cadre de la détermination des mouvements de plate-forme, seul le torseur des efforts "instationnaires" sera considéré, le torseur du second ordre qui ne génère pas d'efforts à la pulsation ω sera négligé.

2.2.6. Torseur des efforts du premier ordre

Compte tenu des équations (2.6), (2.15) et (2.16), il est possible d'exprimer le torseur des efforts de pression hydrodynamique d'origine potentielle du type "instationnaire" sous la forme générale suivante :

$$(2.25) \quad \begin{aligned} \vec{F}_{\omega i \phi \gamma}(t) &= \Re\{\vec{\mathcal{F}}_{\omega i \phi \gamma} e^{-i\omega t}\} \\ \vec{M}_{\omega i \phi \gamma}(t) &= \Re\{\vec{\mathcal{M}}_{\omega i \phi \gamma} e^{-i\omega t}\} \end{aligned}$$

avec :

$$(2.26) \quad \begin{aligned} \vec{\mathcal{F}}_{\omega i \phi \gamma} &= -i\rho\omega \iint_{C_i} [\phi_{\omega I}(M) + \phi_{\omega D}(M)] \vec{n}'(M) dS \\ &\quad - i\rho\omega \sum_{j=1}^N \sum_{q=1}^6 C_{rjq} \iint_{C_i} \varphi_{\omega jq}(M) \vec{n}'(M) dS \\ \vec{\mathcal{M}}_{\omega i \phi \gamma} &= -i\rho\omega \iint_{C_i} [\phi_{\omega I}(M) + \phi_{\omega D}(M)] (\vec{G}_i \vec{M} \wedge \vec{n}'(M)) dS \\ &\quad - i\rho\omega \sum_{j=1}^N \sum_{q=1}^6 C_{rjq} \iint_{C_i} \varphi_{\omega jq}(M) (\vec{G}_i \vec{M} \wedge \vec{n}'(M)) dS \end{aligned}$$

La première partie du torseur peut être transformée par application du théorème d'Haskind. En effet, la contribution de l'intégrale de $\phi_{\omega D}(M)$ à sa $p^{ième}$ composante généralisée peut être mise sous la forme suivante :

$$(2.27) \quad \iint_{C_i} \phi_{\omega D}(M) N_{ip}(M) dS = \iint_{C_i} \phi_{\omega D}(M) \frac{\partial \varphi_{\omega ip}}{\partial n}(M) dS$$

Or l'application de la deuxième formule de Green aux fonctions harmoniques $\phi_{\omega D}(M)$ et $\varphi_{\omega ip}(M)$ permet d'écrire :

$$(2.28) \quad \iint_{C_{USLU\Gamma U\Sigma}} \left[\phi_{\omega D}(M) \frac{\partial \varphi_{\omega ip}}{\partial n}(M) - \frac{\partial \phi_{\omega D}}{\partial n}(M) \varphi_{\omega ip}(M) \right] dS = 0$$

Compte tenu des conditions aux limites à l'infini, sur le fond, sur la surface libre et sur les carènes, il reste :

$$(2.29) \quad \iint_{C_i} \phi_{\omega D}(M) \frac{\partial \varphi_{\omega ip}}{\partial n}(M) dS = \iint_{C_i} \frac{\partial \phi_{\omega D}}{\partial n}(M) \varphi_{\omega ip}(M) dS$$

La prise en compte de la condition de glissement du problème aux limites correspondant à la détermination de $\phi_{\omega D}(M)$ permet ensuite de conclure :

$$(2.30) \quad \iint_{C_i} \phi_{\omega D}(M) \frac{\partial \varphi_{\omega ip}}{\partial n}(M) dS = - \iint_{C_i} \frac{\partial \phi_{\omega I}}{\partial n}(M) \varphi_{\omega ip}(M) dS$$

Cette transformation présente l'intérêt de permettre la détermination de ce tenseur d'efforts à partir de la résolution des problèmes élémentaires de radiation, et d'éviter ainsi la résolution du problème aux limites de diffraction.

La deuxième partie du tenseur peut, elle aussi être transformée de la manière suivante :

$$(2.31) \quad \begin{aligned} & -i\rho\omega \sum_{j=1}^N \sum_{q=1}^6 C_{rjq} \iint_{C_i} \varphi_{\omega jq}(M) \bar{n}(M) dS = \\ & \quad \sum_{j=1}^N \sum_{q=1}^6 (-i\omega C_{rjq}) \rho \iint_{C_i} \Re\{\varphi_{\omega jq}(M)\} \bar{n}(M) dS \\ & \quad + \sum_{j=1}^N \sum_{q=1}^6 C_{rjq} \rho \omega \iint_{C_i} \Im\{\varphi_{\omega jq}(M)\} \bar{n}(M) dS \\ & -i\rho\omega \sum_{j=1}^N \sum_{q=1}^6 C_{rjq} \iint_{C_i} \varphi_{\omega jq}(M) (\overline{G_i M} \wedge \bar{n}(M)) dS = \\ & \quad \sum_{j=1}^N \sum_{q=1}^6 (-i\omega C_{rjq}) \rho \iint_{C_i} \Re\{\varphi_{\omega jq}(M)\} (\overline{G_i M} \wedge \bar{n}(M)) dS \\ & \quad + \sum_{j=1}^N \sum_{q=1}^6 C_{rjq} \rho \omega \iint_{C_i} \Im\{\varphi_{\omega jq}(M)\} (\overline{G_i M} \wedge \bar{n}(M)) dS \end{aligned}$$

d'où l'expression complète de la $p^{\text{ième}}$ composante généralisée du tenseur :

$$(2.32) \quad \begin{aligned} \mathcal{F}_{ip} = & -i\rho\omega \iint_{C_i} \left[\phi_{\omega I}(M) \frac{\partial \varphi_{\omega ip}}{\partial n}(M) - \frac{\partial \phi_{\omega I}}{\partial n}(M) \varphi_{\omega ip}(M) \right] dS \\ & + \sum_{j=1}^N \sum_{q=1}^6 \Gamma_{rjq} \rho \iint_{C_i} \Re\{\varphi_{\omega jq}(M)\} \frac{\partial \varphi_{\omega ip}}{\partial n}(M) dS \\ & + \sum_{j=1}^N \sum_{q=1}^6 C_{rjq} \omega \rho \iint_{C_i} \Im\{\varphi_{\omega jq}(M)\} \frac{\partial \varphi_{\omega ip}}{\partial n}(M) dS \end{aligned}$$

en désignant l'accélération par :

$$(2.33) \quad \vec{\gamma}(t) = \Re\{\vec{\Gamma} e^{-i\omega t}\}$$

Les termes $\mathcal{M}_{\omega ipjq}$ et $\mathcal{A}_{\omega ipjq}$ définis par :

$$(2.34) \quad \begin{aligned} \mathcal{M}_{\omega ipjq} &= -\rho \iint_{C_i} \Re\{\varphi_{\omega jq}(M)\} \frac{\partial \varphi_{\omega ip}}{\partial n}(M) dS \\ \mathcal{A}_{\omega ipjq} &= -\omega \rho \iint_{C_i} \Im\{\varphi_{\omega jq}(M)\} \frac{\partial \varphi_{\omega ip}}{\partial n}(M) dS \end{aligned}$$

forment des matrices carrée symétriques pleines de dimension $6N$ et sont respectivement désignés sous les vocables de masses et inerties d'eau ajoutée d'une part et d'amortissements d'ondes de gravités d'autre part.

Ces termes d'amortissement correspondent à une dépense d'énergie qui part à l'infini sous forme d'ondes de gravité, et non pas à une dissipation visqueuse ! Ils sont d'ailleurs nuls en milieu illimité, puisqu'alors les fonctions potentiel des vitesses sont réelles.

Il faut garder présent à l'esprit que la dérivation par rapport au temps doit être faite dans le repère relatif, et que pour les trois composantes de translation, $\frac{dC_{r_q}(t)}{dt}$ ne s'identifient pas aux composantes $\dot{C}_{r_q}(t)$ de l'accélération obtenue en dérivant dans le repère absolu. Toutefois, cette différence est du deuxième ordre en fonction des déplacements, ce qui permet de ne pas en tenir compte ici.

2.3. Détermination des mouvements de plate-forme

La prédiction du comportement de plate-forme d'un navire ou d'une structure relève de la mécanique rationnelle (en dehors des aspects liés à la mécanique des fluides).

La réponse mécanique du navire ou de la structure est déterminée en écrivant que le torseur des efforts d'inertie est à tout instant égal à la somme des torseurs des efforts extérieurs. Ceci conduit à écrire l'équation de Newton réduite au centre de gravité, pour la résultante des forces :

$$(2.35) \quad M \frac{d\vec{V}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}$$

et pour le moment résultant :

$$(2.36) \quad I \frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \sum \vec{M}_{ext}$$

Expressions dans lesquelles M et I désignent respectivement les matrices de masse et d'inertie du navire ou de de la structure, $\vec{V}(t)$ le vecteur vitesse de déplacement et $\vec{\Omega}(t)$ le vecteur vitesse de rotation instantanée du navire ou de la structure.

$\sum \vec{F}_{ext}$ et $\sum \vec{M}_{ext}$ représentent le torseur des efforts extérieurs qui comprend :

- Les efforts engendrés par l'environnement marin, ce qui inclut :
 - la houle (inertie, traînée, diffraction, radiation, dérive, basse et haute fréquence, ...),
 - le vent (inertie, traînée, portance),
 - le courant (traînée, portance),
 - la glace,
 - les séismes, ...
- Les efforts de rappel ce qui inclut :
 - le rappel hydrostatique,
 - les ancrages,
 - les amarres,
 - les propulseurs de positionnement dynamique,
 - le sol, ...
- Les efforts d'amortissement ce qui inclut :
 - les ancrages,
 - les amarres,
 - les dispositifs spéciaux,
 - le sol, ...

Dans ces conditions, la réponse est composée des éléments suivants :

- La réaction statique aux torseur des efforts moyens, obtenue en équilibrant la moyenne du torseur des efforts d'excitation et la moyenne du torseur des efforts de rappel.
- Les mouvements de plate-forme à la fréquence de la houle incidente ω , obtenue en linéarisant tous les termes de l'équation de Newton.
- La réaction dynamique aux fréquences propres du navire ou de la structure, qui nécessite une approche non-linéaire.

Dans le cas d'un navire ou d'une structure unique, l'équation de Newton relative aux mouvements de plate-forme se résume alors à :

$$(2.37) \quad \{[M] + [\mathcal{M}_\omega]\} \{-\omega^2 \mathcal{H}\} + \{[\mathcal{A}_\omega] + [L_V]\} \{i\omega \mathcal{H}\} + \{[H_S] + [L_S]\} \{\mathcal{H}\} = \\ [\mathcal{F}_I] + [\mathcal{F}_D] + [\mathcal{F}_L]$$

Dans le cas de plusieurs navires ou structures, il convient d'écrire l'équation de Newton pour chaque navire et chaque structure, en son propre point de réduction, en tenant compte des couplages mécaniques et hydrodynamiques.

Les couplages mécaniques sont pris en compte par l'intermédiaire des matrices pleines et $[L_S]$ et $[L_V]$ dont la dimension est six fois le nombre de navires et de structures.

Les couplages hydrodynamiques sont pris en compte par l'intermédiaire des matrices pleines et $[M_\omega]$ et $[A_\omega]$ dont la dimension est six fois le nombre de navires et de structures.

Les mouvements du navire ou de la structure sont obtenus pour chaque degrés de liberté i sous forme d'une fonction de transfert complexe :

$$(2.38) \quad \mathcal{H}_{\zeta, \eta}(\omega) = \frac{[\mathcal{F}_I] + [\mathcal{F}_D] + [\mathcal{F}_L]}{-\omega^2 \{[M] + [M_\omega]\} + i\omega \{[A_\omega] + [L_V]\} + \{[H_S] + [L_S]\}}$$

2.4. Réponse non-linéaire

Lorsqu'une résonance du système mécanique apparaît dans le spectre de réponse, l'approche linéaire n'est plus licite. La réponse n'est plus un processus gaussien, et la prévision des valeurs extrêmes passe par une approche plus réaliste.

Si la résonance est observée à une fréquence du spectre de houle (roulis des navires), il faut prendre en compte l'amortissement d'origine visqueuse et des non-linéarités.

Le fait que les fréquences propres du système mécanique soient en dehors du spectre de houle n'exclut pas la résonance. Les principaux exemples sont :

- les mouvements horizontaux basse fréquence des structures amarrées ou ancrées (péroliers, plateformes, ...),
- les mouvements verticaux basse fréquence des structures à faible surface de flottaison (bouées, plateformes semi-submersibles, ...),
- les mouvements verticaux haute fréquence des plateformes sur lignes tendues.

2.5. Comportement de corps déformables

La prédiction du comportement de corps déformable de la poutre navire ou d'une structure relève de la mécanique des milieu continus ou mécanique des structures.

Le comportement de corps déformable des structures est déterminé au moyen de programmes de calcul de structure, fondé soit sur des méthodes d'éléments finis, soit sur des méthodes de résistance des matériaux (RDM).

Ces programmes sont actuellement très performants et acceptent des chargements non-linéaires, éventuellement de nature aléatoire, et des grandes déformations.

Dans le cas de structures treillis, les efforts dûs à la houle sont calculés par la formule de Morison sur chaque élément. Une attention particulière est portée aux risque de vibrations locales engendrées par les structures tourbillonnaires de l'écoulement (vortex shedding).

Dans le cas de structures massives, les efforts globaux et les champs de pressions dûs à la houle sont déterminés par un programme de diffraction. Les efforts locaux sont ensuite déterminés par un programme de calcul de structure dans lequel les cas de chargements sont obtenus à partir des champs de pressions.

Il faut également tenir compte des efforts dûs au vent et au courant. Dans certains cas, les efforts de rappel du sol ne doivent pas être négligés, en particulier pour la détermination des périodes propres.

- * Nodes propres

3. Roulis en eau calme

3.1. Hypothèses

Le navire est supposé stoppé dans sa position d'équilibre statique. Sous l'action d'un couple extérieur constant autour de Gx_r , il se place dans une nouvelle position d'équilibre inclinée d'un angle de gîte θ_0 .

Si ce couple est brutalement supprimé, le navire exécute, sensiblement autour de l'axe Gx_r , une série d'oscillations amorties de part et d'autre de sa position d'équilibre initial. C'est le mouvement de roulis en eau calme.

L'étude de ce mouvement, sommes toutes assez idéalisé, est d'une grande importance théorique. Sa réalisation expérimentale permet, en particulier, de déterminer, grâce au décrement logarithmique, l'amortissement de roulis pour les grandes amplitudes ; c'est l'essai d'extinction en roulis.

L'étude de ce mouvement de roulis en eau calme est grandement facilitée, si le mouvement du centre de gravité est inclu dans le plan Gy_r, z_r .

Le navire sera donc supposé être amphidrome, c'est-à-dire que l'avant et l'arrière sont symétriques. Dans ces conditions, le roulis sera totalement découplé des mouvements de cavement, de tangage et de lacet, qui restent d'ailleurs assez faibles, en eau calme, pour la plupart des navires. Le navire sera donc animé d'un mouvement transversale plan.

Si la rotation due au roulis est isocarène, le poids du navire est, pour toute inclinaison statique, équilibré par le poids de l'eau déplacé :

$$(3.1) \quad g(\rho W - M) = 0$$

et le centre de gravité ne subit aucune translation, les mouvements de pilonnement et d'embarquée sont alors inexistantes.

En fait, le roulis en eau calme n'est pas rigoureusement isocarène. La rotation se fait, au moins pour les inclinaisons statiques isocarènes, autour d'un axe passant par le métacentre différentiel m' (centre de courbure de l'enveloppe des flottaisons au voisinage de la position d'équilibre). Or ce point, bien que souvent voisin de G , en est cependant distinct.

Par ailleurs, le mouvement de roulis n'étant pas non plus une succession de positions statiques, des efforts hydrodynamiques prennent naissance et la rotation ne se fait pas rigoureusement autour de m' . Toutefois, l'axe de rotation passe par un point suffisamment proche de G pour que le pilonnement et l'embarquée restent

faibles, et que le roulis puisse raisonnablement être étudié seul en dehors de tout couplage.

3.2. Equation du roulis

L'équation du roulis traduit l'égalité, à chaque instant, entre la variation du moment cinétique et les efforts extérieurs.

Le mouvement étant plan, le torseur des efforts d'inertie se réduit à son seul premier terme linéaire :

$$(3.2) \quad I_{\theta\theta} \ddot{\theta}$$

Le torseur des efforts hydrostatiques, s'écrit en négligeant les variations du rayon métacentrique $r - a$:

$$(3.3) \quad -\rho g W(r - a) \sin \theta = -H_{\theta\theta} \sin \theta \simeq -H_{\theta\theta} \theta$$

Dans le cas où les angles de roulis ne sont pas petits, le torseur des efforts hydrostatiques ne peuvent plus être assimilés à l'expression (3.3), et il faut alors écrire un développement aux ordres supérieurs, comme le montre la figure 3.2.1 :

$$(3.4) \quad -[H_{\theta\theta}^{(1)}\theta + H_{\theta\theta}^{(3)}\theta^3 + H_{\theta\theta}^{(5)}\theta^5 + \dots]$$

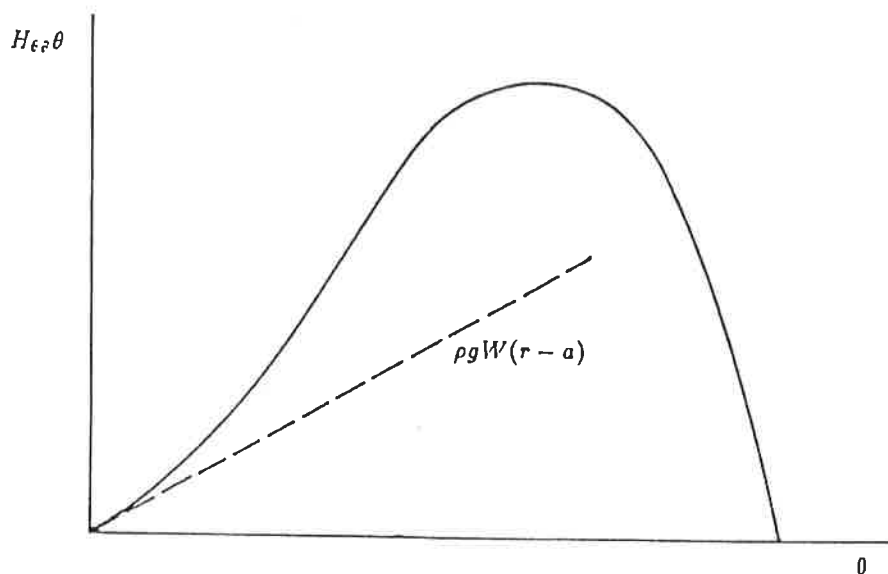


figure 3.2.1 Couple de redressement en roulis pour des inclinaisons statiques isocarènes.

En général, seuls les deux premiers termes impairs sont pris en compte (les termes d'ordres pairs étant nuls par symétrie).

En ce qui concerne les efforts hydrodynamiques dus au mouvement du navire en eau calme, ils peuvent s'écrire, d'après la théorie linéaire, sous la forme :

$$(3.5) \quad -M_{\theta\theta}\ddot{\theta} - A_{\theta\theta}\dot{\theta}$$

où $M_{\theta\theta}$ désigne le terme d'inertie d'eau ajoutée du navire (qui est, pour les navires classiques, de l'ordre de 5% à 15% de $I_{\theta\theta}$), et $A_{\theta\theta}$ son amortissement d'ondes de gravités.

En fait, comme le montre la figure 3.2.2, dans le cas du roulis, et surtout pour les grands angles, l'amortissement est essentiellement dû à la nature visqueuse du fluide.

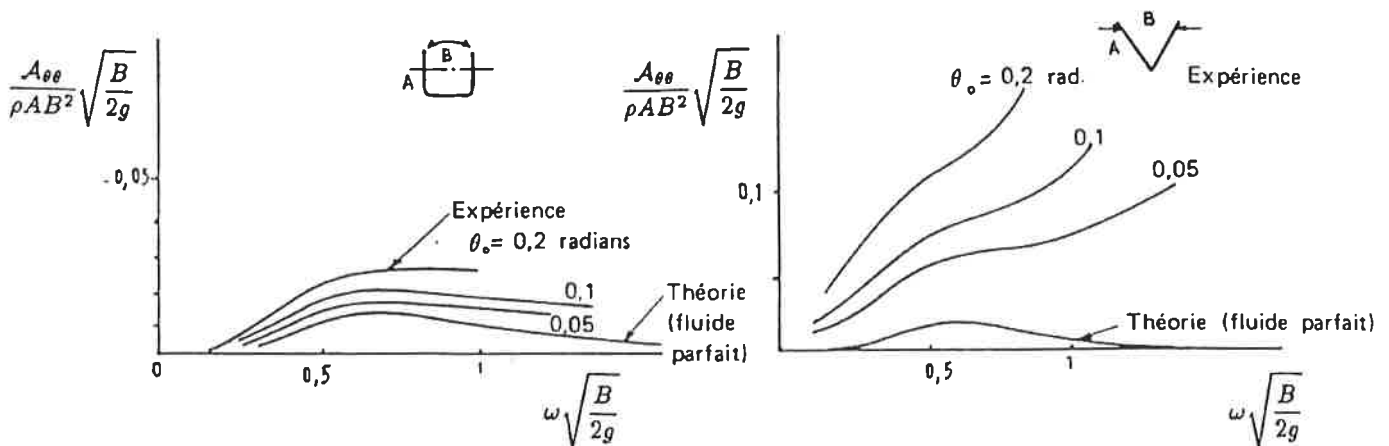


figure 3.2.2 Coefficients d'amortissement en roulis pour différentes amplitudes de roulis d'après Newman (théorie) et Vugts (expériences).

Il convient donc, d'une part de ne pas se contenter de la valeur de l'amortissement issu de la résolution en fluide parfait, et d'autre part d'adopter une formulation non linéaire qui peut soit prendre la forme classique d'un amortissement :

$$(3.6) \quad -A_{\theta\theta}^{(1)}\dot{\theta} - A_{\theta\theta}^{(2)}|\dot{\theta}|\dot{\theta}$$

ou garder une forme linéarisée dans laquelle la valeur de l'amortissement dépend de l'amplitude du mouvement de roulis. Le terme $A_{\theta\theta}^{(1)}$ est essentiellement dû à

l'amortissement d'ondes de gravité (origine potentielle) tandis que le terme $\mathcal{A}_{\theta\theta}^{(2)}$ est essentiellement dû à l'amortissement visqueux.

La linéarisation équivalente du moment d'amortissement en roulis peut être réalisée par la méthode de Lorentz qui consiste à déterminer le coefficient du fondamental, en fonction de l'élongation maximale, par projection sur les fonctions de base sinusoïdales. Il en résulte l'expression suivante :

$$(3.7) \quad -\mathcal{A}_{\theta\theta}^{(1)}\dot{\theta} - \frac{8}{3\pi}\mathcal{A}_{\theta\theta}^{(2)}|\dot{\theta}_{max}|$$

Ainsi, l'équation qui gouverne le mouvement de roulis s'écrit, en tenant compte de tous ces efforts, soit sous la forme :

$$(3.8) \quad [I_{\theta\theta} + \mathcal{M}_{\theta\theta}]\ddot{\theta} + \mathcal{A}_{\theta\theta}^{(1)}\dot{\theta} + \mathcal{A}_{\theta\theta}^{(2)}|\dot{\theta}|\dot{\theta} + H_{\theta\theta}\theta = 0$$

soit sous la forme :

$$(3.9) \quad [I_{\theta\theta} + \mathcal{M}_{\theta\theta}]\ddot{\theta} + [\mathcal{A}_{\theta\theta}^{(1)} + \frac{8}{3\pi}\mathcal{A}_{\theta\theta}^{(2)}|\dot{\theta}_{max}|]\dot{\theta} + H_{\theta\theta}\theta = 0$$

3.3. Détermination de l'amortissement – essais d'extinction

En attendant les futurs progrès des méthodes numériques, la détermination des amortissements ne peut guère être faite qu'à partir d'essais sur modèle réduit, et en particulier de l'essais d'extinction.

La figure 3.3.1 montre le tracé en fonction du temps de l'angle de roulis dans un essai d'extinction.

La résolution de l'équation du roulis sous la forme (3.9) entièrement linéarisée :

$$(3.10) \quad [I_{\theta\theta} + \mathcal{M}_{\theta\theta}]\ddot{\theta} + \mathcal{A}_{\theta\theta}(\theta_{max})\dot{\theta} + H_{\theta\theta}\theta = 0$$

$$\Delta = A_{\theta\theta}^2 - 4H_{\theta\theta} [I_{\theta\theta} + \mathcal{M}_{\theta\theta}]$$

$$\Omega = \frac{A_{\theta\theta}}{2(I_{\theta\theta} + \mathcal{M}_{\theta\theta})} \leftarrow \text{amplitude}$$

avec pour conditions initiales $\theta = \theta_0$ et $\dot{\theta} = \dot{\theta}_0 = 0$, permet d'écrire l'angle de roulis en fonction du temps sous la forme :

$$(3.11) \quad \theta(t) = \theta_0 e^{-\frac{\mathcal{A}_{\theta\theta}}{2(I_{\theta\theta} + \mathcal{M}_{\theta\theta})}t} \cos \frac{\sqrt{4H_{\theta\theta}[I_{\theta\theta} + \mathcal{M}_{\theta\theta}] - \mathcal{A}_{\theta\theta}^2}t}{2[I_{\theta\theta} + \mathcal{M}_{\theta\theta}]}$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$(3.12) \quad \theta(t) = \theta_0 e^{-\delta t} \cos \omega'_\theta t$$

où δ est le décrement logarithmique et ω'_θ est la pseudo-pulsation correspondant à la pseudo-période :

$$(3.13) \quad T'_\theta = \frac{2\pi}{\omega'_\theta} = 2\pi \frac{2[I_{\theta\theta} + \mathcal{M}_{\theta\theta}]}{\sqrt{4H_{\theta\theta}[I_{\theta\theta} + \mathcal{M}_{\theta\theta}] - \mathcal{A}_{\theta\theta}^2}} > 2\pi \sqrt{\frac{I_{\theta\theta} + \mathcal{M}_{\theta\theta}}{\rho g W(r-a)}}$$

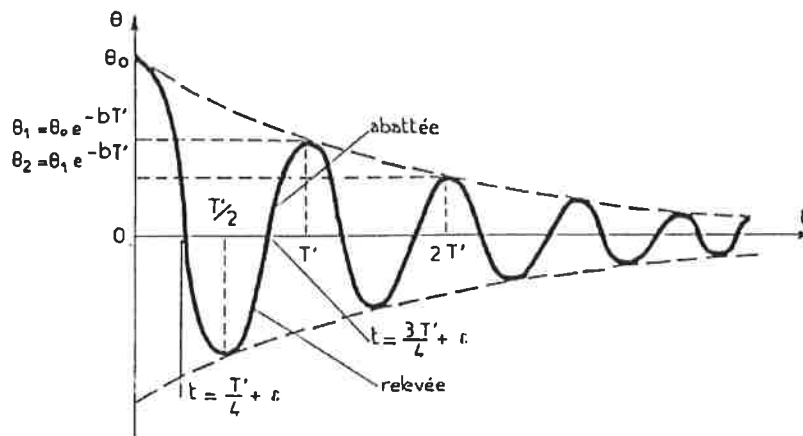


figure 3.3.1 Enregistrement d'un essai d'extinction en roulis.

En remplaçant, dans l'expression de T'_θ , le terme inertiel en fonction de δ , l'amortissement s'écrit sous la forme :

$$(3.14) \quad \mathcal{A}_{\theta\theta} = \frac{2T_\theta'^2 \delta \rho g W(r-a)}{T_\theta'^2 \delta^2 + 4\pi^2} \simeq \frac{T_\theta' \delta \rho g W(r-a)}{2\pi^2}$$

Il est alors possible de calculer l'amortissement à partir de l'enregistrement de l'essai d'extinction :

$$(3.15) \quad \delta = -\frac{1}{T'_\theta} \text{Log} \frac{\theta_{k+1}}{\theta_k}$$

en désignant par θ_k le k ème maximum de θ .

Si $\mathcal{A}_{\theta\theta}$ était une constante indépendante de l'amplitude, le décrement logarithmique devrait être indépendant des deux oscillations choisies. En fait, le décrement logarithmique décroît avec l'amplitude du roulis. Il en résulte que l'amortissement est une fonction sensiblement linéaire et croissante avec l'amplitude, c'est à dire qu'il peut se mettre sous la forme :

$$(3.16) \quad \mathcal{A}_{\theta\theta}(\theta_{max}) \simeq \mathcal{A}'_{\theta\theta}{}^{(1)} + \mathcal{A}'_{\theta\theta}{}^{(2)}|\theta_{max}|$$

3.4. Période propre de roulis

La période propre théorique de roulis est obtenue en résolvant l'équation de roulis linéarisée et sans amortissement :

$$(3.17) \quad [I_{\theta\theta} + \mathcal{M}_{\theta\theta}]\ddot{\theta} + H_{\theta\theta}\theta = 0$$

D'où :

$$(3.18) \quad T_{\theta} = 2\pi \sqrt{\frac{[I_{\theta\theta} + \mathcal{M}_{\theta\theta}]}{\rho g W(\tau - a)}}$$

Elle est légèrement plus petite que la pseudo-période du mouvement transitoire d'extinction T'_{θ} donnée par (3.13).

En considérant le coefficient d'inertie d'eau ajoutée en roulis $CM_{\theta\theta}$ obtenu en divisant l'inertie d'eau ajoutée $\mathcal{M}_{\theta\theta}$ par l'inertie propre $I_{\theta\theta}$, et le rayon de giration en roulis k_{θ} tel que l'inertie propre de roulis est égal à $\rho W k_{\theta}^2$, la période propre de roulis se met sous la forme suivante :

$$(3.19) \quad T_{\theta} \simeq 2\pi \sqrt{\frac{1 + CM_{\theta\theta}}{g} \frac{k_{\theta}}{\sqrt{\tau - a}}}$$

Comme, sur un bateau classique, $CM_{\theta\theta}$ est de l'ordre de 0.05 à 0.15, et k est de l'ordre de 28% à 33% de la largeur de flottaison ($k \simeq 0.3B$), la période propre de roulis peut être raisonnablement approchée par la formule :

$$(3.20) \quad T_{\theta} \simeq 0.65 \frac{B}{\sqrt{\tau - a}}$$

4. Mouvement du navire sur houle de travers

4.1. Décomposition du mouvement

Le navire est supposé être stoppé une houle régulière de travers et ne subir aucune autre force extérieure que celle due à la houle. En particulier, il n'est pas soumis à l'action du vent.

Alors, si la longueur d'onde de la houle est suffisamment longue par rapport aux dimensions transversales de la carène, l'équation de la mécanique s'écrit en fonction de la poussée conventionnelle :

$$(4.1) \quad M(\vec{g} - \vec{\gamma}_G) - \rho W(\vec{g} - \vec{\gamma}_Q) = 0$$

Comme à l'équilibre $M = \rho W$, il en résulte qu'à chaque instant :

$$(4.2) \quad \vec{\gamma}_G = \vec{\gamma}_Q$$

Le vecteur $(\vec{g} - \vec{\gamma}_G)$ représente l'accélération de la pesanteur apparente en G et sa direction est la verticale apparente en G .

Ainsi, le centre de gravité G du navire flottant sur une houle régulière suffisamment longue décrit, comme le centre de carène Q une orbite de même forme que celle de la houle, à la vitesse angulaire ω .

Le mouvement d'ensemble du navire est alors la superposition de deux mouvements :

- Une translation d'entraînement (cavalement et pilonnement) qui suit une orbite semblable à celle de la houle (circulaire en grande profondeur).
- Une rotation qui est le roulis du navire autour de son axe Gx_r .

Cette décomposition asymptotique des mouvements justifie le découplage de l'équation de roulis en dynamique. Dans la pratique, ce découplage reste encore valide pour des houles de longueurs d'onde courtes par rapport aux dimensions transversales de la carène.

4.2. Equation du roulis sur houle

Dans le cas du roulis forcé sur houle, le bilan des efforts est à compléter, par rapport au roulis en eau calme, par l'effort d'excitation dû à la houle. Dans le cas où la houle est longue par rapport aux dimensions transversales du navire, ce terme moteur qui constitue le second membre de l'équation s'écrit :

$$(4.3) \quad H_{\theta\theta}\xi_0 \cos \omega t = H_{\theta\theta}k \frac{H}{2} \cos \omega t$$

expression dans laquelle k désigne le nombre d'onde et H la hauteur (crête à creux) de la houle. ξ_0 représente donc la pente maximale de la houle.

Le roulis sur houle est donc régi, pour de petites amplitudes, par l'équation linéarisée suivante :

$$(4.4) \quad [I_{\theta\theta} + \mathcal{M}_{\theta\theta}]\ddot{\theta} + \mathcal{A}_{\theta\theta}\dot{\theta} + H_{\theta\theta}\theta = H_{\theta\theta}\xi_0 \cos \omega t$$

Une fois le transitoire éliminé, lorsque le régime permanent est établi, la solution générale est de la forme :

$$(4.5) \quad \theta = \theta_{max} \cos (\omega t - \psi)$$

avec :

$$(4.6) \quad \theta_{max} = \frac{\rho g W (r - a)}{\sqrt{[\rho g W (r - a) - \omega^2 [I_{\theta\theta} + \mathcal{M}_{\theta\theta}]]^2 + [\omega \mathcal{A}_{\theta\theta}]^2}} \xi_0$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\omega \mathcal{A}_{\theta\theta}}{\rho g W (r - a) - \omega^2 [I_{\theta\theta} + \mathcal{M}_{\theta\theta}]}$$

4.3. Etude de la solution forcée

Pour une valeur de ξ_0 donnée, l'amplitude du roulis passe par une valeur maximale lorsque la période de la houle est, compte tenu de l'amortissement, légèrement supérieure à la période propre non amortie en eau calme :

$$(4.7) \quad T \simeq 2\pi \sqrt{\frac{I_{\theta\theta} + \mathcal{M}_{\theta\theta}}{\rho g W (r - a)}}$$

Ce phénomène de résonance est d'autant plus marqué que l'amortissement est faible. Le déphasage de la réponse en roulis par rapport à la pente de la houle ξ_0 est alors voisin de $\frac{\pi}{2}$.

La figure 4.3.1 montre l'allure de la du module de la fonction de transfert (rapport $\frac{\theta_{max}}{\xi_0}$) en fonction de la période de la houle.

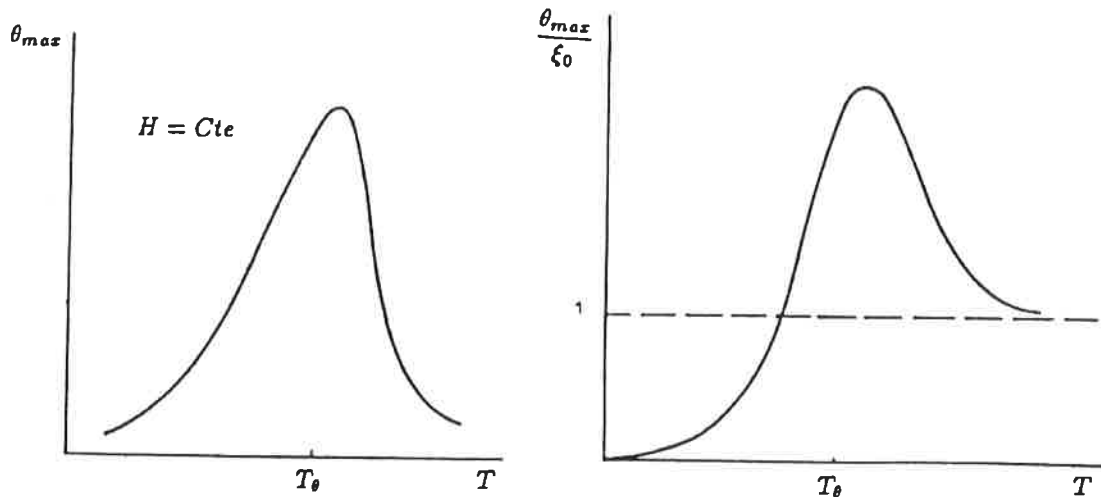


figure 4.3.1 Courbe de roulis entretenu sur houle de travers.

Lorsqu'elle est égale à la période propre de roulis du navire, la période de la houle est dite synchrone. Le module de la fonction de transfert peut alors prendre une valeur de l'ordre de cinq ou six. En toute rigueur, la valeur obtenue pour l'amplitude du roulis ne correspond plus à l'hypothèse des petits mouvements, et il faut tenir compte des termes de rappel hydrostatique et d'amortissement non-linéaires.

Lorsque la période propre de roulis est inférieure à la période de la houle, $\text{tg } \psi > 0$. La phase vérifie donc la relation :

$$(4.8) \quad 0 \leq \psi < \frac{\pi}{2}$$

Quand la période de la houle devient très grande et tend vers l'infini, ψ tend vers zéro comme ω , et θ_{max} tend vers ξ_0 comme $[1 + \alpha\omega^2 + O(\omega^4)]\xi_0$. A la limite, le navire bouchonne et son centre de gravité suit les orbites de la houle tandis que le pont reste toujours parallèle à la surface libre déformée. Cette situation est souvent celle des petits navires.

Lorsque la période propre de roulis est inférieure à la période de la houle, $\operatorname{tg} \psi < 0$. La phase vérifie donc la relation :

$$(4.9) \quad \frac{\pi}{2} < \psi \leq \pi$$

Quand la période de la houle devient très petite et tend vers zéro, $\operatorname{tg} \psi$ tend vers zéro comme $-\alpha\omega^{-1}$. ψ tend alors vers $(\pi - \alpha\omega^{-1})$, et θ_{max} tend vers zéro ξ_0 comme $\alpha\omega^{-2}\xi_0$. A la limite, le navire ne bouge plus sur la houle. Tant que la longueur d'onde reste suffisamment grande devant la largeur du navire, celui-ci est animé d'un roulis modéré. Cette situation est habituellement celle des grands navires.

La figure 4.3.2 résume cette discussion.

En fait, la solution générale du roulis forcé est la somme de la solution générale sans second membre (3.11), c'est à dire du roulis libre à la période propre du navire, et d'une solution particulière avec second membre (4.3) à la période de la houle.

Si le navire est sur une houle très régulière, le roulis propre s'amortit rapidement et le navire finit par rouler à la période de la houle. Si au contraire, le navire est sur une mer agitée, il sera très sensible aux houles de périodes proches de sa période propre qui lui impriment des coups de roulis importants, à la suite desquels s'installe un roulis propre qui s'amortit. La période propre en roulis est donc une caractéristique importante du navire.

Les périodes de la houle les plus courantes sont comprises entre 6 et 10 secondes. Afin de limiter les risques de roulis synchrone, les constructeurs de navires s'efforcent d'obtenir des périodes propres de roulis supérieures à 10 secondes pour les grands navires ($\Delta \simeq 10\,000$ tonnes), et inférieure à 6 secondes pour les petits navires ($\Delta \simeq 100$ tonnes). Toutefois, pour les navires de taille intermédiaire, ($\Delta \simeq 1000$ tonnes), ces conditions ne sont plus réalisables, et leur stabilité de plate-forme est assez médiocre sur houle de travers pour les états de mer les plus courants. Il faut alors recourir à l'utilisation de quilles de roulis et admettre certaines contraintes, relatives à la route et à la vitesse, lorsque la mer est spécialement défavorable.

4.4. Influence de la stabilité statique

La stabilité statique, nécessaire à la sécurité du navire est un élément défavorable pour le roulis. En effet, comme le montre la solution générale (4.4), lorsque la période n'est pas suffisamment grande, θ_{max} augmente avec le rayon métacentrique ($r - a$).

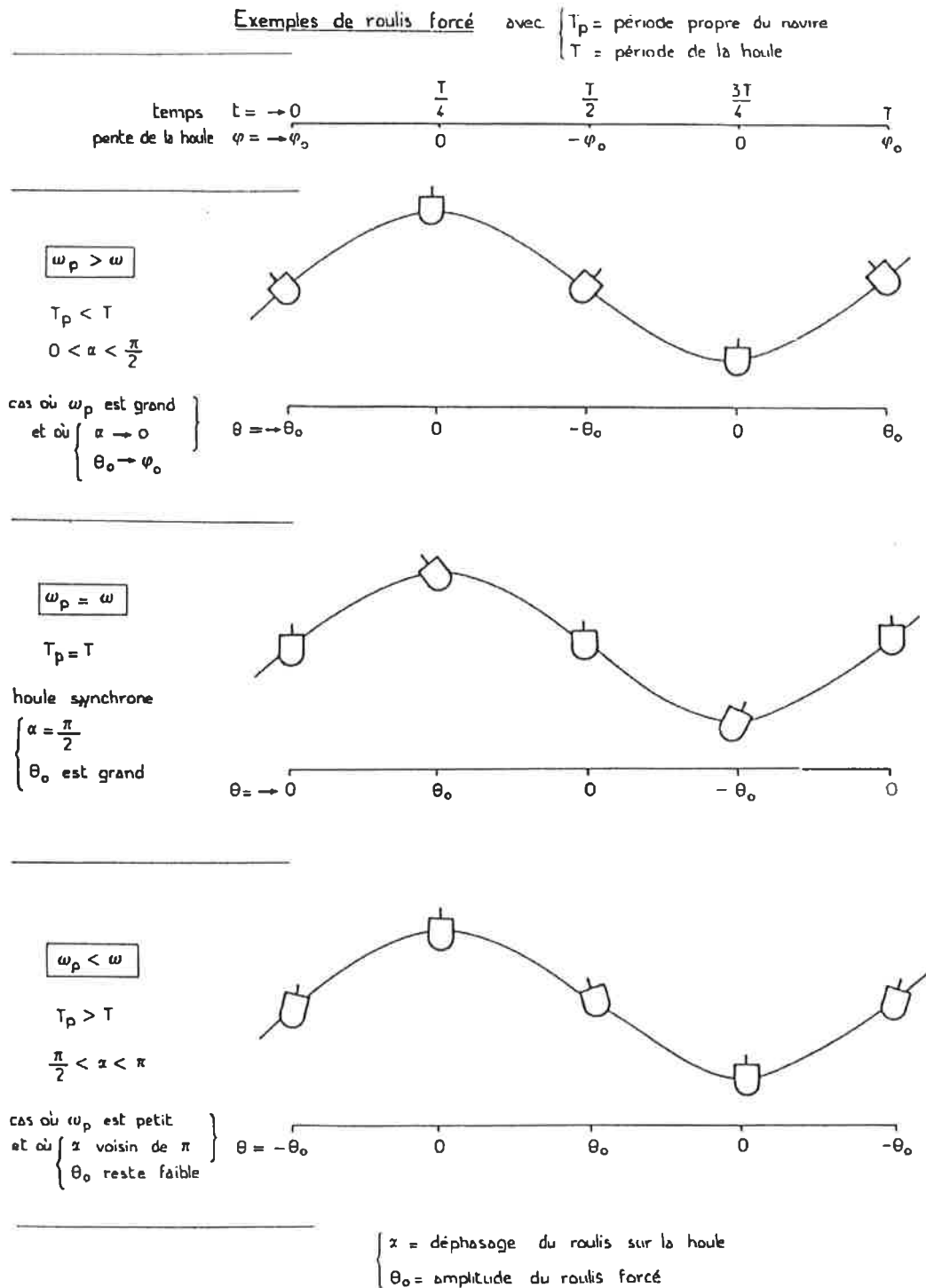


figure 4.3.2 Différentes configurations du roulis.

Par ailleurs, la période propre de roulis T_θ diminue quand le rayon métacentrique $(r - a)$ augmente.

Ainsi, plus le rayon métacentrique $(r - a)$ est grand, plus le roulis est important et plus sa période propre est petite. Le navire a alors de grandes accélérations en roulis, ce qui rend ce mouvement très dur pour les hommes et pour le matériel.

4.5. Influence des non-linéarités

Quand l'angle de roulis n'est pas suffisamment petit pour que l'hypothèse des petits mouvements ait un sens, il est nécessaire de tenir compte des non-linéarités liées, d'une part au couple hydrostatique de redressement, et d'autre part à l'amortissement qui augmente avec θ_{max} .

4.5.1. Non-linéarités hydrostatique

Le moment de redressement hydrostatique en roulis est de la forme donnée par la formule (3.4) :

$$(4.10) \quad -[H_{\theta\theta}^{(1)}\theta + H_{\theta\theta}^{(3)}\theta^3 + H_{\theta\theta}^{(5)}\theta^5 + \dots]$$

Si le premier terme d'ordre supérieur à l'unité $H_{\theta\theta}^{(3)}$ est positif, le couple de redressement hydrostatique croît, en fonction de l'angle θ , plus vite que le couple linéaire $H_{\theta\theta}^{(1)}\theta = \rho g W(r - a)\theta$. La réponse non-linéaire en roulis est alors plus raide que la réponse linéaire et la période de résonance est inférieure à la période propre T_θ du système linéaire.

Si ce terme est négatif, le couple de redressement hydrostatique croît, en fonction de l'angle θ , moins vite que le couple linéaire. La réponse non-linéaire en roulis est alors moins raide que la réponse linéaire et la période de résonance est supérieure à la période propre T_θ du système linéaire.

La figure 4.5.1 montre l'allure des courbes caractéristiques du roulis de ces différents cas.

Dans le cas où la non-linéarité du couple de redressement hydrostatique correspond à un terme $H_{\theta\theta}^{(3)}$ positif suffisamment important, et que l'amortissement de roulis est faible, il peut arriver que la courbe donnant l'amplitude du roulis en fonction de la période de la houle soit tellement déversée que, pour une période de houle T donnée, il existe trois régimes possibles de roulis.

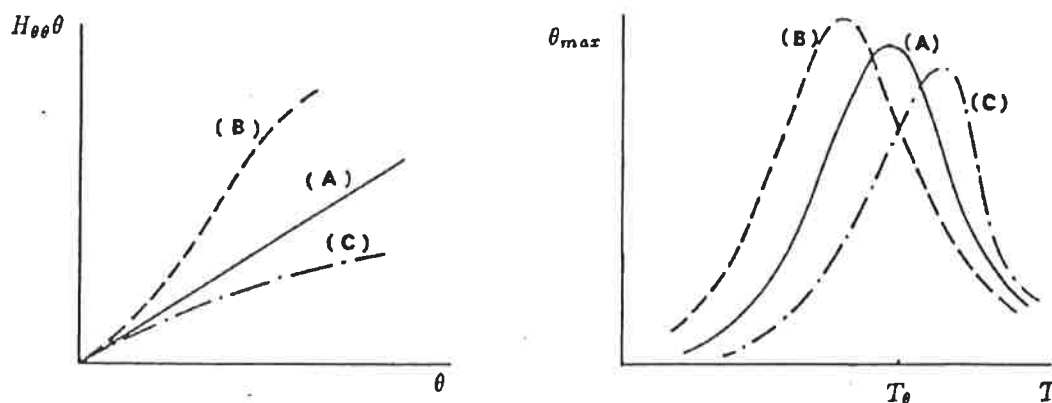


figure 4.5.1 Allure des courbes de roulis en fonction du signe des non-linéarités hydrostatiques.

La figure 4.5.2 montre ce genre de configuration dans laquelle le régime intermédiaire (2) est instable. Dans la pratique, seuls les deux régimes extrêmes stables (1) et (3) peuvent être observés. L'existence de régimes multiples de roulis reste un phénomène assez rare.

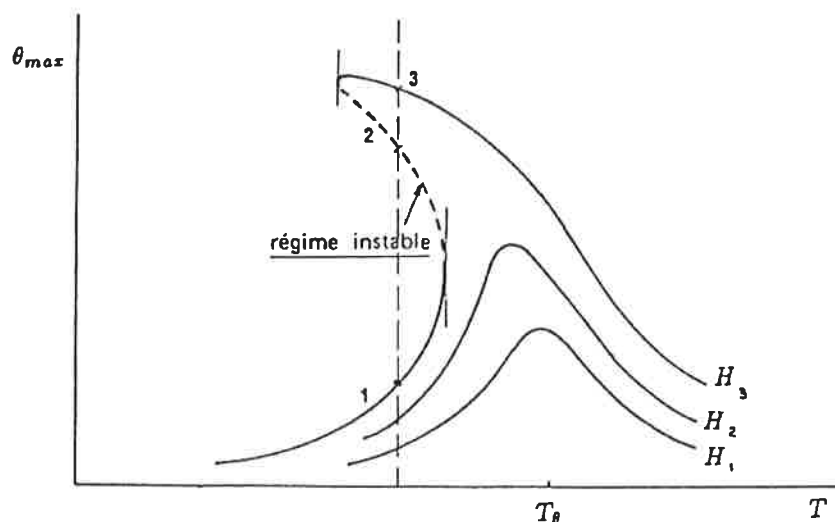


figure 4.5.2 Possibilité d'existence de trois régimes de roulis.

4.5.2. Non-linéarités d'amortissement

Comme l'amortissement augmente avec l'amplitude du roulis, la conséquence essentielle de la non-linéarité d'amortissement est que, pour une période donnée, l'amplitude du roulis θ_{max} reste inférieure à celle de l'excitation ξ_0 .

4.6. Influence de la vitesse de route

L'amortissement de roulis $A_{\theta\theta}$ augmente avec la vitesse d'avance du navire. Il en résulte que, comme le montre la figure 4.6.1, l'amplitude de roulis diminue avec l'augmentation de la vitesse du navire.

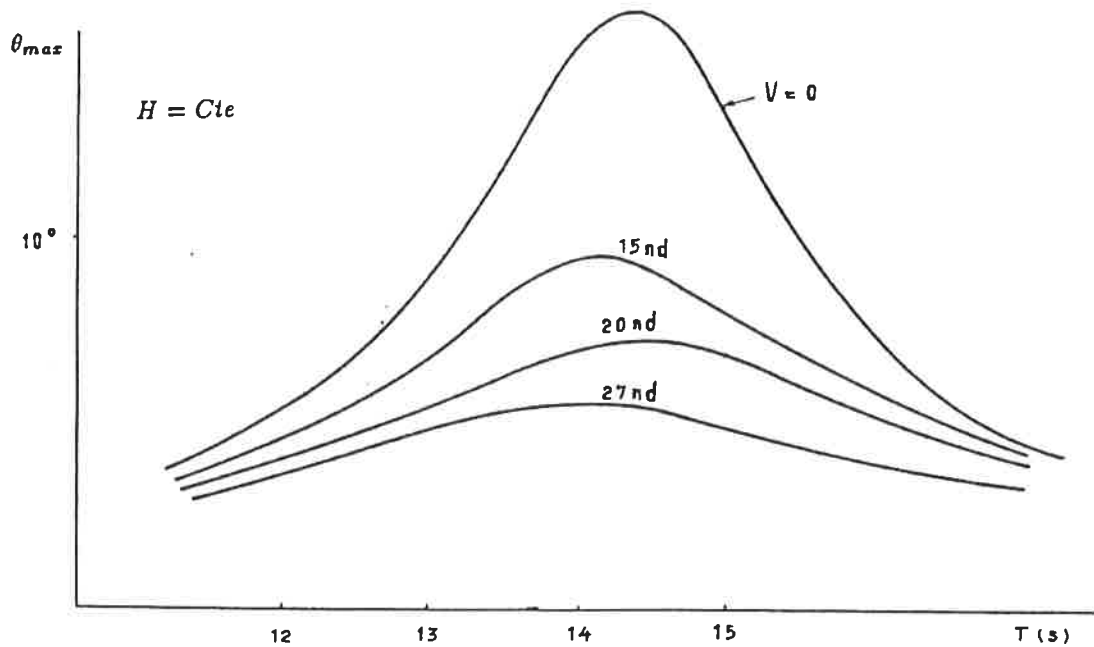


figure 4.6.1 Influence de la vitesse d'avance sur l'amplitude du roulis d'un escorteur.

4.7. Stabilité dynamique en roulis

Le navire, supposé rouler sur une mer de travers, est soumis à un couple inclinant extérieur supplémentaire C qui est généralement une fonction de la gîte θ . Si ce couple est dû à l'action du vent, il a la forme suivante : $C(\theta) = K \cos^2 \theta$.

L'équation générale du roulis sur houle s'écrit alors, sans linéariser le $\sin \theta$:

$$(4.11) \quad [I_{\theta\theta} + M_{\theta\theta}]\ddot{\theta} + A_{\theta\theta}\dot{\theta} + H_{\theta\theta} \sin \theta = H_{\theta\theta}\xi_0 \cos \omega t + C(\theta)$$

L'énergie cinétique emmagasinée dans le mouvement entre un angle θ_0 et l'angle θ s'obtient en multipliant tous les couples de cette équation par le déplacement angulaire $d\theta$ et en intégrant entre θ_0 et θ :

$$(4.12) \quad \frac{1}{2}[I_{\theta\theta} + M_{\theta\theta}](\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_0^2) = - \int_{\theta_0}^{\theta} A_{\theta\theta}\dot{\theta} d\theta - \int_{\theta_0}^{\theta} H_{\theta\theta} \sin \theta d\theta + \int_{\theta_0}^{\theta} H_{\theta\theta}\xi_0 \cos \omega t d\theta + \int_{\theta_0}^{\theta} C(\theta) d\theta$$

L'intégrale du terme d'amortissement :

$$(4.13) \quad - \int_{\theta_0}^{\theta} A_{\theta\theta} \dot{\theta} d\theta$$

représente le travail des efforts d'amortissement qui ne peut qu'être négatif, puisqu'il caractérise une transformation d'énergie cinétique en chaleur. Comme sa valeur est relativement faible et qu'il agit dans le sens de la sécurité, il peut être négligé sans dommage.

L'intégrale du terme de redressement hydrostatique :

$$(4.14) \quad \int_{\theta_0}^{\theta} H_{\theta\theta} \sin \theta d\theta$$

représente l'aire située sous la courbe de stabilité statique, entre les abscisses θ_0 et θ .

Si le couple $C(\theta)$ était nul, le théorème de l'énergie cinétique, appliqué entre $-\theta_{max}$ et $+\theta_{max}$, se résumerait à :

$$(4.15) \quad \int_{\theta_0}^{\theta} H_{\theta\theta} \sin \theta d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} H_{\theta\theta} \xi_0 \cos \omega t d\theta$$

Il en résulte que l'aire située sous la courbe de stabilité statique, entre les abscisses $-\theta_{max}$ et $+\theta_{max}$ correspond à l'énergie nécessaire à l'annulation du travail du couple d'excitation dû à la houle incidente, et n'est donc pas utilisable pour s'opposer à un autre couple tel que $C(\theta)$.

Le cas le plus défavorable est obtenu en appliquant brutalement le couple $C(\theta)$, supposé positif, à partir de la position $-\theta_{max}$. Compte tenu de l'égalité (4.15), et du fait que la vitesse angulaire est nulle lorsque le navire atteint, sous l'effet du couple $C(\theta)$, son inclinaison maximale θ_C supérieure à $+\theta_{max}$, le théorème de l'énergie cinétique conduit à écrire :

$$(4.16) \quad \int_{+\theta_{max}}^{\theta_C} H_{\theta\theta} \sin \theta d\theta = \int_{+\theta_{max}}^{\theta_C} H_{\theta\theta} \xi_0 \cos \omega t d\theta + \int_{-\theta_{max}}^{\theta_C} C(\theta) d\theta$$

Comme entre $+\theta_{max}$ et $+\theta_C$ la vitesse angulaire est faiblement positive, et que $\cos \omega t$ est négatif au voisinage de la demi période, il en résulte qu'il est possible, tout en allant dans le sens de la sécurité, de négliger le terme dû à la houle qui est d'ailleurs faible.

Ainsi, l'angle θ_C est déterminé par l'équation :

$$(4.17) \quad \int_{+\theta_{max}}^{\theta_C} H_{\theta\theta} \sin \theta d\theta = \int_{-\theta_{max}}^{\theta_C} C(\theta) d\theta$$

Si l'aire disponible sous la courbe de redressement est insuffisante, l'angle θ_C peut dépasser l'angle limite de chavirement dynamique θ_l correspondant au point où le couple de chavirement $C(\theta)$ redevient supérieur au couple résistant.

5. Stabilisation des navires soumis au roulis

5.1. Introduction

Le roulis est un mouvement peu amorti qui met en jeu des efforts hydrodynamiques, sommes toutes, modérés. Il est donc raisonnable d'envisager de le réduire en augmentant l'amortissement ou bien en créant des efforts antagonistes à ceux engendrés par la houle.

La limitation du roulis vise à améliorer le confort des passagers et des équipages, mais aussi à faciliter la mise en œuvre de certaines installations particulièrement sensibles aux mouvements de plate-forme.

Les systèmes anti-roulis peuvent être classés en deux grandes catégories :

- Les systèmes passifs qui fonctionnent soit en augmentant l'amortissement, soit en créant des efforts antagonistes à ceux engendrés par la houle. Ils sont principalement de deux types : les quilles de roulis et les citernes passives.
- Les systèmes actifs qui créent des efforts antagonistes à ceux engendrés par la houle. Ils sont de plusieurs types : ailerons, citernes, poids mobiles, à gyroscopes, mais pratiquement seuls les deux premiers sont couramment utilisés.

5.2. Les quilles de roulis

Les quilles de roulis constituent le dispositif le plus ancien pour limiter le roulis ; les travaux de Froude sont éloquents à ce sujet.

Les quilles de roulis sont des ailerons fixes, de section plate ou triangulaire, perpendiculaires à la coque. Elles sont placées aux bouchains sur 30% ou 40% de la longueur de la coque, dans la région centrale.

Elles s'opposent au mouvement de roulis en créant des remous tourbillonnaires dans lesquels se dissipe une partie de l'énergie. Leur action modifie principalement le terme d'amortissement $A_{\theta\theta}$ qui peut être multiplié par un coefficient de l'ordre de cinq. Elle modifie aussi le terme d'inertie d'eau ajoutée, mais le terme global d'inertie est rarement augmenté de plus de 5%.

Les quilles de roulis ont l'avantage d'être efficaces aussi bien en marche qu'à l'arrêt. Elles sont particulièrement efficaces sur des formes rondes.

Elles présentent l'inconvénient d'augmenter la résistance à la marche du navire, mais cette augmentation reste limitée à 1% ou 2% si elles suivent bien la direction générale des veines fluides le long de la carène.

Afin d'éviter qu'elles soient endommagées lors des accostages, leur encombrement transversal est limité pour ne pas dépasser le contour apparent du navire. Dans ces conditions, elles sont parfois coupées en plusieurs morceaux, chacun des tronçons qui ne sont plus alors dans le prolongement les uns des autres, peut être situé dans le lit du courant.

5.3. Stabilisation à ailerons mobiles

Les systèmes de stabilisation à ailerons mobiles sont des systèmes actifs qui tendent à créer des efforts antagonistes à ceux engendrés par la houle.

Les ailerons, analogues à des safrans de gouvernail, sont disposés sur chaque bord. Leur mèche est soit normale à la carène, soit horizontale. Ils se comportent comme des ailes portantes et sont pilotés par paires en opposition, de telle manière à produire un couple opposé au couple d'excitation en roulis.

L'effort de portance est de la forme :

$$(5.1) \quad F = k\rho SV^2 i$$

expression dans laquelle S est la surface de l'aileron, i son incidence, k un coefficient qui vaut π pour un aileron d'envergure infini en fluide parfait et V la vitesse du navire sur l'eau.

L'orientation des safrans est asservie au mouvement du navire en roulis (θ , $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$) de façon qu'à chaque instant le couple créé s'oppose au couple de la houle.

Ce système actif permet de réduire, à la vitesse de route, le roulis maximal jusqu'à 80%, et peut être installé sur n'importe quel navire.

Leur principal inconvénient est de n'être efficace que pour des vitesses suffisamment importantes, et donc de ne pas avoir d'effet significatif à l'arrêt, lorsque le roulis est le plus important. Par ailleurs, ils sont générateurs d'une augmentation de la résistance à la marche et peuvent être, à grande vitesse, le siège de cavitation.

Lorsqu'ils ne sont pas en fonction, ils constituent d'excellentes quilles de roulis. Toutefois, pour limiter les risques de détérioration lors des manœuvres de port, et réduire la résistance à la marche lorsqu'ils ne sont pas utiles, ils sont généralement rétractable à l'intérieur de la coque.

5.4. Les cuves anti-roulis

Lorsqu'il est nécessaire de stabiliser le navire à l'arrêt, ou à faible vitesse, il est possible de recourir à l'utilisation de cuves anti-roulis passives ou actives.

Elles sont composées de deux citernes situées symétriquement de part et d'autre du navire et reliées entre elles par un conduit de grande section.

L'eau se déplace d'une citerne à l'autre, soit de manière passive, sous la seule action du mouvement de roulis, soit de manière active, sous l'effet de pompes situées dans le conduit ou d'un contrôle par surpression et dépression au dessus des surfaces libres des citernes.

Dans le cas de cuves passives, il faut déterminer quatre paramètres qui sont :

- La période propre qui dépend essentiellement de la hauteur d'eau et de la section du conduit, et qui doit être calée à proximité de la période de résonance en roulis du navire.
- Le débit qui dépend essentiellement de la dimension du conduit.
- L'amortissement de l'ensemble qui est essentiellement réalisé par des pertes de charges dans le conduit.
- La poids d'eau qui est en général de l'ordre de 2% à 5% du déplacement du navire.

Ce système, facile à installer n'est pas onéreux s'il est prévu à l'origine de l'étude du navire. Il est facile à régler et fonctionne à l'arrêt comme en marche. Enfin, il n'augmente pas la résistance à la marche du navire.

Par contre, pour être efficace, le système doit produire une perte de stabilité statique importante, et ne peut pas être employé sans risque sur tous les navires, surtout s'il est actif.

Par ailleurs, son réglage dépend du chargement, et il augmente le déplacement du navire. Enfin, il n'est efficace que pour les grands angles de roulis, et ne permet pas, s'il est passif, de réduire le roulis à presque rien.

6. Le tangage et le pilonnement

6.1. Hypothèses

Comme le navire admet un plan de symétrie Gx_rz_r , les mouvements impairs (cavalement, pilonnement et tangage) sont complètement découplés des mouvements pairs (embardée, roulis et lacet). Dans ces conditions, sur mer de l'avant ou de l'arrière, seuls les mouvements impairs sont à prendre en compte.

En toute rigueur, le système d'équations qui régit les mouvements se compose de trois équations à trois inconnues couplées. Toutefois, l'équation du cavalement peut être, avec une bonne approximation, considérée comme indépendante des deux autres. Seuls les mouvements de pilonnement et tangage doivent être étudiés ensemble.

L'amplitude du tangage ϕ reste faible et pratiquement toujours inférieur à 10° , ce qui permet de linéariser le rappel hydrostatique en assimilant $\sin \phi$ et ϕ .

Par ailleurs, l'amortissement est essentiellement dû aux ondes de gravité sur la surface libre et non pas aux effets visqueux. Il est donc tout à fait licite de ne prendre en compte que l'amortissement linéaire obtenu en fluide parfait.

6.2. Equation de pilonnement-tangage en eau calme – périodes propres

L'équation du pilonnement-tangage traduit l'égalité, à chaque instant, entre la variation du torseur des efforts d'inertie et les torseurs efforts extérieurs.

Le mouvement étant plan, le torseur des efforts d'inertie se réduit à son seul premier terme linéaire qui s'écrit, en désignant par ζ le mouvement de pilonnement et par ϕ celui de tangage :

$$(6.1) \quad \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\zeta} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix}$$

Le torseur des efforts hydrostatiques, s'écrit en négligeant les variations du rayon métacentrique longitudinal $R - a$:

$$(6.2) \quad - \begin{bmatrix} H_{\zeta\zeta} & H_{\zeta\phi} \\ H_{\zeta\phi} & H_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \phi \end{bmatrix}$$

En ce qui concerne les efforts hydrodynamiques dus au mouvement du navire en eau calme, ils peuvent s'écrire, d'après la théorie linéaire, sous la forme :

$$(6.3) \quad - \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{\zeta\zeta} & \mathcal{M}_{\zeta\phi} \\ \mathcal{M}_{\phi\zeta} & \mathcal{M}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\zeta} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{\zeta\zeta} & \mathcal{A}_{\zeta\phi} \\ \mathcal{A}_{\phi\zeta} & \mathcal{A}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\zeta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}$$

où les \mathcal{M}_{xx} désignent les termes d'inertie d'eau ajoutée du navire, et les \mathcal{A}_{xx} les termes d'amortissement d'ondes de gravités.

Dans le cas où le navire n'est pas stoppé, les termes hydrodynamiques à prendre en compte doivent être ceux relatifs aux potentiels des vitesses solutions du problème de diffraction-radiation avec vitesse d'avance, obtenus à la pulsation de rencontre :

$$(6.4) \quad \omega_r = \omega \pm \frac{U\omega^2}{g}$$

+ par mer de l'avant et - par mer de l'arrière. Les matrices ne sont alors plus symétriques.

Le système d'équations couplées s'écrit en eau calme :

$$(6.5) \quad \left\{ \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I_{\phi\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{\zeta\zeta} & \mathcal{M}_{\zeta\phi} \\ \mathcal{M}_{\phi\zeta} & \mathcal{M}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \ddot{\zeta} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{\zeta\zeta} & \mathcal{A}_{\zeta\phi} \\ \mathcal{A}_{\phi\zeta} & \mathcal{A}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\zeta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{\zeta\zeta} & H_{\zeta\phi} \\ H_{\phi\zeta} & H_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \phi \end{bmatrix} = 0$$

Lorsque les termes de couplage entre les deux équations ne sont pas négligeables, les périodes propres de pilonnement et de tangage ne peuvent pas être calculées séparément, et il faut rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres du système complet. Toutefois, lorsque le navire ne présente pas une trop grande dissymétrie entre son avant et son arrière, surtout en ce qui concerne les termes hydrostatiques, les périodes propres sont approximativement données par :

$$(6.6) \quad T_{\zeta} = 2\pi \sqrt{\frac{M + \mathcal{M}_{\zeta\zeta}}{H_{\zeta\zeta}}}$$

$$T_{\phi} = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\phi\phi} + \mathcal{M}_{\phi\phi}}{H_{\phi\phi}}}$$

Ces périodes peuvent encore se mettre sous la forme suivante :

$$(6.7) \quad T_{\zeta} = 2\pi \sqrt{\frac{TC_B(1 + CM_{\zeta\zeta})}{gC_W}}$$

$$T_{\phi} = 2\pi \sqrt{\frac{k_{\phi}(1 + CM_{\phi\phi})}{g(R - a)}}$$

Comme le rapport entre C_B et C_W varie de 0.85 pour les navires fins à 0.97 pour les gros pétroliers, que les coefficients de masse d'eau et d'inertie ajoutée de pilonnement et de tangage sont de l'ordre de 0.75 à 0.80, et que le rayon de giration en tangage est de l'ordre de $0.25L$:

$$(6.8) \quad \begin{aligned} T_\zeta &\simeq 2.5\sqrt{T} \\ T_\phi &\simeq 0.65 \frac{L}{\sqrt{(R-a)}} \end{aligned}$$

6.3. Equation de pilonnement-tangage sur houle

La longueur d'onde de la houle n'est, en général, pas grande devant la longueur du navire, et l'hypothèse de la surface libre assimilée à un plan incliné ne peut évidemment plus être systématiquement faite.

Le navire est supposé être en translation rectiligne uniforme à la vitesse U en l'absence de pilonnement et de tangage. La houle est supposée sinusoïdale. La dénivellation de la surface libre peut alors s'écrire :

$$(6.9) \quad Z = \frac{H}{2} \cos(kx \pm \omega_r t)$$

+ par mer de l'avant et - par mer de l'arrière. Les efforts dus à la houle incidente peuvent être mis sous la forme suivante :

$$(6.10) \quad \begin{bmatrix} F_0 \cos(\omega_r t - \psi_p) \\ M_0 \cos(\omega_r t - \psi_t) \end{bmatrix}$$

L'équation du mouvement s'écrit alors :

$$(6.11) \quad \left\{ \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & I_{\phi\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{\zeta\zeta} & \mathcal{M}_{\zeta\phi} \\ \mathcal{M}_{\phi\zeta} & \mathcal{M}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \ddot{\zeta} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{\zeta\zeta} & \mathcal{A}_{\zeta\phi} \\ \mathcal{A}_{\phi\zeta} & \mathcal{A}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\zeta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{\zeta\zeta} & H_{\zeta\phi} \\ H_{\phi\zeta} & H_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \cos(\omega_r t - \psi_p) \\ M_0 \cos(\omega_r t - \psi_t) \end{bmatrix}$$

Si les couplages sont suffisamment faibles pour être négligés devant les autres termes, le pilonnement et le tangage admettent les solutions suivantes :

$$(6.12) \quad \begin{aligned} \zeta &= \zeta_{max} \cos(\omega_r t - \psi'_p) \\ \phi &= \phi_{max} \cos(\omega_r t - \psi'_t) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 \zeta_{max} &= \frac{F_0}{\sqrt{[\rho g \Sigma - \omega_r^2 [M + \mathcal{M}_{\zeta\zeta}]]^2 + [\omega_r \mathcal{A}_{\zeta\zeta}]^2}} \\
 \text{tg} (\psi'_p - \psi_p) &= \frac{\omega_r \mathcal{A}_{\zeta\zeta}}{\rho g \Sigma - \omega_r^2 [M + \mathcal{M}_{\zeta\zeta}]} \\
 \phi_{max} &= \frac{M_0}{\sqrt{[\rho g W (R - a) - \omega_r^2 [I_{\phi\phi} + \mathcal{M}_{\phi\phi}]]^2 + [\omega_r \mathcal{A}_{\phi\phi}]^2}} \\
 \text{tg} (\psi'_i - \psi_i) &= \frac{\omega_r \mathcal{A}_{\phi\phi}}{\rho g W (R - a) - \omega_r^2 [I_{\phi\phi} + \mathcal{M}_{\phi\phi}]}
 \end{aligned}
 \tag{6.13}$$

Il convient de noter que pour les navires classiques, la période propre de tangage correspond à une houle dont la longueur d'onde est de l'ordre de $\lambda \simeq 0.2L$, le risque que le tangage synchrone engendre, au point fixe, de grandes amplitudes n'existe pratiquement jamais. Ce n'est que lorsque le navire avance dans la houle que ce risque devient réel.

Lorsque le navire est situé dans une mer de l'avant ou de l'arrière, il existe des périodes pour lesquelles l'excitation en pilonnement ou en tangage passe par un maximum. Les amplitudes du pilonnement et du tangage dépendent donc essentiellement du rapport entre la longueur d'onde de la houle λ et la longueur du navire L . Ce phénomène induit des réponses très importantes en particulier lorsque la longueur d'onde de la houle est légèrement supérieure à la longueur du navire. Le phénomène de résonance est un phénomène secondaire qui peut, selon les cas, renforcer le phénomène d'excitation maximal (houle de l'avant) ou au contraire l'atténuer (houle de l'arrière).

6.4. Mouvements du navire sur mer de l'avant

6.4.1. Amplitudes du pilonnement et du tangage

Par mer de l'avant, il y a en général recouvrement des zones critiques correspondant, d'une part au maximum d'excitation de la houle :

$$(6.14) \quad 1.0 < \frac{\lambda}{L} < 1.5$$

et, d'autre part à la résonance :

$$(6.15) \quad 0.75 < \frac{T_r}{T_\zeta} < 1.25 \quad 0.75 < \frac{T_r}{T_\phi} < 1.25$$

Les mouvements de pilonnement et de tangage peuvent donc être relativement importants.

La figure 6.4.1 montre l'allure générale des modules des fonctions de transfert en pilonnement et en tangage en fonction de rapport entre la longueur d'onde de la houle et la longueur du navire.

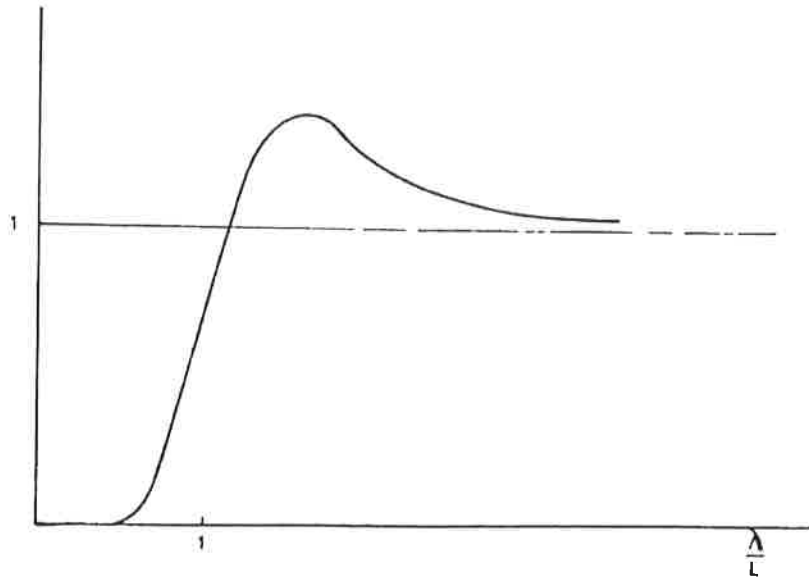


figure 6.4.1 Allure des coefficients d'amplification en pilonnement et en tangage.

Les coefficients d'amplification sont pratiquement nuls lorsque $\frac{\lambda}{L} < 0.6$. Ils tendent asymptotiquement vers 1, quand $\frac{\lambda}{L}$ tend vers l'infini, et passent par un maximum pour une valeur $\frac{\lambda}{L_M}$ incluse dans l'intervalle $1 < \frac{\lambda}{L} < 1.5$.

Cette valeur $\frac{\lambda}{L_M}$ croît avec la vitesse du navire, de même d'ailleurs que les valeurs maximales du pilonnement et du tangage.

6.4.2. Déphasage entre le pilonnement et le tangage

Le déplacement vertical $\zeta(M)$ d'un point M d'abscisse x lié au navire est donné par la relation suivante :

$$(6.16) \quad \zeta(M) = \zeta - x\phi = \zeta_{max} \cos(\omega_r t - \psi_p) - x\phi_{max} \cos(\omega_r t - \psi_t)$$

soit encore, en effectuant le changement d'origine des temps $\omega_r t - \psi_t = \omega_r t'$:

$$(6.17) \quad \zeta(M) = \zeta_{max} \cos(\omega_r t' - \delta\psi) - x\phi_{max} \cos(\omega_r t')$$

expression dans laquelle $\delta\psi$ désigne le déphasage $\psi_p - \psi_t$ entre le pilonnement et le tangage.

Le pilonnement est toujours en avance de phase sur le tangage, et le déphasage pilonnement-tangage est tel que :

$$(6.18) \quad -\frac{\pi}{2} < \psi_p - \psi_t < -\frac{\pi}{4}$$

L'amplitude $\zeta_{max}(M)$ s'obtient alors immédiatement sous la forme suivante :

$$(6.19) \quad \zeta_{max}(M) = \sqrt{\zeta_{max}^2 + x^2 \phi_{max}^2 - 2x\zeta_{max}\phi_{max} \cos \delta\psi}$$

Il est clair qu'elle passe par un minimum pour :

$$(6.20) \quad x = x_T = \frac{\zeta_{max}}{\phi_{max}} \cos \delta\psi$$

Tous les points situés à l'abscisse x_T sont des points "tranquilles". En général, x_T correspond à des points situés non loin du quart arrière du navire.

6.4.3. Le cavalement

Le cavalement est, avec une bonne approximation, découplé des deux autres mouvements de pilonnement et de tangage.

Le cavalement χ_{max} n'est guère sensible que pour une houle de longueur d'onde voisine de celle du navire, et reste, de toute façon, très modéré par mer de l'avant lorsque les crêtes et les creux se succèdent rapidement. L'amplitude relative $\frac{\chi_{max}}{L}$ est de l'ordre de $\frac{1}{50}$ pour un navire au point fixe ($U = 0$) et elle décroît quand la vitesse augmente suivant le relation théorique :

$$(6.21) \quad \frac{\chi_{max}(U)}{\chi_{max}0} = \left(\frac{\omega}{\omega_r}\right)^2$$

6.5. Mouvements du navire sur mer de l'arrière

6.5.1. Mouvements de pilonnement et de tangage

Par mer de l'arrière, il n'y a, en général, pas de recouvrement des zones critiques correspondant, d'une part au maximum d'excitation de la houle :

$$(6.22) \quad 1.0 < \frac{\lambda}{L} < 1.5$$

et, d'autre part à la résonance :

$$(6.23) \quad 0.75 < \frac{T_r}{T_\zeta} < 1.25 \quad 0.75 < \frac{T_r}{T_\phi} < 1.25$$

Les mouvements de pilonnement et de tangage sont donc pratiquement toujours relativement modérés. Ils peuvent même s'annuler lorsque la vitesse du navire est égale à la célérité de la houle. Le navire se cale alors dans une position fixe par rapport au profil de la houle. Cependant, toutes les positions possibles de calage ne sont pas stables, et en particulier la position dans laquelle l'arrière du navire se trouve sur une crête.

6.5.2. Résistance à l'avancement – cavalement

Lorsque le navire est animé d'une vitesse d'avance égale à la célérité de la houle $U = C$, sa résistance à l'avancement peut être supérieure ou inférieure à la résistance en eau calme en fonction de sa position relative par rapport au profil de la houle.

Comme le montre la figure 6.5.1, si l'avant du navire se trouve sur une crête, sa résistance à l'avancement est supérieure à la résistance en eau calme. Ce sera le contraire si l'arrière du navire se trouve sur une crête, la résistance à l'avancement pouvant même devenir négative sous l'effet de surfing.

Ainsi, sur houle de l'arrière, le cavalement peut devenir important. En effet, lorsque le navire a son arrière sur une crête, il est propulsé par la houle vers l'avant avec une vitesse supérieure à C . C'est l'inverse qui se produit une demi période apparente plus tard, quand son avant est sur une crête. Il peut en résulter un cavalement dont l'amplitude peut atteindre au moins $0.1L$.

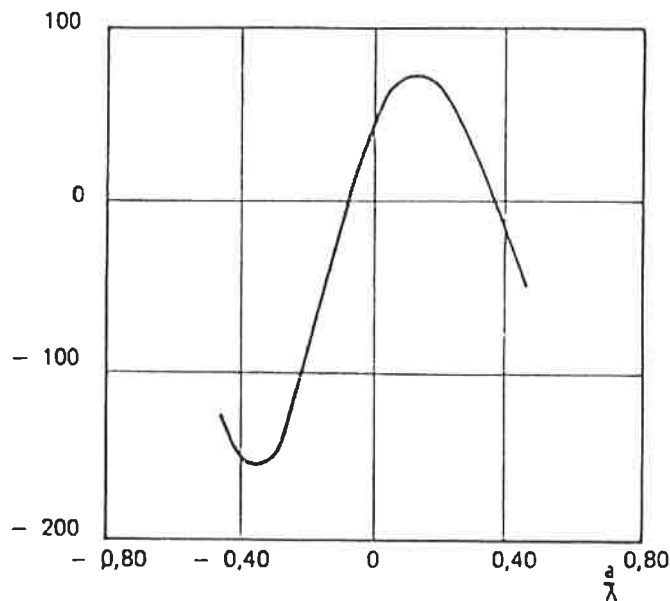


figure 6.5.1 Variation de la résistance à l'avancement en fonction de l'abscisse relative de la crête de la houle par rapport au centre de gravité du navire.

6.5.3. Risques d'embarquée et de lacet

Les possibilités d'embarquée et de lacet ne sont pas prise en compte par les équations du mouvement dans la mesure où il a été supposé que le mouvement du navire admettait, comme sa géométrie, un plan de symétrie.

Dans la réalité, le cap du navire peut être instable dans certaines configurations, et en particulier par mer de l'arrière, lorsque la vitesse du navire est proche de la célérité de la houle et que son arrière est sur une crête de la houle. Il en résulte une possibilité de lacet et d'embarquée que l'action de la barre est souvent incapable de maîtriser. Le navire s'écarte alors de son cap théorique quand son arrière est sur une crête, pour y revenir quand c'est son avant qui se trouve sur une crête.

Ce phénomène se produit surtout lorsque la vitesse du navire est proche de la célérité de la houle et que la longueur d'onde est légèrement supérieure à la longueur du navire. Il cesse dès que la longueur d'onde de la houle devient inférieure à la longueur du navire.

6.5.4. Roulis hémichrone

La navigation par mer de l'arrière peut aussi s'accompagner de mouvements de roulis très importants que la symétrie du problème par rapport au plan longitudinal du navire ne permet pas de prévoir.

Diverses hypothèses ont été avancées pour expliquer ce phénomène bien connu des marins depuis fort longtemps. Toutefois, d'après les études théoriques et expérimentales menées vers la fin des années 50, il faut retenir l'hypothèse d'un couplage non-linéaire entre le roulis et le pilonnement ou le tangage.

Les équations couplées ainsi obtenues constituent un système d'équations de Mathieu qui font apparaître des régions instables, pour lesquelles, en absence d'amortissement, l'angle de roulis croît indéfiniment en fonction du temps.

Les valeurs critiques de la périodes de rencontre correspondent alors à la relation :

$$(6.24) \quad T_r = \frac{N}{2} T_\theta$$

expression dans laquelle N est un entier positif. Mais, quelle que soit la période de rencontre, les coups de roulis se produisent avec une pseudo-période voisine de la période propre de roulis T_θ .

Des roulis très importants, de l'ordre de 30° ont pu être observés dans ces circonstances sur des petits navires (navires de pêche ou torpilleurs) pour $N=1$, soit pour :

$$(6.25) \quad T_r = \frac{1}{2} T_\theta$$

C'est un phénomène de roulis hémichrone.

7. Cas particulier des petites structures

7.1. Structures de faibles dimensions

On appelle “petit corps” ou “structures de faibles dimensions” par rapport à un champ incident donné, une structure dont les dimensions sont telles qu’on puisse raisonnablement considérer que la vitesse $\vec{V}_I(M;t)$ de ce champ incident est, à tout instant, faiblement variable dans le volume qu’elle occupe.

En d’autres termes, une structure peut être considérée comme un petit corps vis-à-vis d’un champ incident donné s’il est possible d’appliquer la formule de la moyenne pour calculer l’intégrale de la vitesse due au champ incident sur son volume \mathcal{W} et d’écrire :

$$(7.1) \quad \iiint_{\mathcal{W}} \vec{V}_I(M;t) d\mathcal{W} = \vec{V}_I(G;t) \mathcal{W}$$

De telles structures ne modifient pas (ou très peu) le champ de vagues incident. Il est alors possible de négliger les effets de surface libre et de considérer que les efforts d’inertie et de traînée sont très peu différents que ceux qui sont obtenus dans une cinématique d’écoulement donnée par la houle, mais sans surface libre.

On appelle “treillis” par rapport à un champ incident donné, une structure cylindrique de directrice quelconque dont les dimensions sont telles qu’on puisse raisonnablement considérer que la vitesse $\vec{V}_I(M;t)$ de ce champ incident est, à tout instant, faiblement variable dans chaque section du volume qu’elle occupe.

En d’autres termes, une structure peut être considérée comme un treillis vis-à-vis d’un champ incident donné s’il est possible d’appliquer la formule de la moyenne dans chaque section \mathcal{S} de son volume \mathcal{W} pour calculer l’intégrale de la vitesse due au champ incident et d’écrire :

$$(7.2) \quad \iiint_{\mathcal{W}} \vec{V}_I(M;t) d\mathcal{W} = \mathcal{S} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \vec{V}_I(M;t) dl$$

Ainsi, les écoulements hydrodynamiques en “milieu illimité” recouvrent une large gamme de problèmes et d’applications.

Bien au delà de la mécanique du vol des engins sous-marins, ils gouvernent également le comportement hydrodynamique des “petits corps”, des structures composées de treillis et des lignes d’ancrages, y compris en présence d’une surface

libre, pour peu que certains ratios soient respectés entre diverses grandeurs. Par ailleurs, en dehors des mouvements de plate-forme, l'étude des vibrations des structures marines repose, pour une grande part, sur la connaissance des écoulements en "milieu illimité".

Les principaux éléments des systèmes offshore concernés sont les piles et entretoises des plateformes à treillis (jacket, jack-up), les risers rigides ou flexibles et les lignes d'ancrage.

7.2. Efforts d'inertie

Les efforts d'inertie qui naissent au sein des différents types d'écoulement sont bien pris en compte par la théorie du fluide parfait. Il est donc souhaitable, dans un premier temps, de tirer le meilleur parti possible de la théorie des écoulements à potentiel des vitesses, avant de compléter les résultats, ainsi obtenus le plus convenablement possible, pour tenir compte d'effets visqueux qu'il nous est encore difficile d'atteindre, de manière générale, par le calcul.

Comme la présence de la surface libre peut être négligée, la structure de petite dimension est supposée être totalement immergée dans un milieu illimité. Il en résulte que le problème au limite se réduit à l'équation de Laplace et à une condition de décroissance à l'infini :

$$(7.3) \quad \begin{cases} \Delta \Phi(M;t) = 0 & M \in \mathcal{D} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n}(M;t) = \vec{V}_E(M;t) \cdot \vec{n}(M;t) & M \in \Sigma \\ \lim_{|O_0 M| \rightarrow \infty} \Phi(M;t) = \Phi_I(M;t) + O\left(\frac{1}{|O_0 M|}\right) & x_a^2 + y_a^2 + z_a^2 \rightarrow \infty \end{cases}$$

Ainsi, les résultats obtenus en diffraction-radiation s'appliquent, mais les fonctions potentiel des vitesses sont réelles et les termes d'amortissement sont tous nuls.

7.2.1. Torseur des efforts "instationnaires"

7.2.1.1. Forme générale

Comme dans le cas général de la diffraction-radiation, le torseur des efforts de pression hydrodynamique d'origine potentielle du type "instationnaire" s'expriment sous la forme générale suivante :

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{\phi\gamma} &= \rho \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Sigma} [\Phi_I(M;t) + \Phi_D(M;t)] \vec{n}(M) dS \\
&+ \rho \sum_{q=1}^6 \frac{dC_{rq}(t)}{dt} \iint_{\Sigma} \phi_q(M) \vec{n}(M) dS \\
\vec{M}_{\phi\gamma} &= \rho \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Sigma} [\Phi_I(M;t) + \Phi_D(M;t)] (\vec{GM} \wedge \vec{n}(M)) dS \\
&+ \rho \sum_{q=1}^6 \frac{dC_{rq}(t)}{dt} \iint_{\Sigma} \phi_q(M) (\vec{GM} \wedge \vec{n}(M)) dS
\end{aligned}
\tag{7.4}$$

Ou, en appliquant encore le théorème de Haskind, sous la forme généralisée :

$$\begin{aligned}
F_p &= \rho \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Sigma} \left[\Phi_I(M;t) \frac{\partial \phi_p}{\partial n}(M) - \frac{\partial \Phi_I}{\partial n}(M;t) \phi_p(M) \right] dS \\
&+ \rho \sum_{q=1}^6 \frac{dC_{rq}(t)}{dt} \iint_{\Sigma} \phi_q(M) \frac{\partial \phi_p}{\partial n}(M) dS
\end{aligned}
\tag{7.5}$$

Les termes \mathcal{M}_{pq} définis par :

$$\mathcal{M}_{pq} = -\rho \iint_{\Sigma} \phi_q(M) \frac{\partial \phi_p}{\partial n}(M) dS
\tag{7.6}$$

forment une matrice symétrique et sont désignés sous le vocable de masses et inerties d'eau ajoutée. Une fois adimensionnalisés, les termes de cette matrice s'appellent coefficients de masses d'eau ajoutée. Ils ne dépendent plus que de la forme de la structure, et sont, ici, indépendants de la période.

Il faut toujours garder présent à l'esprit que la dérivation par rapport au temps doit être faite dans le repère relatif, et que pour les trois composantes de translation, $\frac{dC_{rq}(t)}{dt}$ ne s'identifient pas aux composantes \dot{C}_{rq} de l'accélération obtenue en dérivant dans le repère absolu.

Comme la fonction potentiel des vitesses absolues du champ incident est, a priori, exprimée dans le repère absolu, il peut être intéressant d'explicitier l'expression complète de la $p^{\text{ième}}$ composante généralisée du torseur en considérant que les diverses grandeurs sont exprimées dans le repère absolu, et en dérivant donc par rapport au temps dans le repère absolu :

$$\begin{aligned}
F_p &= \rho \iint_{\Sigma} \left\{ \frac{\partial \Phi_I}{\partial t}(M;t) + \vec{V}_I(M;t) \cdot \vec{\nabla}_E(M;t) \right\} \frac{\partial \phi_p}{\partial n}(M) dS \\
&- \rho \iint_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \frac{\partial \Phi_I}{\partial t}(M;t) + \vec{V}_I(M;t) \cdot \vec{\nabla}_E(M;t) \right\} \phi_p(M) dS \\
&+ \rho \sum_{q=1}^6 \left\{ \dot{C}_{rq} - (\vec{\Omega}(t) \wedge \vec{C}(t))_{rq} \right\} \iint_{\Sigma} \phi_q(M) \frac{\partial \phi_p}{\partial n}(M) dS
\end{aligned}
\tag{7.7}$$

7.2.1.2. Forme asymptotique

Il s'agit désormais de passer en revue les divers éléments du torseur, et de déterminer les formes simplifiées sous lesquelles il peut se mettre du fait de l'hypothèse consentie.

Le premier terme de la première intégrale de (7.5) peut s'écrire :

$$(7.8) \quad \begin{aligned} \vec{F}_{\phi\gamma 1} &= \rho \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Sigma} \Phi_I(M;t) \vec{n}(M) dS \\ \vec{M}_{\phi\gamma 1} &= \rho \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Sigma} \Phi_I(M;t) (\vec{GM} \wedge \vec{n}(M)) dS \end{aligned}$$

par application de la formule du gradient à la résultante, et de celle du rotationnel au moment, il peut se transformer pour devenir :

$$(7.9) \quad \begin{aligned} \vec{F}_{\phi\gamma 1} &= \rho \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathcal{W}} \nabla_I(M;t) d\mathcal{W} \\ \vec{M}_{\phi\gamma 1} &= -\rho \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathcal{W}} \text{rot} [\Phi_I(M;t) \vec{GM}] d\mathcal{W} \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure immédiatement :

$$(7.10) \quad \begin{aligned} \vec{F}_{\phi\gamma 1} &= \rho \mathcal{W} \frac{\partial}{\partial t} \nabla_I(G;t) \\ \vec{M}_{\phi\gamma 1} &= -\rho \mathcal{W} \frac{\partial}{\partial t} \nabla_I(G;t) \wedge \vec{GQ} \end{aligned}$$

Le second terme de la première intégrale de (7.5) peut s'écrire :

$$(7.11) \quad \begin{aligned} \vec{F}_{\phi\gamma 2} &= -\rho \frac{\partial}{\partial t} \sum_{p=1}^3 \left\{ \iint_{\Sigma} \nabla_I(M;t) \cdot \left[\sum_{q=1}^3 \frac{\partial \phi_q}{\partial n}(M) \vec{e}_q \right] \phi_p(M) dS \right\} \vec{e}_p \\ \vec{M}_{\phi\gamma 2} &= -\rho \frac{\partial}{\partial t} \sum_{p=1}^3 \left\{ \iint_{\Sigma} \nabla_I(M;t) \cdot \left[\sum_{q=1}^3 \frac{\partial \phi_q}{\partial n}(M) \vec{e}_q \right] \phi_{p+3}(M) dS \right\} \vec{e}_p \end{aligned}$$

et il peut se transformer de la manière suivante :

$$(7.12) \quad \begin{aligned} \vec{F}_{\phi\gamma 2} &= -\rho \frac{\partial}{\partial t} \sum_{p=1}^3 \left\{ \vec{\nabla}_I(G;t) \cdot \sum_{q=1}^3 \left[\iint_{\Sigma} \phi_p(M) \frac{\partial \phi_q}{\partial n}(M) dS \right] \vec{e}_q \right\} \vec{e}_p \\ \vec{M}_{\phi\gamma 2} &= -\rho \frac{\partial}{\partial t} \sum_{p=1}^3 \left\{ \vec{\nabla}_I(G;t) \cdot \sum_{q=1}^3 \left[\iint_{\Sigma} \phi_{p+3}(M) \frac{\partial \phi_q}{\partial n}(M) dS \right] \vec{e}_q \right\} \vec{e}_p \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure immédiatement :

$$(7.13) \quad \begin{aligned} \vec{F}_{\phi\gamma 2} &= \sum_{p=1}^3 \left\{ \sum_{q=1}^3 \mathcal{M}_{qp} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla}_I(G;t) \cdot \vec{e}_q \right\} \vec{e}_p \\ \vec{M}_{\phi\gamma 2} &= \sum_{p=1}^3 \left\{ \sum_{q=1}^3 \mathcal{M}_{qp+3} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla}_I(G;t) \cdot \vec{e}_q \right\} \vec{e}_p \end{aligned}$$

Quant à la seconde partie de (7.5), elle se met immédiatement sous la forme :

$$(7.14) \quad F_p = - \sum_{q=1}^6 \mathcal{M}_{pq} \frac{dC_{r_q}(t)}{dt}$$

Dans ces conditions, lorsque la longueur d'onde de la houle devient très grande devant l'ensemble de la structure, et que celle-ci bouchonne, son accélération s'identifie avec la dérivée temporelle de $\vec{\nabla}_I(G;t)$. Les efforts de diffraction et de radiation s'annulent et le seul l'effort de Froude-Krilov reste non nul. Ceci montre que le torseurs des efforts de diffraction-radiation et des efforts hydrostatiques tendent vers la poussée conventionnelle.

7.2.2. Torseur des efforts "stationnaires"

7.2.2.1. Forme générale

Le torseur $\mathcal{T}_{\phi\nu}(\vec{F}_{\phi\nu}, \vec{M}_{\phi\nu})$ des efforts hydrodynamiques du type "stationnaire" est susceptible d'être transformé par application des formules classiques de l'analyse vectorielle. Il peut, en effet, se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{\phi v} &= \rho \iint_{\Sigma} \{ [\vec{V}(M;t)(\vec{V}_E(M;t) \cdot \vec{n}(M)) - (\vec{V}(M;t) \cdot \vec{V}_E(M;t)) \vec{n}(M)] \\
&\quad + [\vec{V}(M;t)(\vec{V}_R(M;t) \cdot \vec{n}(M))] \\
&\quad + [\frac{1}{2} V^2(M;t) \vec{n}(M) - \vec{V}(M;t)(\vec{V}(M;t) \cdot \vec{n}(M))] \} dS \\
(7.15) \quad \vec{M}_{\phi v} &= \rho \iint_{\Sigma} \vec{GM} \wedge \{ [\vec{V}(M;t)(\vec{V}_E(M;t) \cdot \vec{n}(M)) - (\vec{V}(M;t) \cdot \vec{V}_E(M;t)) \vec{n}(M)] \\
&\quad + [\vec{V}(M;t)(\vec{V}_R(M;t) \cdot \vec{n}(M))] \\
&\quad + [\frac{1}{2} V^2(M;t) \vec{n}(M) - \vec{V}(M;t)(\vec{V}(M;t) \cdot \vec{n}(M))] \} dS
\end{aligned}$$

La première partie du torseur se transforme immédiatement, par application de la formule de Durand, pour se mettre sous une forme généralement désignée par le nom de formules de Newman. On obtient ainsi pour sa contribution à la force résultante :

$$(7.16.1) \quad \rho \vec{\Omega}(t) \wedge \iint_{\Sigma} \Phi(M;t) \vec{n}(M) dS$$

et pour sa contribution au moment résultant :

$$(7.16.2) \quad \rho \vec{C}(t) \wedge \iint_{\Sigma} \Phi(M;t) \vec{n}(M) dS + \rho \vec{\Omega}(t) \wedge \iint_{\Sigma} \Phi(M;t) (\vec{GM} \wedge \vec{n}(M)) dS$$

Les intégrales ci-dessus ne font intervenir que le potentiel des vitesses $\Phi(M;t)$, il est donc évident qu'elles pourront être explicitées sous des formes analogues à celle du paragraphe précédent.

La deuxième partie du torseur est évidemment nulle si la carène est indéformable, ce qui est généralement le cas.

Pour transformer la troisième partie du torseur, il faut commencer par décomposer la vitesse absolue sous la forme suivante :

$$(7.17) \quad \vec{V}(M;t) = \vec{V}_I(M;t) + \vec{V}_p(M;t)$$

expression dans laquelle $\vec{V}_I(M;t)$ représente la vitesse engendrée par le champ incident, et $\vec{V}_p(M;t)$ la vitesse de perturbation.

Les intégrales qui ne font intervenir qu'un de ces deux termes, peuvent être éliminées en appliquant la formule de Durand, dans le domaine intérieur à la carène pour le champ incident, et dans le domaine l'extérieur pour le champ de perturbation. Il reste alors :

$$(7.18) \quad \begin{aligned} \vec{F}_{\phi v3} &= -\rho \iint_{\Sigma} \{ \vec{V}_I(M;t)(\vec{V}_p(M;t) \cdot \vec{n}(M)) \\ &\quad + \vec{V}_p(M;t)(\vec{V}_I(M;t) \cdot \vec{n}(M)) \\ &\quad - (\vec{V}_p(M;t) \cdot \vec{V}_I(M;t)) \vec{n}(M) \} dS \\ \vec{M}_{\phi v3} &= -\rho \iint_{\Sigma} \vec{GM} \wedge \{ \vec{V}_I(M;t)(\vec{V}_p(M;t) \cdot \vec{n}(M)) \\ &\quad + \vec{V}_p(M;t)(\vec{V}_I(M;t) \cdot \vec{n}(M)) \\ &\quad - (\vec{V}_p(M;t) \cdot \vec{V}_I(M;t)) \vec{n}(M) \} dS \end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire encore :

$$(7.19) \quad \begin{aligned} \vec{F}_{\phi v3} &= -\rho \iint_{\Sigma} \left\{ \vec{V}_I(M;t)(\vec{V}_p(M;t) \cdot \vec{n}(M)) + \vec{V}_I(M;t) \wedge (\vec{V}_p(M;t) \wedge \vec{n}(M)) \right\} dS \\ \vec{M}_{\phi v3} &= -\rho \iint_{\Sigma} \vec{GM} \wedge \left\{ \vec{V}_I(M;t)(\vec{V}_p(M;t) \cdot \vec{n}(M)) + \vec{V}_I(M;t) \wedge (\vec{V}_p(M;t) \wedge \vec{n}(M)) \right\} dS \end{aligned}$$

Ce sont, au signe près, les efforts connus sous le nom d'efforts de Lagally.

7.2.2.2. Forme asymptotique

Comme il est évident que le torseur des efforts de Lagally est asymptotiquement identiquement nul, il ne reste, pour avoir une formulation asymptotique de la totalité des efforts de pression hydrodynamique d'origine potentielle, qu'à exprimer le torseur du type "instationnaire".

Le petit corps étant supposé indéformable, la contribution du terme qui fait intervenir la vitesse relative normale est, bien sûr, nulle.

La dernière étape n'est alors plus très compliquée, puisqu'il suffit pour cela, de remplacer dans les formules précédentes (7.10), (7.13) et (7.14) la dérivation par rapport au temps, par des produits vectoriels.

On obtient donc, une fois tous les calculs effectués :

$$(7.20) \quad \begin{aligned} \vec{F}_\phi &= \frac{\partial}{\partial t} \vec{F} + \vec{\Omega}(t) \wedge \vec{F} \\ \vec{M}_\phi &= \frac{\partial}{\partial t} \vec{M} + \vec{C}(t) \wedge \vec{F} + \vec{\Omega}(t) \wedge \vec{M} \end{aligned}$$

expressions dans lesquelles \vec{F} et \vec{M} sont définis par les formules suivantes :

$$(7.21) \quad \begin{aligned} \vec{F} &= \sum_{p=1}^3 \left\{ \sum_{q=1}^3 \left[(\rho \mathcal{W} \delta_{pq} + \mathcal{M}_{pq})(\vec{V}_I(G;t) \cdot \vec{e}'_q) - \mathcal{M}_{pq}(\vec{C}(t) \cdot \vec{e}'_q) - \mathcal{M}_{pq+3}(\vec{\Omega}(t) \cdot \vec{e}'_q) \right] \right\} \vec{e}'_p \\ \vec{M} &= \sum_{p=1}^3 \left\{ \sum_{q=1}^3 \left[\mathcal{M}_{p+3q}(\vec{V}_I(G;t) \cdot \vec{e}'_q) - \mathcal{M}_{p+3q}(\vec{C}(t) \cdot \vec{e}'_q) - \mathcal{M}_{p+3q+3}(\vec{\Omega}(t) \cdot \vec{e}'_q) \right] \right\} \vec{e}'_p \end{aligned}$$

7.3. Efforts de traînée

7.3.1. Carences du modèle du fluide parfait

Il est bien évident que les résultats précédents, obtenus à partir de l'approximation du fluide parfait, ne sont que partiellement représentatifs de la réalité physique ; ils ne prennent en compte ni les effets de portance, ni les effets d'origine visqueuse, ni les efforts de propulsion ni les efforts dus au pilotage des gouvernes qu'il s'agisse d'une manœuvre ou d'un positionnement dynamique. Si de tels phénomènes doivent être pris en compte, il est indispensable de les compléter par d'autres approches, que ce soit par la mise en œuvre de programmes de calcul traitant des écoulements de fluides réels, par des essais expérimentaux sur modèle réduit libre ou captif, ou par l'expérimentation in-situ sur un prototype.

Ainsi, de manière générale, le torseur des efforts de pression peut être décomposé en plusieurs parties. Cette décomposition est étroitement liée à la physique prise en compte lors de l'analyse dimensionnelle du problème, ainsi qu'aux hypothèses faites quant aux interactions et couplages entre les différents phénomènes qui y contribuent, et au niveau d'approximation consenti lors de sa résolution.

Il convient désormais d'analyser les carences de l'approche fluide parfait dans le cas d'une carène lisse. Rappelons que cette approche fait apparaître deux types d'efforts qui résultent respectivement d'effets d'origine "instationnaire" et d'effets d'origine "stationnaire".

L'expérience montre qu'en ce qui concerne les premiers, les résultats numériques concordent bien avec et les résultats expérimentaux et ce, de manière assez générale.

Par contre, il est bien connu qu'en ce qui concerne les seconds, la théorie du fluide parfait ne permet pas toujours d'obtenir de très bons résultats. En particulier, le torseur des efforts de pression hydrodynamique "stationnaire" est identiquement nul dans le cas où le solide est entraîné dans un mouvement de translation pure - ce résultat est bien connu sous le nom de paradoxe de d'Alembert. On constate, de même, que lorsque le solide est animé d'un mouvement de rotation pure, le moment résultant n'a pas de composante colinéaire à l'axe du vecteur rotation $\vec{\Omega}$. Face à ces conséquences de la théorie du fluide parfait, il convient de se poser les questions suivantes :

- quels sont les termes qui manquent dans les expressions obtenues, et sous quelle forme faut-il les faire apparaître ?
- quel est le degré de confiance qu'on peut accorder au calcul des termes qui figurent dans ces expressions ?

Etant donné la difficulté du problème, il ne peut s'agir ici de l'aborder avec une rigueur scientifique absolue.

7.3.2. Forme du torseur des efforts stationnaires

Le torseur des efforts hydrodynamiques correspondant au régime de translation uniforme $\mathcal{T}_{vu}(\vec{F}_{vu}, \vec{M}_{vu})$, peut être déterminé expérimentalement. Il se présente classiquement sous la forme suivante :

$$(7.22) \quad \begin{aligned} \vec{F}_{vu} &= \frac{1}{2} \rho |C|^2 \sum_{p=1}^3 S_p C_p(i, \chi; Re) \vec{e}_p \\ \vec{M}_{vu} &= \frac{1}{2} \rho |C|^2 \sum_{p=1}^3 S_{p+3} L_{p+3} C_{p+3}(i, \chi; Re) \vec{e}_p \end{aligned}$$

Expressions dans lesquelles :

- i désigne l'angle d'incidence formé entre la projection du vecteur vitesse $\vec{C}(t)$ sur le plan $(G; x_r, y_r)$ et le vecteur $\vec{C}(t)$ lui-même ;
- χ désigne l'angle de dérapage formé entre l'axe Gx_r et la projection du vecteur vitesse $\vec{C}(t)$ sur le plan $(G; x_r, y_r)$;
- S_p une surface de référence arbitraire pour le mode p ;
- L_p une longueur de référence arbitraire pour le mode p .

Il convient de souligner, ici, que les fonctions C_p qui interviennent dans les expressions (7.22), sont mesurées expérimentalement en régime permanent, mais qu'elles sont souvent utilisées lorsque i , χ et \vec{C} sont des fonctions du temps !

Par ailleurs, ce type de formulation, habituel en mécanique du vol, est parfois hâtivement généralisé aux cas des écoulements plus quelconques – et c'est le cas des structures soumises à l'action de la houle – sous la forme :

$$(7.23) \quad \vec{F}_v = \frac{1}{2} \rho S C_d(i, \chi; Re) |V_R(G; t)| \vec{V}_R(G; t)$$

expression dans laquelle \vec{V}_R désigne la vitesse incidente relative du fluide ($\vec{C}(t) - \vec{V}_I(G; t)$) supposée quasi-constante dans un volume entourant la structure. Elle ne prête pourtant pas toujours convenablement au dépouillement d'essais réalisés sur modèles physiques. C'est, en particulier, le cas de corps tubulaires pour lesquels le dépouillement des essais se fait souvent beaucoup mieux en fonction de la vitesse et non de son carré. De plus, certains auteurs ont présenté des calculs qui montrent qu'il peut être judicieux d'adopter d'autres puissances.

Dans ces conditions, il sera supposé que, de manière très générale, le torseur des efforts hydrodynamiques d'origine visqueuse peut être représenté, dans la plupart des cas, par l'expression suivante :

$$(7.24) \quad \begin{aligned} \vec{F}_v &= \frac{1}{2} \rho |V_R(G; t)|^n \sum_{p=1}^3 S_p C_p^{(n)}(i, \chi; Re) \vec{e}_p \\ \vec{M}_v &= \frac{1}{2} \rho |V_R(G; t)|^n \sum_{p=1}^3 S_{p+3} L_{p+3} C_{p+3}^{(n)}(i, \chi; Re) \vec{e}_p \end{aligned}$$

voire même, par une somme de termes de différentes puissances. Dans le cas de grandes structures pour lesquelles les coefficients ne sont pas connus, il reste possible de considérer que le torseur (7.24) doit être intégré sur la carène avec des "coefficients moyens".

7.3.3. Forme du torseur global

En ce qui concerne les termes qui résultent des effets de couplage entre les mouvements de roto-translation et de rotation, il est nécessaire de faire confiance aux résultats fournis par la théorie du fluide parfait, dans la mesure où il est impossible de déterminer expérimentalement les quatre-vingt dix fonctions qui interviennent !

Il reste donc désormais à déterminer la manière dont il faut introduire les "termes correctifs" pour tenir compte des effets visqueux.

Pour cela, il ne faut pas perdre de vue que les expressions obtenues expérimentalement contiennent non seulement des informations liées à ces effets,

mais représentent également une partie des effets déjà pris en compte par le torseur des efforts hydrodynamiques d'origine potentielle du type "stationnaire".

Toutefois, les progrès réalisés au cours des dernières années par les méthodes de résolution des équations d'Euler ou de Navier-Stokes laissent prévoir qu'il sera bientôt possible de les mettre en œuvre pour déterminer l'ensemble des coefficients hydrodynamiques.

7.4. Formule de Morison

7.4.1. Formule de Morison originale

Dans le cas d'un corps fixe de centre de gravité G , placé dans un écoulement incident tel que ses variations sont à tout instant faiblement variable dans le volume qu'occupe le corps, l'effort hydrodynamique d'origine potentielle se réduit aux seuls termes "instationnaires", qui s'écrivent d'après (7.5) :

$$(7.25) \quad \vec{F}_\phi = [\rho W I + \mathcal{M}] \frac{\partial}{\partial t} \nabla_I(G; t)$$

expression dans laquelle I désigne la matrice identité, et \mathcal{M} la matrice des masses d'eau ajoutées. La prise en compte des efforts de traînée par une formulation simplifiée issue de (7.24) conduit à :

$$(7.26) \quad \vec{F}_v = \frac{1}{2} \rho |V_I(G; t)|^2 \sum_{p=1}^3 S_p C_p^{(2)}(i, \chi; Re) \vec{e}_p$$

La formule de Morison est une approche empirique de l'effort qui s'exerce sur un cylindre de section petite devant la longueur d'onde. Elle est fondée sur l'analyse correspondant à un cylindre de longueur infinie, fixe, placé perpendiculairement à l'écoulement d'un fluide en mouvement uniforme à l'infini.

La première publication concernant les efforts de la houle sur des piles de ponts fût celle de W.H. Munk qui ne considéra que l'effort de traînée résultant de l'écoulement oscillatoire de la houle à l'endroit des piles. C'est en 1949 que M.P. O'Brien a proposé d'inclure un terme additionnel pour représenter la force d'inertie due au volume d'eau déplacée. Cette suggestion a été suivie de vérifications expérimentales réalisées par un étudiant de M.P. O'Brien du nom de J.R. Morison.

Ainsi, la première chose qui est fautive dans la formule de Morison, c'est son nom !

A l'origine, la formule de Morison consiste à écrire que l'effort qui s'exerce, par unité de longueur, sur une structure cylindrique fixe profondément immergée, est perpendiculaire à son axe et peut se mettre sous la forme d'une somme de deux termes représentant respectivement l'effort de traînée et l'effort d'inertie :

$$(7.27) \quad F(t) = \frac{1}{2} \rho D C_D |u(t)|u(t) + \rho \frac{\pi D^2}{4} C_M \frac{\partial u(t)}{\partial t}$$

expression dans laquelle les différents paramètres et variables sont désignés par :

| | |
|------------------------------------|---|
| $F(t)$ | : effort normal par unité de longueur de cylindre, |
| ρ | : masse volumique du fluide, |
| D | : diamètre du cylindre, |
| $u(t)$ | : vitesse normale instantanée de l'écoulement non perturbé, |
| $\frac{\partial u(t)}{\partial t}$ | : accélération locale instantanée de l'écoulement non perturbé, |
| C_D | : coefficient de traînée, |
| C_m | : coefficient de masse ajoutée ($C_M = 1 + C_m$). |

L'utilisation de la formule de Morison nécessite deux choix préalables, d'une part, celui des coefficients, et d'autre part, celui d'un modèle théorique pour calculer la cinématique de la houle.

7.4.2. Formule de Morison généralisée

Il convient de noter que la formule de Morison est largement utilisée dans des conditions très différentes de celles fixées par les hypothèses initiales. Elle est très souvent utilisée pour estimer les efforts de la houle sur des structures de faibles dimensions devant la longueur d'onde.

Dans la pratique, un cas fréquemment rencontré est celui du mouvement périodique (de période T_s) d'une structure située dans un fluide lui même en écoulement périodique (de période T_e).

Si les deux périodes sont très différentes, il est souvent suffisant d'utiliser une formulation séparée en superposant les efforts obtenus, d'une part, pour la structure en mouvement dans le fluide au repos, et d'autre part, pour la structure fixe dans le fluide en mouvement.

Si les périodes sont de même ordre de grandeur, il est d'usage de mettre en œuvre une formulation en vitesse relative qui consiste à utiliser la cinématique de l'écoulement résultant.

Les efforts sur les petites structures sont donc exprimés à partir d'une formulation de type Morison généralisée qui s'écrit, pour un cylindre circulaire de diamètre D , par unité de longueur dl centrée en P :

$$(7.28) \quad \begin{aligned} d\vec{F}(t) &= d\vec{F}_I(t) + d\vec{F}_D(t) + d\vec{F}_T(t) \\ d\vec{M}_G(t) &= \vec{G}\vec{P} \wedge d\vec{F}(t) \end{aligned}$$

chacun de ces termes est défini ci-après :

- $dF_I(t)$ l'effort du premier ordre d'origine potentiel ou effort d'inertie. Cet effort se met sous la forme suivante (au premier ordre !) :

$$(7.29) \quad d\vec{F}_I(t) = \rho \frac{\pi D^2}{4} dl(1 + C_m) \frac{\partial}{\partial t} \vec{V}_{In}(P;t) - \rho \frac{\pi D^2}{4} dl C_m \vec{C}_n(P;t)$$

Il se compose d'une somme de trois termes qui représentent respectivement l'effort de houle incidente, l'effort de diffraction et l'effort de radiation.

- $F_D(t)$ l'effort de traînée transversal :

$$(7.20) \quad d\vec{F}_D(t) = \frac{1}{2} \rho D dl C_D |\vec{V}_{In}(P;t) - \vec{C}_n(P;t)| (\vec{V}_{In}(P;t) - \vec{C}_n(P;t))$$

- $F_T(t)$ l'effort de traînée tangential :

$$(7.31) \quad d\vec{F}_T(t) = \frac{1}{2} \rho \pi D dl C_T |\vec{V}_{It}(P;t) - \vec{C}_t(P;t)| (\vec{V}_{It}(P;t) - \vec{C}_t(P;t))$$

$V_{In}(P;t)$ et $V_{It}(P;t)$ représentent respectivement les composantes transversales et tangentielles de la vitesse incidente absolue du fluide non perturbé par la présence du solide, tandis que $\vec{C}_n(P;t)$ et $\vec{C}_t(P;t)$ sont respectivement la composante transversale et la composante tangentielle de la vitesse de la structure au point P .

Un simple coup d'œil sur les formules générales permet de se faire une idée de l'ampleur de l'approximation !

7.4.3. Coefficients d'inertie et de traînée

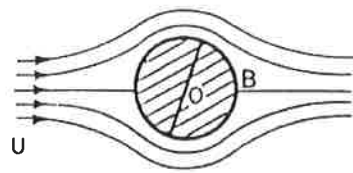
7.4.3.1. Écoulement uniforme

Dans le cas d'un écoulement uniforme, le coefficient de traînée C_D varie de manière importante en fonction du régime de l'écoulement. Ce régime dépend essentiellement du nombre de Reynolds :

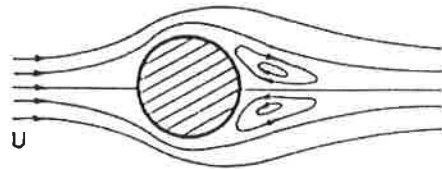
$$(7.32) \quad R_e = \frac{UD}{\nu}$$

qui caractérise le rapport des efforts d'inertie aux efforts de viscosité, ν désignant la viscosité cinématique du fluide ($\approx 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ pour l'eau pure à 20°C), et U la vitesse de l'écoulement à l'infini.

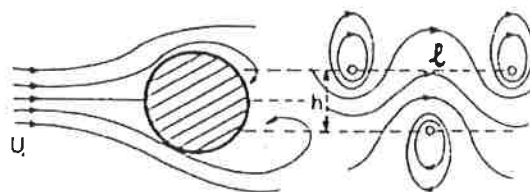
figure 7.4.1 montre les différents régimes d'écoulement qui prennent naissance autour d'un cylindre circulaire infiniment long (écoulement bidimensionnel).



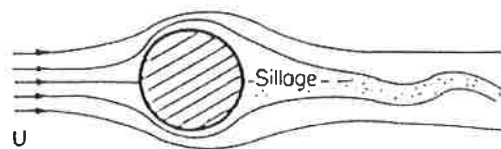
Écoulement autour d'un cylindre à faible nombre de Reynolds.



Création de tourbillons symétriques.



Allées de VON KARMAN.



Sillage turbulent.

figure 7.4.1 Evolution de l'écoulement autour d'un cylindre circulaire en fonction du nombre de Reynolds.

L'écoulement est donc caractérisé par la valeur du nombre de Reynolds. Il existe une valeur critique du nombre de Reynolds en deçà de laquelle l'écoulement est laminaire. Au delà de cette valeur l'écoulement devient turbulent, le détachement de tourbillons de la couche limite provoque un sillage turbulent.

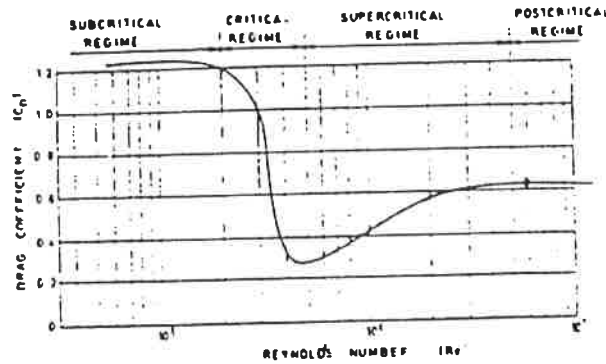


figure 7.4.2 Evolution du coefficient de traînée en fonction du nombre de Reynolds.

Cette valeur critique du nombre de Reynolds et la valeur du coefficient de traînée varient sensiblement en fonction de l'état de surface du corps (rugosité).

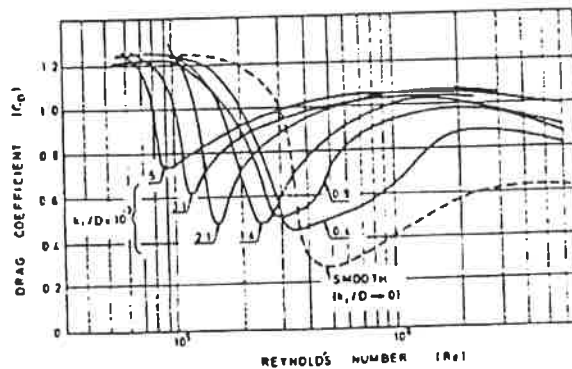


figure 7.4.3 Evolution du coefficient de traînée en fonction du nombre de Reynolds pour différents états de surface du cylindre.

7.4.3.2. Ecoulement périodique

Dans le cas d'un écoulement périodique, le nombre de Reynolds n'est pas suffisant pour distinguer l'influence de l'amplitude de celle de la période des fluctuations. Il est donc nécessaire d'introduire un deuxième nombre caractéristique de l'écoulement : le nombre de Keulegan et Carpenter défini par :

$$(7.33) \quad K_c = \frac{UT}{D}$$

Le coefficient de traînée C_D dépend donc de Re_c et K_c dont les valeurs sont calculées en prenant le maximum de la vitesse $U(t)$ sur la période T de l'écoulement.

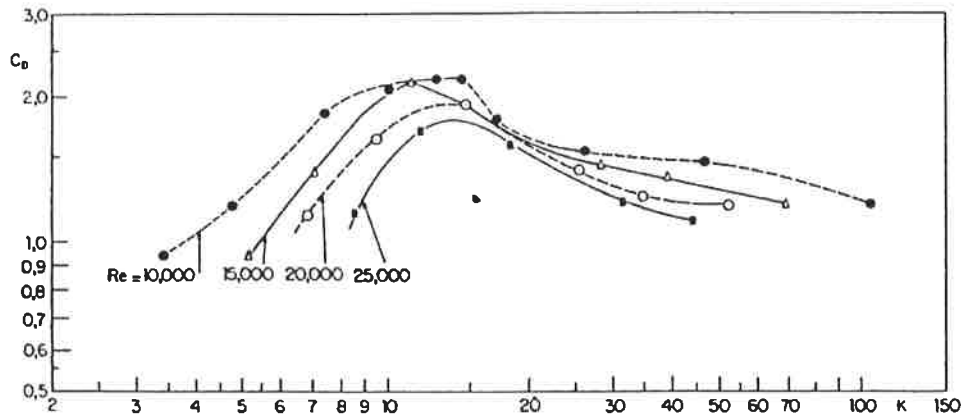


figure 7.4.4 Evolution du coefficient de traînée en fonction du nombre de Keulegan et Carpenter pour différentes valeurs du nombre de Reynolds.

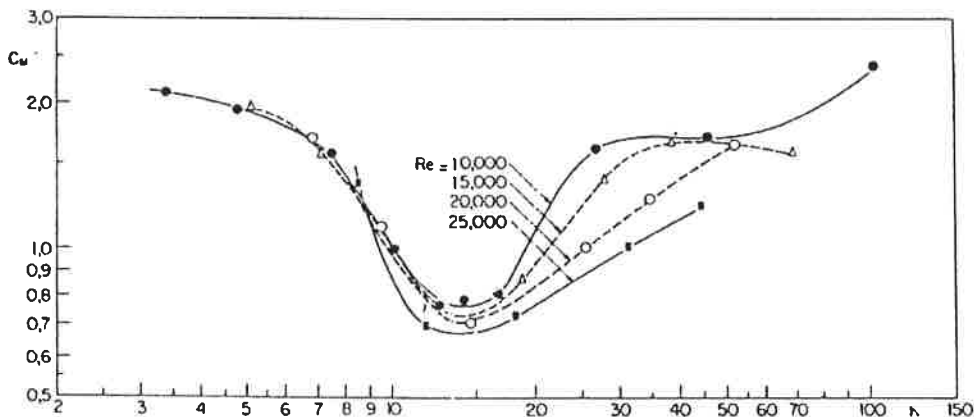


figure 7.4.5 Evolution du coefficient d'inertie en fonction du nombre de Keulegan et Carpenter pour différentes valeurs du nombre de Reynolds.

Lorsque l'écoulement est turbulent, le détachement alterné des tourbillons ("vortex shedding") engendre des fluctuations périodiques des efforts, aussi bien dans le sens de l'écoulement (traînée) que dans la direction perpendiculaire (portance) :

$$(7.34) \quad \begin{aligned} F_D(t) &= \pm \frac{1}{2} \rho D C_D U^2(t) \\ F_L(t) &= \pm \frac{1}{2} \rho D C_L U^2(t) \end{aligned}$$

Les coefficients C_D et C_L dépendent de la fréquence des détachement tourbillonnaires f_T par l'intermédiaire du nombre de Strouhal :

$$(7.35) \quad S_T = \frac{f_T D}{U}$$

qui est lui même relié au nombre de Reynolds par la vitesse de l'écoulement.

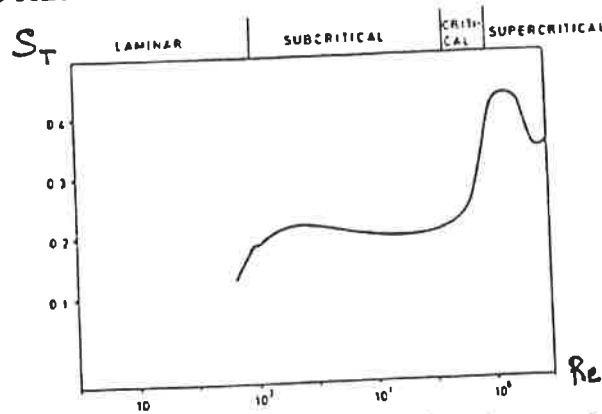


figure 7.4.6 Evolution du nombre de Strouhal en fonction du nombre de Reynolds pour un cylindre circulaire lisse.

Les figures 7.4.7 et 7.4.8 montrent l'évolution des valeurs de C_D et C_L en fonction du nombre de Reynolds.

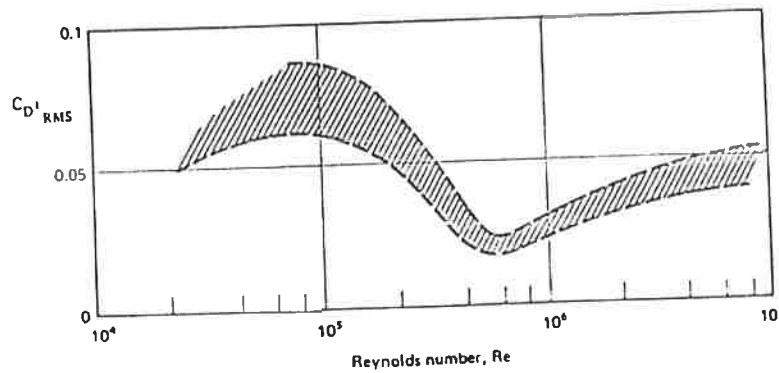


figure 7.4.7 Evolution de C_D en fonction du nombre de Reynolds pour un cylindre circulaire lisse.

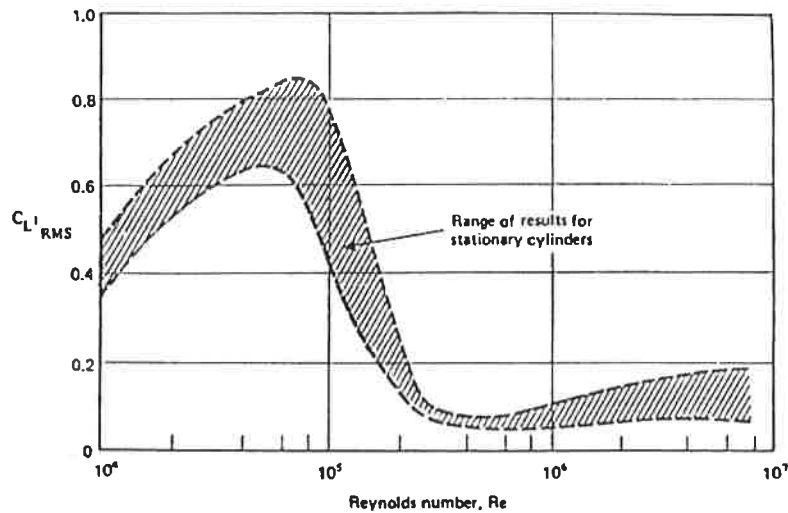


figure 7.4.8 Evolution de C_L en fonction du nombre de Reynolds pour un cylindre circulaire lisse.

7.4.4. Rapport entre les efforts d'inertie et de traînée

Dans le cas du cylindre circulaire de diamètre D plongé dans un écoulement périodique de période $T = 2\pi/\omega$ et de vitesse $U(t) = U_{max} \cos \omega t$, le rapport de la force d'inertie à la force de traînée s'écrit directement en fonction du nombre de Keulegan et Carpenter :

$$(7.36) \quad \frac{\pi D C_M \omega U_{max}}{2 C_D U_{max}^2} = \pi^2 \frac{C_M}{C_D} \frac{1}{K_c}$$

Dans ces conditions, les efforts de traînée deviennent important devant les efforts d'inertie quand K_c est grand devant l'unité, c'est à dire quand le diamètre du cylindre est petit devant l'amplitude des fluctuations de l'écoulement puisqu'alors :

$$(7.37) \quad K_c = 2\pi \frac{A}{D}$$

Lorsque les dimensions d'une structure sont grandes devant la longueur d'onde, l'épaisseur de la couche limite est faible par rapport à celles-ci, et les effets de sillage sont faibles. Les efforts de traînée sont négligeables devant les efforts d'inertie qui prédominent. L'hypothèse du fluide parfait en écoulement irrotationnel (équations de Lagrange) est justifiée.

Lorsque les dimensions d'une structure sont petites devant la longueur d'onde, l'épaisseur de la couche limite est importante par rapport à celles-ci,

et les décollements engendrent un sillage important. Les efforts d'inertie sont négligeables devant les efforts de traînée qui prédominent. L'hypothèse du fluide parfait peut encore être faite si les effets de sillage sont prédominants devant les effets de couche limite, et si les lignes de décollement sont connues (équations d'Euler) ; dans le cas contraire, il faut résoudre les équations de Navier-Stokes.

La figure 7.4.9 met en évidence les divers domaines de prépondérance de la nature des efforts subis par les éléments d'une structure soumise à l'action d'une houle incidente, en fonction de paramètres caractéristiques.

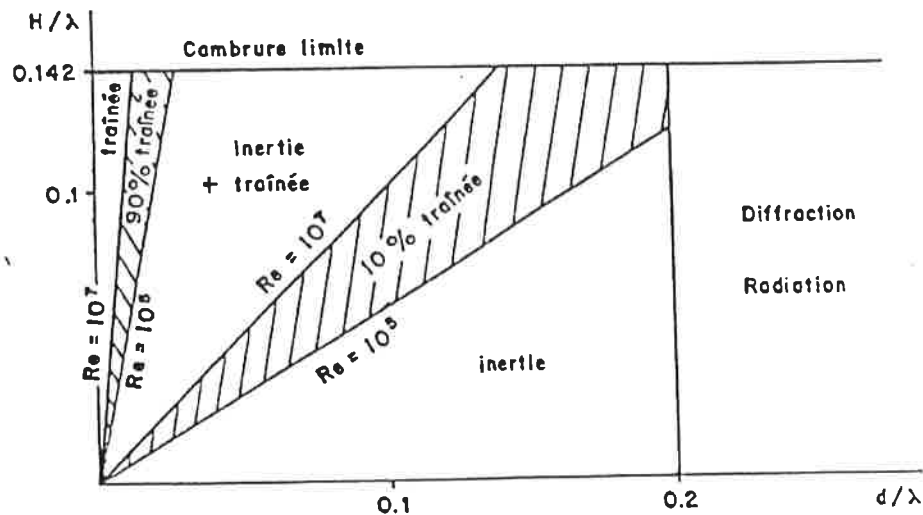


figure 7.4.9 Nature des efforts.

en rappelant les notations utilisées :

- H est la hauteur crête à creux de la houle incidente ;
- λ est la longueur d'onde de la houle incidente ;
- d est le diamètre horizontal caractéristique de la structure.

Les écoulements hydrodynamiques en "milieu illimité" recouvrent une large gamme de problèmes et d'applications.

Bien au delà de la mécanique du vol des engins sous-marins, ils gouvernent également le comportement hydrodynamique des "petits corps" ou des structures composées de treillis, y compris en présence d'une surface libre, pour peu que certains ratios soient respectés entre diverses grandeurs. Par ailleurs, en dehors des déplacements de solides indéformables (modes rigides), l'étude des vibrations des structures marines repose, pour une grande part, sur la connaissance des écoulements en "milieu illimité".

Il est donc clair qu'une bonne modélisation du comportement hydrodynamique des structures en milieu illimité, soumises à l'action d'un champ incident revêt une importance bien plus grande qu'il n'y peut paraître a priori.

7.5. Calcul des efforts sur houle régulière

Le calcul des efforts dus à la houle sur les structures de faibles dimension est réalisé par l'application de la formule de Morison généralisée. La vitesse du fluide est celle de la houle incidente au centre de carène C du corps :

$$(7.38) \quad \vec{V}_I(C;t) = \overrightarrow{\text{grad}} \Phi_I(x_c, y_c, z_c; t)$$

L'écoulement n'est pas uniforme mais périodique (sinusoïdal dans le cas du modèle de houle d'Airy).

Dans le cas de treillis, l'effort est calculé par intégration le long du cylindre, la vitesse considérée est celle de la houle incidente au centre de carène de la section du treillis, ce qui conduit, dans le cas d'un treillis vertical, à :

$$(7.39) \quad \vec{V}_I(C, z; t) = \overrightarrow{\text{grad}} \Phi_I(x_c, y_c, z; t)$$

Il convient de remarquer que le champ de vitesse est tridimensionnel, mais que la formule de Morison est appliquée dans le plan perpendiculaire à l'axe du cylindre (en dehors du frottement tangentiel).

Dans l'exemple d'un cylindre vertical fixe de section circulaire et coupant la surface libre, l'effort horizontal F_h est calculé en utilisant la vitesse horizontale de la houle incidente V_{Ih} :

$$(7.40) \quad F_h(t) = \frac{1}{2} \rho D \int_{-H_c}^{\eta(t)} C_D(z) |V_{Ih}(x_c, y_c, z; t)| V_{Ih}(x_c, y_c, z; t) dz \\ + \rho \pi \frac{D^2}{4} \int_{-H_c}^{\eta(t)} C_M(z) \frac{\partial V_{Ih}(x_c, y_c, z; t)}{\partial t} dz$$

La formule de Morison est donc appliquée en supposant l'écoulement localement bidimensionnel. Bien que les coefficients C_D et C_M varient avec le nombre de Reynolds, et donc avec la cote z , ils sont, dans la pratique, considérés comme des constantes. Ces hypothèses sont abusives mais conduisent souvent à une approximation suffisante pour les calculs de dimensionnement.

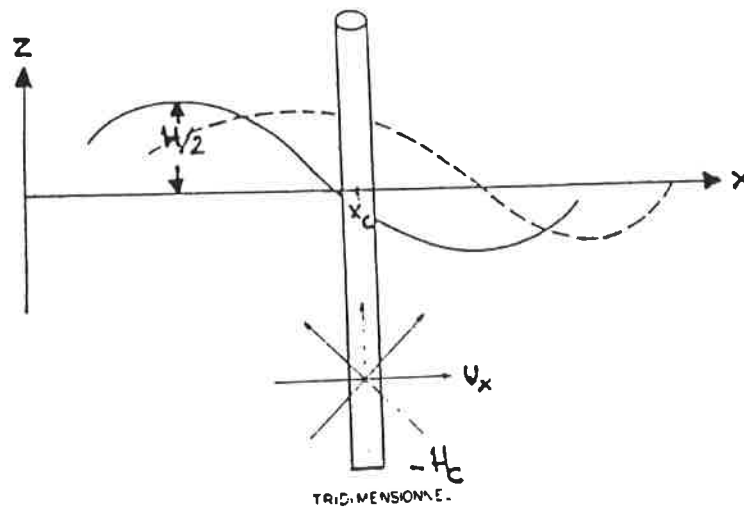


figure 7.5.1 Cylindre vertical traversant la surface libre

L'intégration est réalisée jusqu'au niveau de la surface libre $\eta(t)$, y compris dans le cas de la houle d'Airy qui a été établie en écrivant la condition de surface libre sur le plan de la surface libre au repos (plan de cote $z = 0$), ce qui entraîne que le champ de vitesse qui en résulte n'est pas défini pour $z > 0$.

Différentes méthodes d'extrapolation sont utilisées pour calculer les vitesses jusqu'à la crête des vagues (stretching) :

- extrapolation du profil,
- prolongement vertical du profil,
- translation du profil,
- affinité du profil ...

Les coefficients de masse ajoutée peuvent être calculés par un modèle de fluide parfait en écoulement irrotationnel dans un milieu illimité, mais le plus souvent ce sont des valeurs tabulées pour des corps de formes simples qui sont utilisées.

Les coefficients d'amortissement (ou de traînée) peuvent être calculés par un modèle de fluide réel dans un milieu illimité, mais le plus souvent ce sont des valeurs expérimentales tabulées qui sont utilisées. Les essais expérimentaux sur modèles réduits posent des problèmes de similitude pour l'extrapolation à l'échelle du réel. Les valeurs de C_D sont fortement influencées par :

- la forme et l'allongement du corps,
- les effets d'interaction entre éléments,
- l'état de surface du corps.

Le tableau ci-après donne des valeurs moyennes obtenues pour différents types de sections.

La formule de Morison est souvent utilisée dans le cas où la structure est en mouvement, en utilisant la formulation en vitesse relative. Ceci suppose que le mouvement soit connu, ce qui n'est, en général, pas vrai puisqu'il est induit par les efforts dus à la houle, au vent et au courant. Le calcul des efforts ne peut alors être dissocié de celui des mouvements de la structure.

Dans le cas où le treillis est incliné, l'écoulement devient tridimensionnel. Deux approches sont alors possibles :

- calcul des efforts dans le sens de la vitesse avec des coefficients estimés en tridimensionnel, puis projection sur les directions normales et tangentielle à l'axe du cylindre,
- projection de la vitesse sur les directions normales et tangentielle à l'axe du cylindre, puis calcul des efforts par la formule de Morison avec des coefficients différents dans chaque direction.

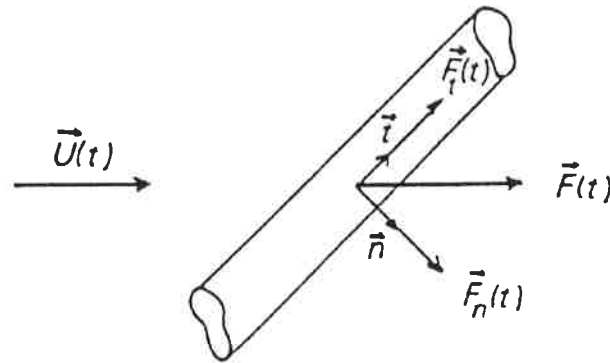
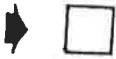


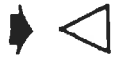

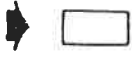




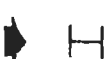


figure 7.5.2 Application de la formule de Morison dans le cas d'un cylindre en incidence oblique.

| Section | Schéma directionnel | $C_d^{(2)}$ | notes |
|--------------|---|-------------|-------------|
| Cercle | non critique | 0.6 - 1.2 | (1) |
| Duodécagone | non critique | 1.1 | (2),(3) |
| Octogone | non critique | 1.4 | (2),(3) |
| Carré |  | 2.0 | (2),(3),(4) |
| |  | 1.5 - 1.6 | (2),(3),(4) |
| Triangle |  | 1.8 - 2.0 | (2),(3),(4) |
| |  | 1.3 | (2),(3),(4) |
| Plaque plane |  | 2.0 | (2),(3) |
| Rectangle |  | 0.7 - 0.8 | (2),(3) |
| |  | 2.0 - 2.1 | (2),(3) |
| Pile Rhendex |  | 0.8 | (2),(3) |
| |  | 1.3 | (2),(3) |
| H |  | 1.6 | (2),(3) |
| |  | 1.9 | (2),(3) |

(1) Coefficient dépendant du nombre de Reynolds (0.6 pour $Re > 2.10^6$ et 1.2 pour $Re < 2.10^5$).

(2) Coefficient quasi-indépendant du nombre de Reynolds.

(3) Portance moyenne possible pour d'autres incidences.

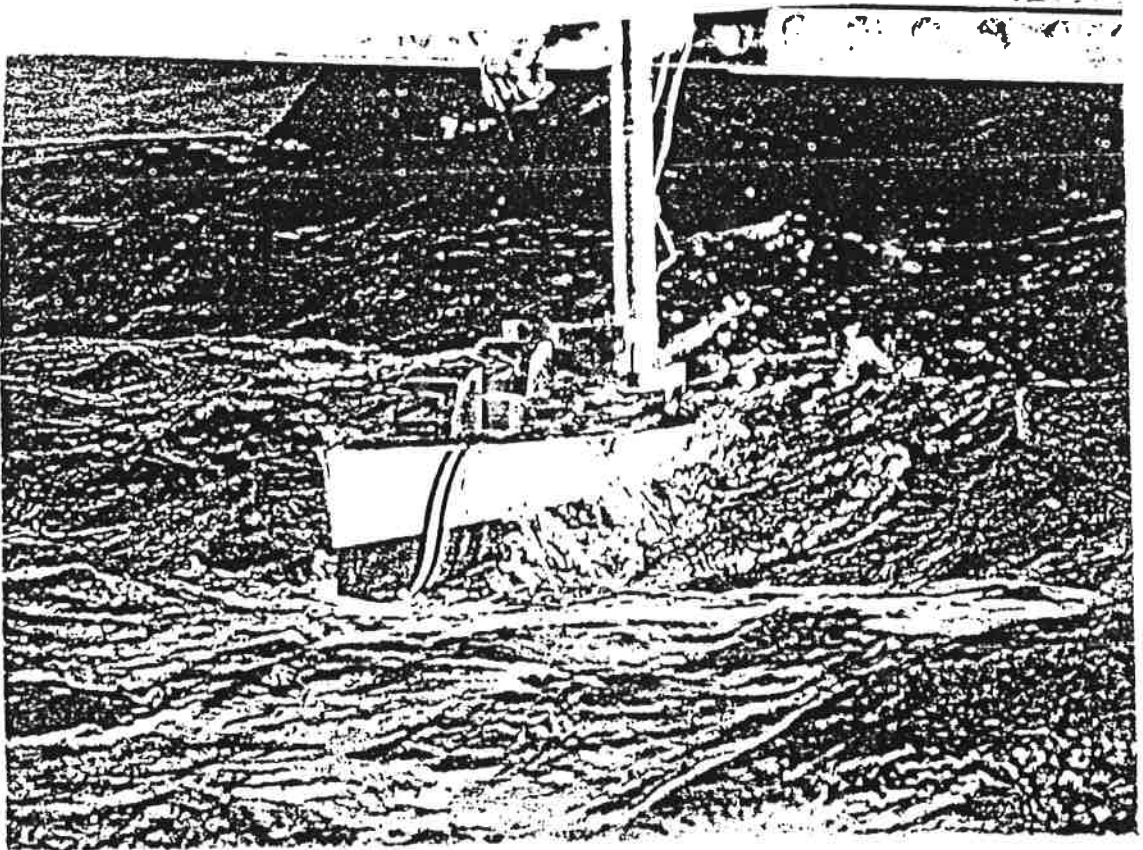
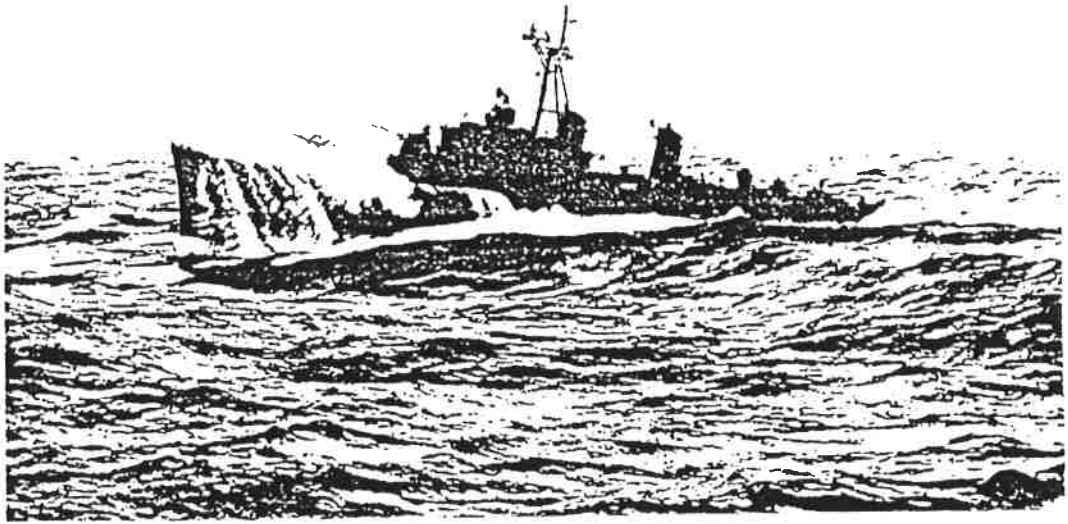
(4) Le coefficient de traînée est réduit si les coins sont arrondis.

8. Références bibliographiques

- [1] **BINDEL S.**
"Hydrodynamique navale"
Cours de l'Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées
ENSTA, Paris /1982/
- [2] **BOUGIS J.**
"Houles réelles et états de mer"
Cours de l'Université de Toulon et du Var
I.S.I.T.V., Toulon /1993/
- [3] **DEVAUCHELLE P.**
"Dynamique du navire"
Bibliothèque de l'Institut Français d'Aide à la Formation
Professionnelle Maritime.
Masson, Paris /1986/
- [4] **FALTINSEN O.M.**
"Sea loads on ships and offshore structures"
Ocean technology series
Cambridge University Press, Cambridge /1990/
- [5] **SARPKAYA T. and ISAACSON M.**
"Mechanics of wave forces on offshore structures"
Van Nostrand Reinhold Company Inc., New York /1981/
- [6] **SERVIERES R.**
"Connaissance du navire - tome 1 : théorie du navire"
Cours de l'Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées
ENSTA, Paris /1973/
- [7] **SUSBIELLES G. et BRATU C.**
"Vagues et ouvrages pétroliers en mer"
Publications de l'Institut Français du Pétrole
Editions Technip, Paris /1981/

Partie 03

Tenue à la mer sur houle irrégulière



1. Introduction

La tenue à la mer d'un navire ou d'une structure désigne un ensemble complexe de qualités essentielles, relatives à son comportement et à sa capacité, pour un état déterminé de la mer, à remplir sa mission.

Elle concerne d'abord les mouvements de plate-forme qui doivent être limités d'une part pour le confort des passagers et des équipages, et d'autre part pour la mise en œuvre des installations (télépointeurs, décollage et apontage d'avions et d'hélicoptères, relevés océanographiques, forages et travaux à la mer). Au delà d'une certaine limite, c'est la sécurité même du navire ou de la structure qui peut être mise en cause.

Il faut également limiter les risques de tossage et d'embarquements d'eau générateurs de chocs hydrodynamiques et du fouettement des structures, d'entraves à la navigation, d'alourdissement avec des effets de carène liquide et qui peuvent produire le flambement de barrots ou d'épontilles lorsque des paquets de mer tombent sur le pont.

Il est, par ailleurs, nécessaire d'éviter que les contraintes dans la charpente, efforts d'ensemble ou fatigues dues à des vibrations, ne dépassent des contraintes admissibles.

Il s'agit enfin, soit de maintenir les performances propulsives de manière que la vitesse sur houle soit réduite le moins possible, soit d'assurer la tenue des ancres.

2. Les différents aspects de la tenue à la mer

2.1. Les mouvements de plate-forme et leurs conséquences

Les mouvements de plate-forme constituent l'aspect le plus apparent du comportement à la mer d'un navire ou d'une structure marine. Ils ne représentent pourtant pas, intrinsèquement, les facteurs les plus contraignants pour la tenue à la mer.

Les conséquences directes des mouvements de plate-forme sont :

— L'inclinaison du navire ou de la structure, surtout sensible au roulis pour les navires et très gênante au delà d'une certaine valeur (de l'ordre de 10°) pour le confort des passagers et de l'équipage, et pour la mise en œuvre de certaines installations, où même, dans les cas extrêmes, pour la sécurité.

— Les accélérations dues aux mouvements de roulis, de pilonnement et surtout de tangage qui fatiguent les hommes et le matériel. L'accélération verticale est, par ses effets sur l'oreille interne, la principale responsable du mal de mer (et de façon plus générale du mal des transports sous différentes formes). La figure 2.1.1 donne les fractions de personnels touchés par le mal de mer en fonction de la période et du niveau d'accélération verticale qu'ils subissent. Ces courbes ont été établies par l'US Navy et, il faut noter qu'elles concernent une population d'hommes en bonne santé et en âge de servir à la mer.

— Les mouvements d'embarquée et de lacet induisent de réelles difficultés de tenue de route pour les navires.

Le tableau 2.1.1 donne des critères limites d'opérabilité pour les navires d'après la conférence des pays nordiques (Nordforsk 1987). RMS signifie "root mean square". La valeur significative est obtenue en multipliant la valeur H_{RMS} par $\sqrt{2}$.

Le tableau 2.1.2 donne des critères limites d'opérabilité correspondant au roulis des navires d'après la conférence des pays nordiques (Nordforsk 1987).

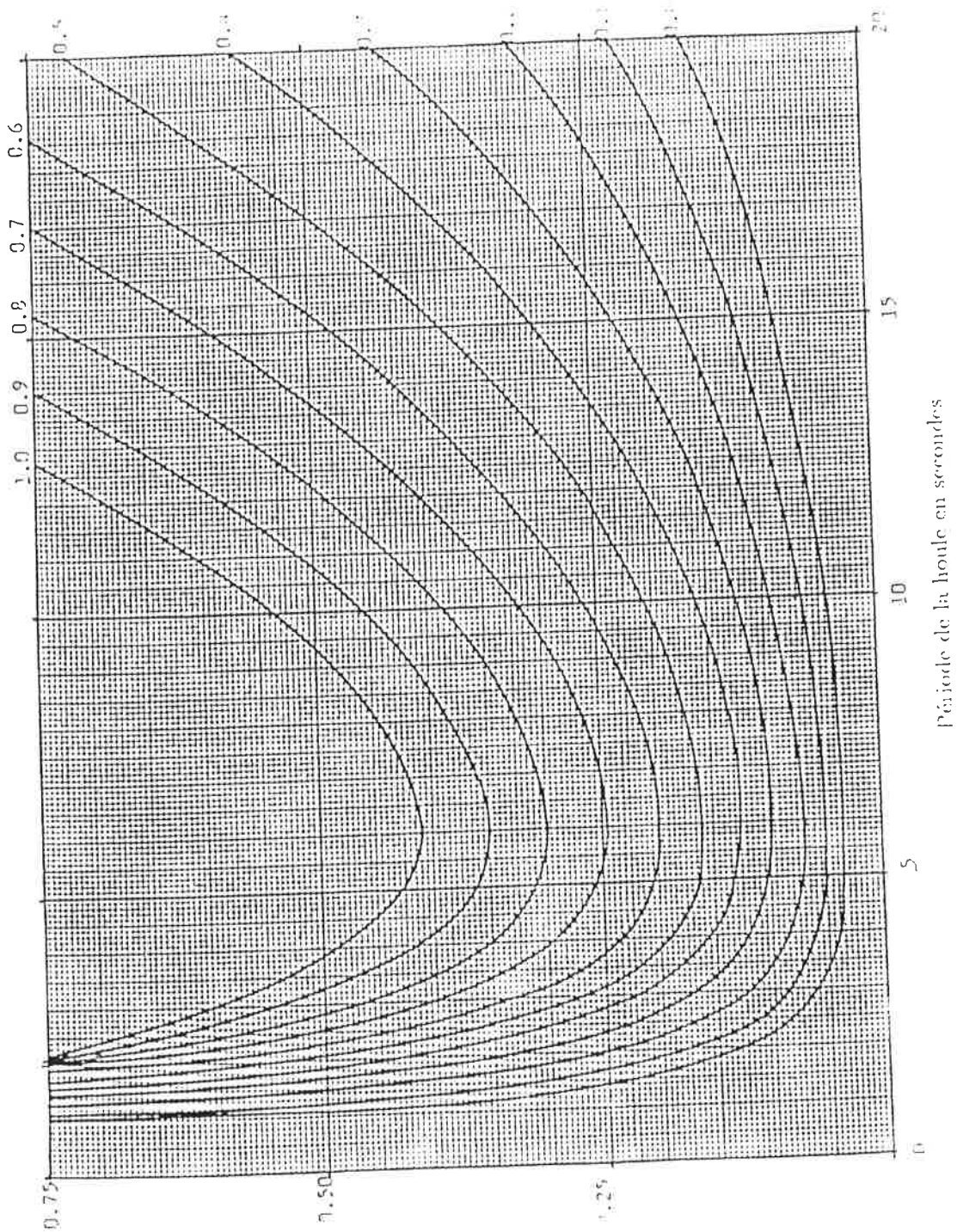
| Critères | Navires marchands | Navires de guerre | Petits navires rapides |
|--|--|-------------------|------------------------|
| Accélération verticale à la PP avant (RMS) | 0.275 g ($L \leq 100m$) 0.050 g ($L \geq 330m$) | 0.275 g | 0.275 g |
| Accélération verticale à la passerelle (RMS) | 0.150 g | 0.200 g | 0.275 g |
| Accélération latérale à la passerelle (RMS) | 0.120 g | 0.100 g | 0.100 g |
| Roulis (RMS) | 6.0° | 4.0° | 4.0° |
| Probabilité de tossage (chocs hydrodynamiques) | 0.03 ($L \leq 100m$) 0.01 ($L \geq 300m$) | 0.03 | 0.03 |
| Probabilité d'envahissement du pont par les vagues | 0.05 | 0.05 | 0.05 |

Pour les navires marchands dont la longueur est comprise entre 100m et 300 ou 330 mètres, les valeurs à retenir sont obtenues par interpolation linéaire.

tableau 2.1.1

| Critères | accélération verticale | accélération latérale | Roulis |
|------------------------|------------------------|-----------------------|--------|
| Travail manuel léger | 0.20 g | 0.10 g | 6.0° |
| Travail manuel lourd | 0.15 g | 0.07 g | 4.0° |
| Travail intellectuel | 0.10 g | 0.05 g | 3.0° |
| Transport de passagers | 0.05 g | 0.04 g | 2.5° |
| Croisières | 0.02 g | 0.03 g | 2.0° |

tableau 2.1.2



Accélération verticale en fractions de g

figure 2.1.1 Fractions de personnels touchés par le mal de mer en fonction de la période en secondes, et du niveau d'accélération verticale en fractions de g.

2.2. La résistance de la charpente du navire et des structures

2.2.1. Les efforts dus à la houle

La coque d'un navire peut être assimilée à une poutre ("la poutre navire") qui travaille essentiellement en flexion longitudinale alternée par mer de l'avant ou par mer de l'arrière, les crêtes et les creux de la houle étant alors sensiblement perpendiculaires à l'axe du navire.

L'effort tranchant vertical (porté par Gz_r) et le moment fléchissant horizontal et transversal (porté par Gy_r) résultent de l'inégalité entre la répartition des poids des éléments propres du navire et de sa cargaison d'une part, et la répartition des poussées hydrostatique et hydrodynamique d'autre part.

La flexion est maximale lorsque la longueur d'onde de la houle est approximativement égale à la longueur du navire :

— Lorsque l'avant et l'arrière sont simultanément dans un creux, et le milieu sur une crête, la poutre navire prend de l'arc. Le pont travaille en traction tandis que les fonds travaillent en compression.

— Lorsque l'avant et l'arrière sont simultanément sur une crête, et le milieu dans un creux, la poutre navire prend du contre-arc. Le pont travaille en compression tandis que les fonds travaillent en traction.

Simultanément, des contraintes de cisaillement apparaissent dans les murailles.

Par mer de trois quarts avant et surtout de trois quarts arrière, la poutre navire subit des flexions horizontales et des efforts de torsion qui éprouvent particulièrement les navires à ponts ouverts comme les porte-conteneurs.

La coque d'un navire subit également, dans certaines circonstances, comme lors de l'échouage en bassin, des contraintes engendrées par la flexion transversale (moment fléchissant porté par Gz_r) qui tendent à déformer les sections transversales.

La poutre navire étant appelée à subir au cours de sa durée de vie un très grand nombre de cycles de contraintes alternées, les contraintes admissibles ne sont pas déterminées par la résistance à la rupture ou à la limite élastique, mais par la résistance à la fatigue. Il en résulte que, dans le cadre d'une exploitation prévisionnelle, la durée de vie du navire est un élément déterminant de son échantillonnage. Que dire alors de navires, qui ayant largement dépassé leur durée de vie prévue de l'ordre de quinze à vingt ans, continuent d'être exploités intensivement, comme c'est le cas de certains pétroliers âgés de plus de trente ans ? Il faut également noter que la répartition des frets à chaque chargement peut avoir une influence importante sur les efforts et les contraintes que le navire doit subir.

2.2.2. Le tossage

Le tossage désigne les chocs hydrodynamiques (slamming) que subit le navire sur le fond de ses parties avant lorsque celles-ci sortent complètement de l'eau sous l'action de la houle.

Si la vitesse relative entre le navire et la surface libre est suffisamment élevée au moment du contact, la force d'impact qui en résulte peut endommager localement le navire, et tout au moins en réduire brusquement la vitesse et propager dans la poutre navire des vibrations importantes qui constituent le phénomène de fouettement (whipping).

Bien qu'il ne soit pas rare, le fouettement de la coque est un phénomène qui est resté longtemps mal connu. Chaque impact engendre un frémissement qui court le long du navire, suivi par une rapide vibration de la structure la coque. Si ils ont une grande amplitude, ces coups peuvent causer de sérieux dommages de structure, et même si ils sont peu importants mais fréquents, ils affaiblissent la coque par un phénomène de fatigue.

Le tossage a donc principalement deux conséquences néfastes :

— Des impulsions de pression excessives, pouvant dépasser 10 bars, se produisent sur le fond de la partie avant de la coque. Elles sont susceptibles de provoquer des déformations permanentes. C'est l'effet essentiel à considérer pour un navire de charge.

— Des contraintes importantes se propagent dans la charpente du navire à des fréquences de plusieurs hertz. Elles constituent un danger particulièrement important pour les navires longs et minces comme les porte-avions ou les escorteurs. La figure 2.2.1 montre que l'amplitude de la contrainte de fouettement est du même ordre de grandeur que celle due à la houle.

Dans le cas d'un navire lent, le tossage apparaît essentiellement lorsque le navire est à son pilonnement maximal avec une assiette pratiquement nulle et qu'une longueur relativement importante du fond est hors de l'eau à peu près parallèlement à la surface libre.

Dans le cas d'un navire élané, il n'est pas nécessaire que l'avant sorte de l'eau pour que le tossage se manifeste. En effet, l'avant de ces navires présente, en général, une forme déversée dans sa partie haute (formes "tulipées"), et il suffit qu'elle rentre rapidement dans l'eau pour que le tossage se produise.

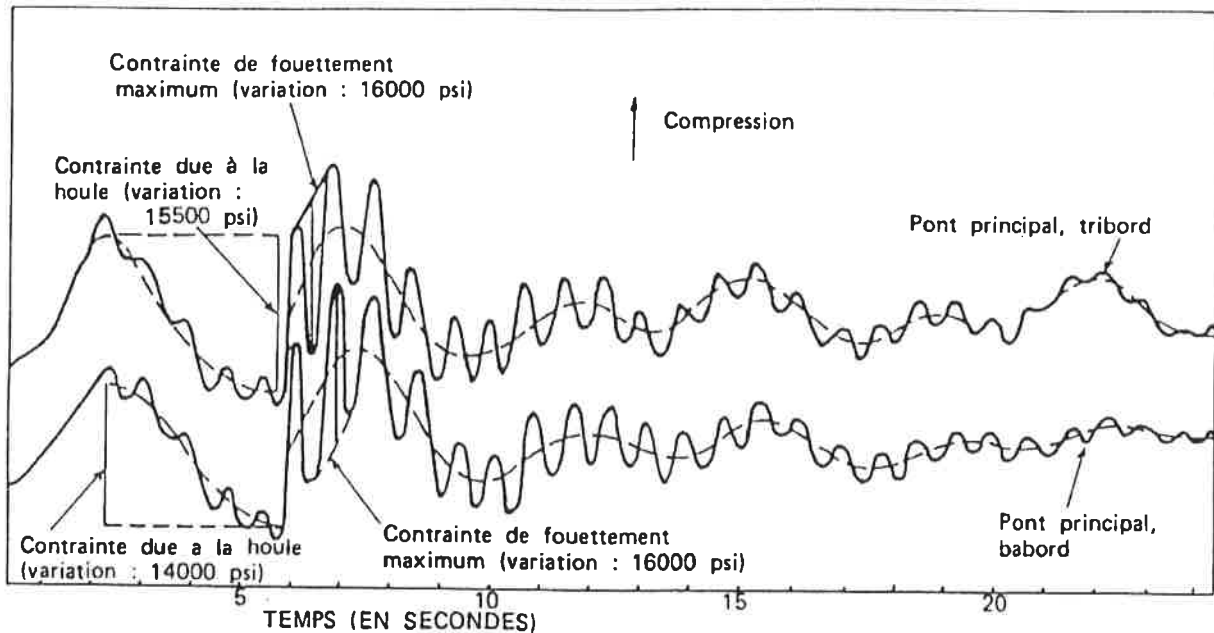


figure 2.2.1 Contraintes dans le pont principal d'un destroyer en situation de "slamming".

2.3. L'embarquement d'eau

Le risque d'embarquement d'eau, qui est maximal quand le rapport entre la longueur d'onde de la houle et la longueur du navire est compris entre 1.0 et 1.5, peut être dangereux pour la charpente du navire. Le cas d'un porte-avions dont la partie avant du pont d'envol a été retournée par des paquets de mer est souvent cité.

En dehors de dommages, plus fréquents, tels que le flambement de barrots ou d'épontilles qui résultent des chocs hydrodynamiques lorsque des paquets de mer tombent sur le pont, les embarquements d'eau peuvent provoquer des alourdissements du navire avec des effets de carène liquide qui en diminuent la stabilité.

Les embarquements d'eau provoquent également une diminution de la visibilité, des entraves à la navigation, et augmentent sensiblement le risque d'homme à la mer.

Le risque d'embarquement d'eau est défini à partir des spectres de réponse pour l'embarquement d'eau qui caractérisent la hauteur qui sépare un point donné du pont de la surface libre.

Sur un navire, l'embarquement d'eau se produit, en général, un peu sur l'arrière de l'étrave.

2.4. La réduction de vitesse

Lorsque les conditions de mer deviennent très dures, il y a souvent une réduction de la vitesse du navire. Parfois même une modification de la route suivie s'impose. Les capacités du navire à assurer sa mission sont dégradées.

La réduction de vitesse peut avoir deux origines distinctes :

— Les réductions de vitesse volontaires, comme les modifications de la route suivie, sont destinées à limiter les risques de tassage et d'embarquement d'eau.

— Les réductions de vitesse involontaires sont dues aux augmentations de la résistance à la marche et à la dégradation de l'efficacité des hélices propulsives.

La résistance à la marche sur houle est sensiblement supérieure à la résistance en eau calme. Cette augmentation est principalement due au mouvement propre du navire, et secondairement à la diffraction de la houle sur la carène. La figure 2.4.1 montre l'influence relative de ces deux phénomènes. L'augmentation de résistance à la marche est surtout importante par mer de l'avant, avec une houle dont la longueur d'onde est légèrement supérieure à la longueur du navire, quand le pilonnement et le tangage sont importants.

Les performances propulsives de l'hélice sont également dégradées sur houle. En effet, l'hélice travaille en régime non permanent, avec des variations de charge importantes et avec des risques de cavitation et d'émergence ce qui entraîne une chute sensible de son rendement.

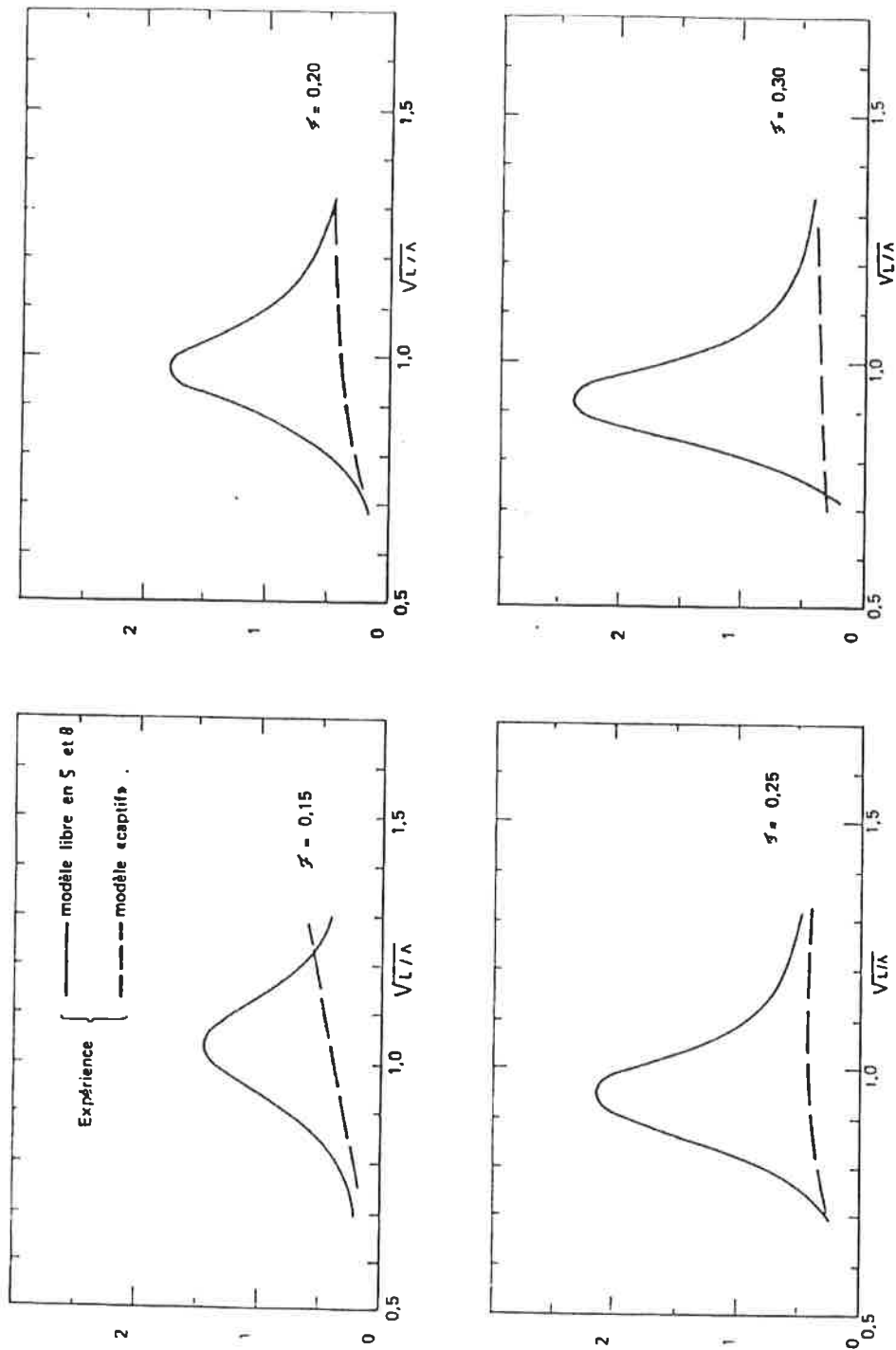


figure 2.4.1 Variations de la résistance à la marche sur houle : influence des mouvements de plate-forme.

3. Principe de l'étude de la tenue à la mer

3.1. Introduction

Pour mener l'étude de la tenue à la mer en termes quantitatifs, il est nécessaire de définir un paramètre caractéristique, noté p , qu'il s'agisse de contraintes dues à l'effort tranchant, au moment fléchissant, ou au moment de torsion, de l'embarquement d'eau, du risque de tossage ou de l'amplitude maximale de certains mouvements de plate-forme ou de l'accélération correspondante.

Comme dans l'étude de la dénivellée de la mer réelle, les variations du paramètre étudié seront supposées résulter de la superposition d'une infinité d'ondes sinusoïdales élémentaires caractérisées par leur pulsation ω_i et leur amplitude p_i . La répartition des amplitudes de ce paramètre en fonction de la pulsation est définie par le spectre de réponse $\phi_{pp}(\omega)$ qui est la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation du paramètre p .

3.2. Spectre de rencontre

Si le passage du spectre d'énergie de la mer $\phi_{z_1 z_1}(\omega)$ au spectre de réponse $\phi_{pp}(\omega)$ est immédiate dans le cas de la tenue à la mer d'un navire ou d'une structure au point fixe, les choses se compliquent sensiblement lorsqu'il faut tenir compte de la vitesse d'avance du navire.

Lorsqu'un navire se déplace à une vitesse constante donnée U et rencontre les crêtes de la houle sous une incidence β , la pulsation ω_r , appelée pulsation de rencontre, qui gouverne ses mouvements de plate-forme dans le repère relatif est relié à la pulsation ω de la houle dans le repère absolu par la relation :

$$(3.1) \quad \omega_r = \omega - Uk \cos \beta$$

expression dans laquelle k désigne le nombre d'onde défini, en grande profondeur, par :

$$(3.2) \quad k = k_\infty = \frac{\omega^2}{g}$$

et, en faible profondeur h , par la relation de dispersion :

$$(3.3) \quad k \operatorname{th} kh = k_\infty = \frac{\omega^2}{g}$$

A chaque couple (ω_r, β) correspond deux, une ou zéro pulsations réelles absolues de la houle ω qui sont, en grande profondeur, solutions de l'équation du second degré suivante :

$$(3.4) \quad \frac{U \cos \beta}{g} \omega^2 - \omega + \omega_r = 0$$

En faible profondeur, ω est solution d'une équation implicite qui doit être résolue numériquement par une méthode itérative.

Comme la densité d'énergie par unité de surface $\phi_{z_1 z_1}(\omega)$ est indépendante du repère choisi, la relation suivante est toujours vérifiée :

$$(3.5) \quad \phi_{z_1 z_1}(\omega) d\omega = \phi_{z_1 z_1}(\omega_r) d\omega_r$$

En différentiant la relation (3.4), il vient :

$$(3.6) \quad d\omega_r = d\omega \left(1 - \frac{2U \cos \beta}{g} \omega \right)$$

d'où l'expression du spectre d'énergie de la mer en fonction de la pulsation de rencontre :

$$(3.7) \quad \phi_{z_1 z_1}(\omega_r) = \frac{\phi_{z_1 z_1}(\omega)}{\left(1 - 2 \frac{U \omega}{g} \cos \beta \right)}$$

en remarquant que le dénominateur dépend essentiellement du nombre adimensionnel de Strouhal qui est le produit du nombre de Froude par la pulsation adimensionnelle (racine du nombre d'onde adimensionnel kL :

$$(3.8) \quad \tau = \frac{U \omega}{g} = \frac{U}{\sqrt{gL}} \omega \sqrt{\frac{L}{g}} = F \bar{\omega}$$

Il est à remarquer que le spectre d'énergie de la houle peut présenter, dans le repère relatif, des branches infinies lorsque le dénominateur de l'expression (3.7) s'annule, c'est à dire pour $\nu = \frac{1}{2 \cos \beta}$. Ceci n'est pas gênant dans la pratique puisque $d\omega_r$ s'annule aussi et que le spectre reste, bien évidemment intégrable.

La figure 3.3.1 montre l'allure du spectre de rencontre correspondant à un spectre de houle donnée en fonction de la vitesse d'avance avec mer de l'avant.

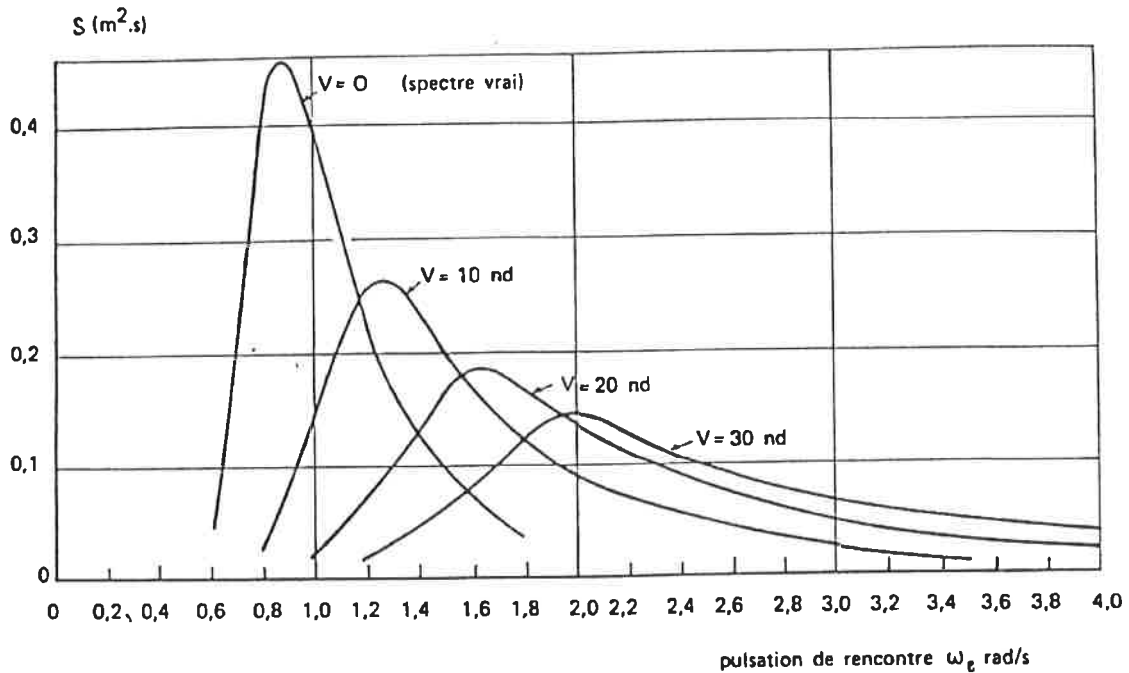


figure 3.3.1 Spectre ITTC pour $H_s = 2.10m$ (mer de force 4) pour différentes vitesses d'avance mer de l'avant.

3.3. Opérateur de réponse en amplitude

Les navires et les structures marines se comportent, en première approximation, sauf au voisinage de la période propre de roulis, comme des filtres linéaires par rapport aux différents paramètres p . Dans ces conditions, la réponse à une entrée gaussienne est encore gaussienne. Ainsi les conditions sont généralement réunies pour qu'il soit possible d'appliquer, aux réponses sur houle, les mêmes outils mathématiques que pour le traitement de la houle incidente.

Dans ces conditions, la spectre de réponse correspondant au paramètre p s'écrit sous la forme :

$$(3.9) \quad \phi_{z_1 z_1}(\omega) = |H_{p z_1}(\omega)|^2 \phi_{z_1 z_1}(\omega)$$

expression dans laquelle le carré du module de la fonction de transfert du paramètre p : $|H_{p z_1}(\omega)|^2$, qui est le rapport entre le spectre de sortie et le spectre d'entrée, est appelé opérateur de réponse en amplitude.

Dans certains cas, lorsque le navire ou la structure étudiée n'est pas vraiment un filtre linéaire, on appelle encore opérateur de réponse en amplitude le quotient de la réponse correspondant à l'amplitude de la composante de houle du spectre par cette même amplitude.

3.4. Navigation météorologique

Le problème posé par la navigation météorologique peut être résumé ainsi : Quelle route doit suivre un navire, ou un convoi remorquant ou transportant une structure, pour se rendre dans les meilleurs délais d'un point donné à un autre.

Sur une mer calme, et en absence d'obstacle entre les deux points, le problème est simple : il faut suivre une route orthodromique, c'est à dire, un arc de grand cercle du globe terrestre. Si il y a des obstacles sur la route, le problème se complique légèrement, mais reste assez simple.

Par contre, lorsque la mer est agitée, le problème se complique singulièrement pour plusieurs raisons :

- La vitesse sur la route orthodromique peut être réduite par la résistance à la marche par mer de l'avant.
- La route orthodromique peut conduire à prendre des risques vis à vis du tossage ou de l'embarquement d'eau.
- La route orthodromique peut conduire à prendre des risques vis à vis du de certains mouvements comme le roulis et poser ainsi des problèmes liés aux attaches de la cargaison ou de la structure transportée (sea fastening).

sans oublier que les conditions peuvent changer, en fonction du temps, sur la route choisie.

La navigation météorologique tente de répondre à ce problème en calculant la route la plus efficace pour un convoi donné, connaissant, d'une part ses opérateurs de réponse en amplitude pour les paramètres importants, et d'autre part les conditions météorologiques prévues. Il est ainsi possible de gagner, dans certains cas, 10 à 15%, voire plus, du temps de trajet par rapport à la route orthodromique.

4. Les effets du vent et du courant

4.1. Estimation des efforts dus au vent

Les efforts dus au vent sont calculés au moyen de la formule de Morison qui est appliquée avec la vitesse totale (cf §2.1.) $v(x, y, z; t) = \bar{v}(x, y, z) + v'(x, y, z; t)$:

$$(4.1) \quad F_v(t) = \frac{1}{2} \rho_a D C_D |\bar{v} + v'| (\bar{v} + v') + \rho_a \pi \frac{D^2}{4} C_M \frac{\partial v'}{\partial t}$$

Le coefficient de traînée dépend du nombre de Reynolds dans l'air défini par :

$$(4.2) \quad R_e = \frac{\bar{v} D}{\nu_a}$$

Expressions dans laquelle, $\rho_a = 1.25 \text{ kg/m}^3$ désigne la masse volumique de l'air, et $\nu_a = 1.4610^{-5}$ la viscosité cinématique de l'air.

En première approximation, le terme inertiel est fréquemment négligé, et seul le terme de traînée est alors conservé.

En introduisant la loi de puissance dans cette formulation, il vient pour l'effort moyen :

$$(4.3) \quad \bar{F}_v \simeq \frac{1}{2} \rho_a D C_D \bar{V}_0 \left[\alpha^2 \left(\frac{z}{10} \right)^{2\beta} + 0.35\gamma \left(\frac{z}{10} \right)^{0.22} \right]$$

\bar{V}_0 , α et β ont été définis précédemment, quant à γ , il est généralement pris égal à 3.5.

Il faut remarquer que le premier terme représente la variation de la pression moyenne avec l'altitude, tandis que le second terme représente la moyenne de la pression due à la turbulence.

Il est également possible d'utiliser une formulation globale obtenue à partir d'essais en soufflerie. La figure suivante montre des polaires correspondant à un navire.

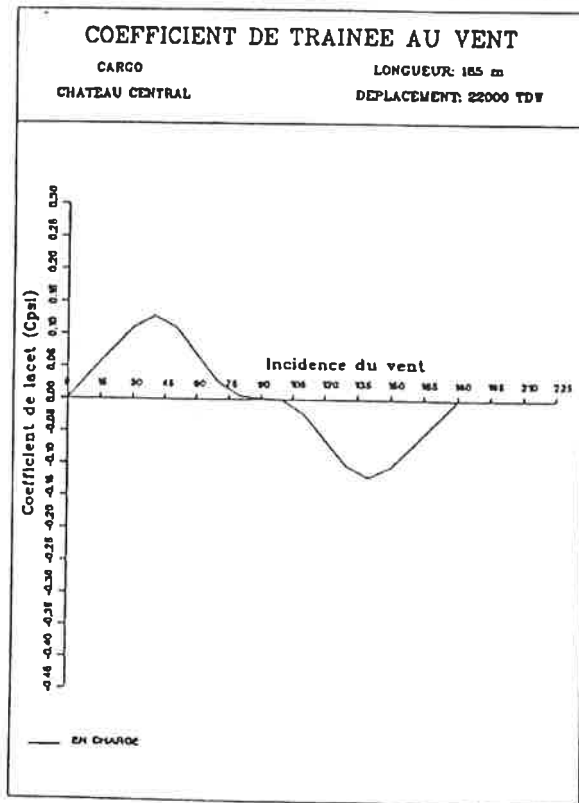
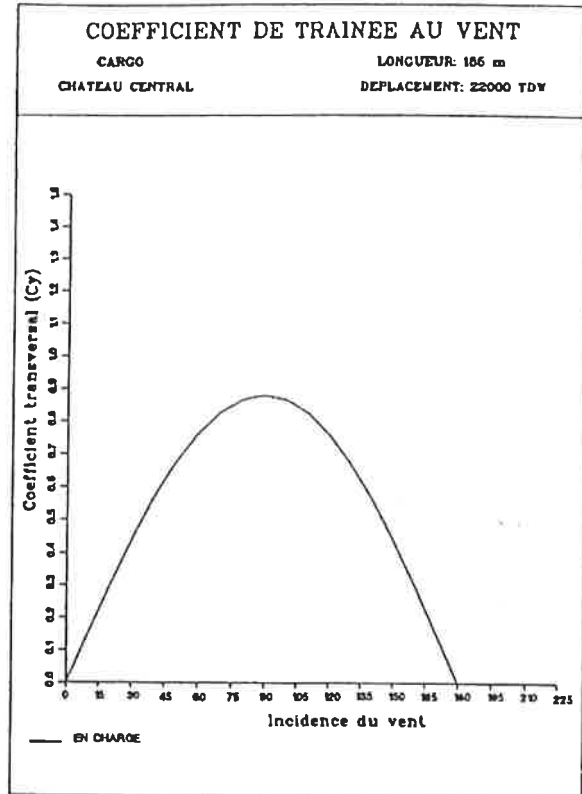
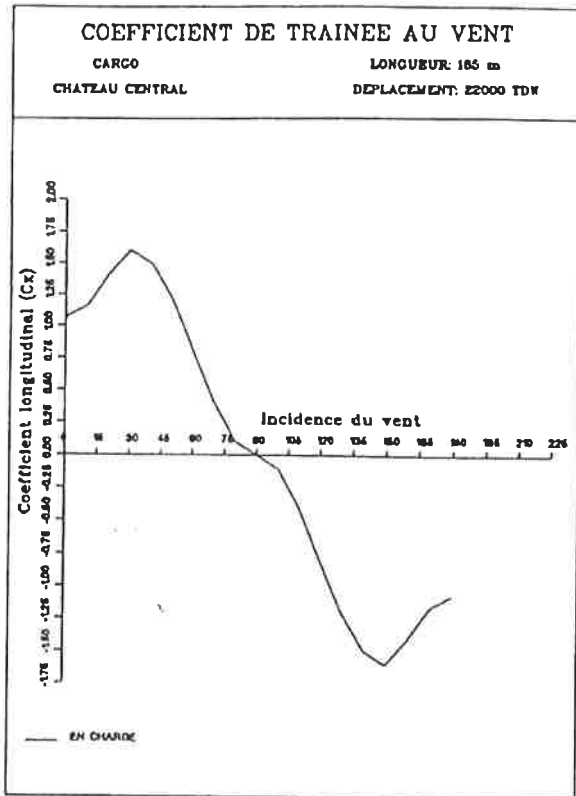


figure 4.2.1 Polaires des efforts dus au vent pour un cargo de 22 000 tdw, de 185 mètres de long possédant un château central.

4.2. Estimation des efforts dus au courant

Le courant, est supposé être un écoulement permanent variable en fonction de la profondeur. La formule de Morison se réduit ainsi au seul terme de traînée :

$$(4.4) \quad F_c = \frac{1}{2} \rho \int_{-T}^0 L(z) C_D(R_e) V^2(z) dz$$

Expression dans laquelle T désigne le tirant d'eau et $L(z)$ la largeur de la carène perpendiculaire au courant à la cote z . Le coefficient de traînée dépend du nombre de Reynolds et donc de la vitesse à la cote z .

Suivant le régime de l'écoulement, des détachements tourbillonnaires peuvent apparaître, engendrant ainsi des efforts fluctuants longitudinaux et latéraux.

Lorsqu'il y a simultanément de la houle et du courant, les deux cinématiques sont superposées. Cette pratique n'est justifiée que lorsque les modèles de houle et de courant sont linéaires. Si de plus la carène se déplace, c'est la formulation en vitesse relative qui est appliquée. Le coefficient de traînée dépend du nombre de Reynolds et du nombre de Keulegan et Carpenter.

Dans le cas où la vitesse du courant est très différente de la vitesse de la houle, la formule de Morison est appliquée directement à chacun des champs de vitesses, et les efforts résultants sont superposés.

Il est également possible d'utiliser une formulation globale obtenue à partir d'essais en soufflerie. La figure suivante montre des polaires correspondant à un navire.

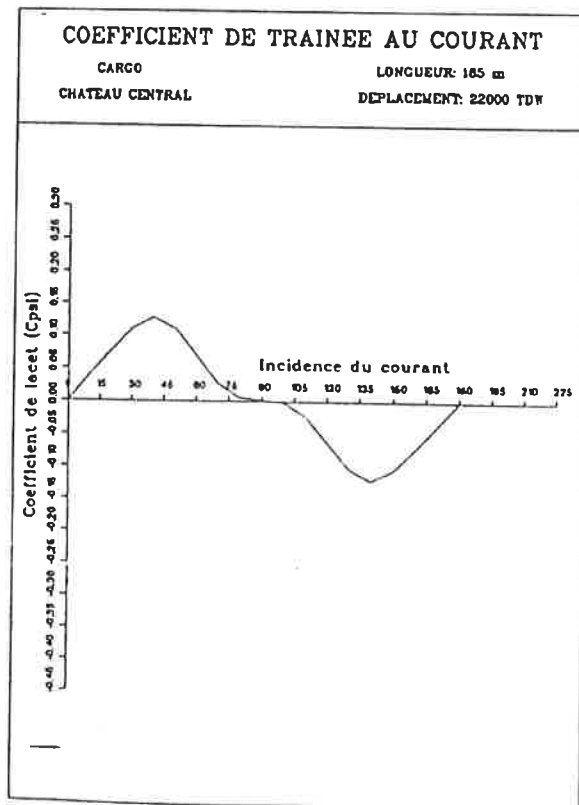
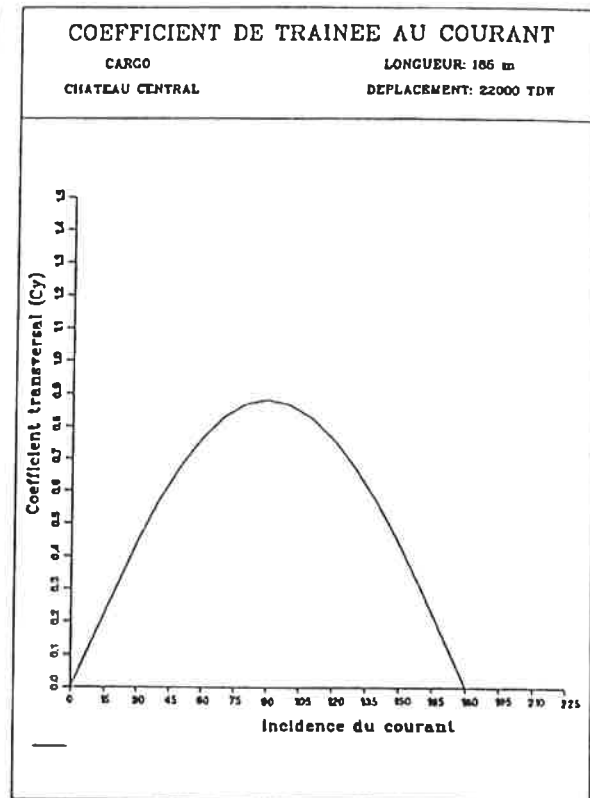
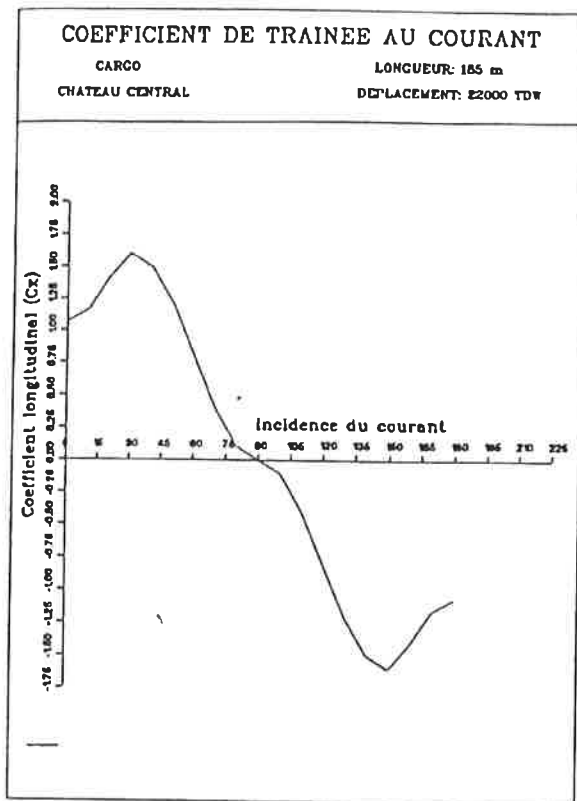


figure 4.2.1 Polaires des efforts dus au courant pour un cargo de 22 000 tdw, de 185 mètres de long possédant un château central.

5. Comportements non-linéaires

5.1. Les différents types de non-linéarité

Il existe plusieurs types de non-linéarités qui ne relèvent pas de la même approche philosophique.

Les non-linéarités peuvent tout d'abord être liées aux grands déplacements. C'est, bien évidemment, le cas des houles de grandes hauteurs, proches du déferlement. C'est aussi de certaines réponses des navires et structures marines, comme le roulis au voisinage de ses fréquences propres.

D'autres non-linéarités se manifestent sous des formes plus insidieuses. C'est en particulier le cas de la dérive sur houle ou des mouvements basse-fréquence, ou haute-fréquence. En effet, les efforts mis en jeu dans ces phénomènes sont du deuxième ordre, et donc très petits, par rapport aux efforts qui interviennent au premier ordre sur une houle de faible amplitude, en théorie infinitésimale. En fait, ces non-linéarités tirent leur importance par le fait que leurs effets se manifestent à des fréquences éloignées de celles contenues de manière significative dans le spectre de la houle incident, et peuvent ainsi parfois exciter des systèmes mécaniques résonants et les conduire à la ruine.

5.2. Les efforts de dérive sur houle

Lorsqu'un navire ou une structure marine est soumise à l'action d'une houle incidente, et qu'elle n'est pas retenue en place par des amarres ou un système d'ancrage statique ou dynamique, elle se met à dériver lentement dans le même sens que la houle.

Ce phénomène d'observation courante s'explique par l'existence, dans les efforts engendrés par la houle, de termes non-linéaires qui ont une composante constante appelée torseur des efforts de dérive sur houle ou encore torseur des efforts moyens du deuxième ordre.

Dans le cas d'une carène entièrement immergée, le torseur des efforts moyens du deuxième ordre est exclusivement engendré par le torseur des efforts hydrodynamiques du type "stationnaire" $T_{\phi\nu}(\vec{F}_{\phi\nu}, \vec{M}_{\phi\nu})$ dont l'intégrand est essentiellement non-linéaire. Ceci n'est plus exact lorsque les structures interceptent la surface libre, puisqu'alors d'autres termes non linéaires apparaissent lors de la sommation d'intégrand du premier ordre sur un support dont la surface varie également au premier ordre.

Plutôt que de chercher à évaluer ces efforts par intégration de la pression, il est plus commode de procéder à partir de la formulation du théorème de la quantité de mouvement, puisque cette méthode conduit à un résultat global en s'affranchissant du calcul, peu précis, de la force nulle qui fait l'objet du paradoxe de d'Alembert. Cette méthode résulte de l'application du théorème de Lagally.

Pour illustrer qualitativement l'origine de ces efforts de dérive, il suffit de considérer le cas de l'intégration, sur une carène même fixe, d'une pression dynamique comprenant le carré d'une vitesse sinusoïdale :

$$(5.1) \quad \vec{F}(\omega; t) = \iint_C [V(M; \omega) \cos \omega t]^2 \vec{n}(M) dS = \iint_C V^2(M; \omega) \vec{n}(M) dS \cos^2 \omega t$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$(5.2) \quad \vec{F}(\omega; t) = \vec{F}(\omega) \cos^2 \omega t = \vec{F}(\omega) \frac{1 + \cos 2\omega t}{2}$$

La moyenne de cet effort intégré sur une période donne donc un résultat non nul qui ne dépend que de la pulsation de la houle : $\vec{F}_d(\omega)$.

Ces efforts sont dus à des non-linéarités qui se manifestent dans tous les cas, même sur une houle simple mono-fréquentielle. Seul le problème de diffraction radiation au premier ordre génère des efforts d'ordre supérieur dont la moyenne temporelle n'est pas nulle. Il suffit donc de le résoudre pour obtenir la totalité de ces efforts.

La vitesse est proportionnelle à la hauteur H de la houle incidente (et il en est de même des déplacements et de la pression), ce qui implique que l'effort moyen de dérive est proportionnel à H^2 , et s'exprime, dans le cas d'un état de mer caractérisé par son spectre d'énergie de la mer, sous la forme :

$$(5.3) \quad \vec{F}_d = 2 \int_0^\infty F_d(\omega) \phi_{z, z'}(\omega) d\omega$$

Lorsque la houle est très courte, l'effort de dérive sur houle, qui s'exerce sur une structure opposant au passage de la houle une longueur L , tend asymptotiquement vers la valeur suivante portée par le vecteur unitaire $\vec{1}_\beta$ matérialisant la direction de propagation de la houle :

$$(5.4) \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \vec{F}_d(\omega) = \frac{1}{8} \rho g H^2 L \vec{1}_\beta$$

ce qui correspond à la force nécessaire pour empêcher la totalité de l'énergie de la houle de passer. Le calme plat règne alors derrière l'obstacle.

Lorsque la houle devient très longue, l'effort de dérive sur houle tend assez rapidement vers zéro. Le navire bouchonne sur la houle et ne fait plus obstacle au passage de son énergie.

Entre les deux asymptotes, la courbe $F_d(\omega)$ varie et passe par un ou plusieurs pics correspondant généralement aux périodes propres de pilonnement-tangage. Ces pics peuvent atteindre couramment deux à trois fois la valeur asymptotique.

Pour maintenir le navire ou la structure sur un site donné, les amarres ou le système d'ancrage statique ou dynamique doivent fournir, en moyenne, un effort égal et opposé à l'effort de dérive sur houle qui s'accompagne, bien évidemment, d'un moment de composante verticale.

De manière plus générale, les efforts de dérive sur houle intéressent les six degrés de liberté. Il en résulte qu'outre les problèmes liés à l'amarrage (cavalement, embardée et lacet), il y a un surenfoncement moyen sur houle (pilonnement), et un changement d'assiette et de gîte (tangage et roulis).

5.3. Efforts et mouvements basse-fréquence et haute-fréquence

Dans le cas d'une houle bi-fréquentielle, c'est à dire de la superposition de deux houles sinusoïdales dont les pulsations sont respectivement ω_i , et ω_j , le même raisonnement simplifié que celui mené précédemment conduit, cette fois, à sommer des termes de la forme :

$$\begin{aligned}
 \vec{F}(\omega_i, \omega_j; t) &= \iint_C [V(M; \omega_i) \cos \omega_i t + V(M; \omega_j) \cos \omega_j t]^2 \vec{n}(M) dS \\
 &= \iint_C V^2(M; \omega_i) \vec{n}(M) dS \cos^2 \omega_i t \\
 (5.5) \quad &+ \iint_C V^2(M; \omega_j) \vec{n}(M) dS \cos^2 \omega_j t \\
 &+ \iint_C 2 \vec{V}(M; \omega_i) \cdot \vec{V}(M; \omega_j) \vec{n}(M) dS \cos \omega_i t \cos \omega_j t
 \end{aligned}$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$\begin{aligned}
 \vec{F}(\omega; t) &= \vec{F}_1(\omega_i) \cos^2 \omega_i t + \vec{F}_1(\omega_j) \cos^2 \omega_j t \\
 (5.6) \quad &+ \vec{F}_2(\omega_i, \omega_j) \frac{1}{2} [\cos(\omega_i - \omega_j) + \cos(\omega_i + \omega_j)]
 \end{aligned}$$

Les efforts basse fréquence $F_-(\omega_i - \omega_j)$ et les efforts haute fréquence $F_+(\omega_i + \omega_j)$ sont ainsi obtenus à partir du calcul des efforts du deuxième ordre bichromatiques correspondant à tous les couples de pulsations (ω_i, ω_j) du spectre de la houle incidente. Ils sont proportionnels aux hauteurs des composantes de houle correspondantes $H_i H_j$.

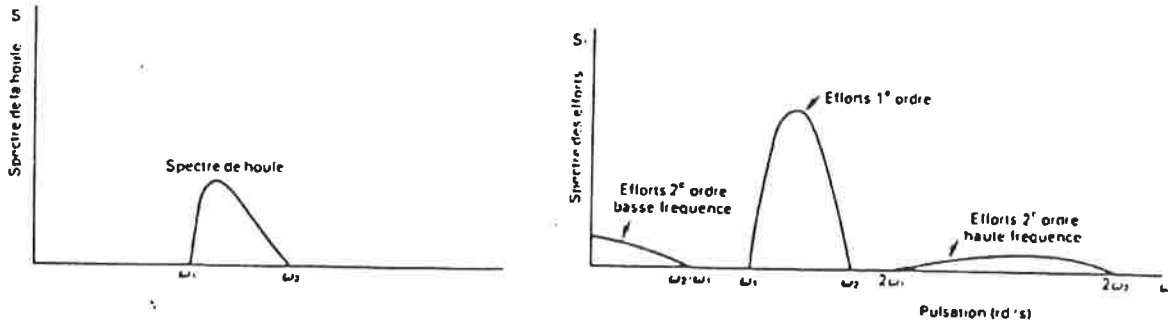


figure 5.3.1 Spectre des efforts du premier et du deuxième ordre.

Il convient toutefois de noter que le problème de diffraction-radiation du deuxième ordre contribue également à la génération de ces efforts.

Les efforts à très basse fréquence (lorsque ω_i et ω_j sont voisins) peuvent être approximés à partir de la fonction de transfert des efforts de dérive (approximation de Newman) :

$$(5.7) \quad F_-(\omega_i - \omega_j) \simeq \frac{F_d(\omega_i) + F_d(\omega_j)}{2}$$

Cette approximation est justifiée lorsque les périodes propres des structures sont très grandes par rapport aux périodes de la houle (structures ancrées). Elle permet d'éviter de résoudre les problèmes au deuxième ordre.

Pour calculer les efforts hautes fréquences, il est indispensable de connaître les efforts du deuxième ordre engendrés par le potentiel du deuxième ordre sur houle régulière. Mais dans ce cas, il est possible d'appliquer le théorème d'Haskind pour avoir accès aux efforts du deuxième ordre sans avoir à calculer le potentiel total du deuxième ordre.

Les efforts basse-fréquence sont responsables des oscillations lentes, de l'ordre de une à quelques minutes des grands navires ou des grandes plate-formes off-shores ancrées sur des systèmes composées de lignes, de bouées ou de colonnes

dont la raideur globale est assez faible. En effet, de tels systèmes structure-ancrage ont des périodes propres de l'ordre de une à plusieurs minutes qui peuvent être excités par ces efforts, ou par les fluctuations du vent qui souffle en rafales avec des périodes du même ordre de grandeur. Comme la raideur de rappel est faible, l'amplitude des excursions horizontales de tels navires ou de telles structures sont essentiellement limitées par les amortissements dus au fluide (frottement, sillage et tourbillons) et aux ancrages (frottement fluide et solide dans les lignes), et par l'amortissement de dérive lente. Ce dernier terme d'amortissement provient de la variation de l'effort de dérive en fonction de la pulsation de rencontre dans le mouvement lent.

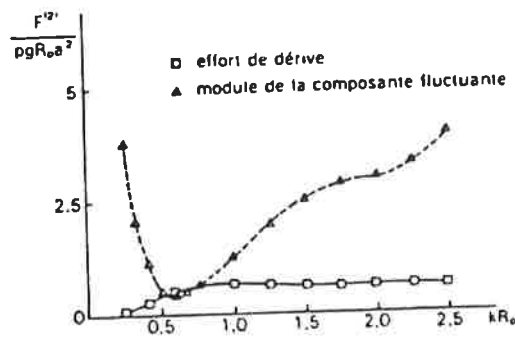


figure 5.3.2 Efforts du deuxième ordre sur un cylindre.

Les efforts haute-fréquence sont responsables des résonances vibratoires structurelles (springing) de la poutre navire des grands navires ou des tendons des plate-formes sur lignes tendues, dont les périodes propres sont de l'ordre de deux à quatre secondes. Il convient enfin de mentionner l'existence d'efforts haute-fréquence engendrés, sur les plate-formes sur lignes tendues, par les termes du troisième ordre (ringing).

5.4. Formule de Morison

La formule de Morison est non-linéaire. La méthode mathématique exposé dans ce qui précède ne permet donc pas de relier les propriétés statistiques de la houle à celles des efforts qu'elle engendre.

Dans ces conditions, il n'est envisageable d'évaluer la variance des efforts qu'après avoir linéarisés leur expression. Des considérations énergétiques conduisent à écrire la formule de Morison sous la forme suivante :

$$(5.8) \quad F(t) = \frac{1}{2} \rho D \bar{C}_D u(t) + \rho \pi \frac{D^2}{4} C_M \frac{\partial u(t)}{\partial t}$$

avec :

$$(5.9) \quad \bar{C}_D = \sqrt{\frac{8}{\pi}} C_D u_{rms}$$

expression dans laquelle $u_{rms} = \sigma_u$ est obtenue à partir de la modélisation de la houle irrégulière par la superposition de houles d'Airy.

Cette "linéarisation" n'a pas de justification théorique et doit être utilisée avec une très grande prudence. Il convient de noter que si les variances et écarts types qu'elle permet d'obtenir ne sont pas trop faux, elle ne saurait être utilisée pour le calcul de valeurs extrêmes. En effet, la réponse d'un système non-linéaire à un signal d'entrée gaussien ne l'est pas, et la démarche suivie pour estimer les valeurs extrêmes de la houle n'est donc pas applicable pour ce type de réponse.

Naturellement, dans le cas de simulation dans le domaine temporel, les efforts de Morison sont calculés avec la vitesse obtenue en superposant les différentes composantes fréquentielles du signal de houle.

6. Références bibliographiques

- [1] BINDEL S.
"Hydrodynamique navale"
Cours de l'Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées
ENSTA, Paris /1982/
- [2] BOUGIS J.
"Houles réelles et états de mer"
Cours de l'Université de Toulon et du Var
I.S.I.T.V., Toulon /1993/
- [3] DEVAUCHELLE P.
"Dynamique du navire"
Bibliothèque de l'Institut Français d'Aide à la Formation
Professionnelle Maritime.
Masson, Paris /1986/
- [4] FALTINSEN O.M.
"Sea loads on ships and offshore structures"
Ocean technology series
Cambridge University Press, Cambridge /1990/
- [5] PRICE W.G. and BISHOP R.E.D.
"Probabilistic Theory of Ship Dynamics"
Chapman and Hall Ltd, Londres /1974/
- [6] RICHER J.-Ph. et MASSON J.-C.
"Etude du tossage des navires"
Institut de Recherches de la Construction Navale, Paris /1991/
- [7] SERVIERES R.
"Connaissance du navire - tome 1 : théorie du navire"
Cours de l'Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées
ENSTA, Paris /1973/
- [8] SUSBIELLES G. et BRATU C.
"Vagues et ouvrages pétroliers en mer"
Publications de l'Institut Français du Pétrole
Editions Technip, Paris /1981/

