

# Calcul du surenfoncement des navires animés d'une vitesse de route

par

**J. BOUGIS**

Docteur-Ingénieur

Principia Recherche Développement

## SOMMAIRE

Nous proposons ici une méthode tridimensionnelle fondée sur la théorie du potentiel et mettant en oeuvre une méthode de singularité pour calculer la position moyenne dynamique d'un navire qui se déplace sur un plan d'eau initialement au repos.

Le programme de calcul qui en résulte permet de connaître le surenfoncement moyen au centre de gravité, l'assiette du navire et la position de chaque point de la carène en fonction de la vitesse d'avance et de la profondeur du fluide.

Les résultats obtenus sont comparés à ceux fournis par différentes formules empiriques et théoriques données par plusieurs auteurs concernant le surenfoncement maximal (à l'avant ou à l'arrière du navire). Un très bon accord est constaté à ce sujet,

## SUMMARY

### SHIP SQUAT COMPUTATION

The knowledge of actual trim of a ship with forward speed in still, shallow water is often of great interest. We propose in this paper a 3D numerical method based on the potential theory to compute the squat and angular position of a hull of any shape in limited water domain. Our computer program also gives the velocity field in the channel and enables one to evaluate the effects of the ship going by on objects located in the water.

The numerical results lead the very good agreement with theoritical and expérimetal works by differents authors (O. HUUSKA and C.B, BARRASS) which give only the maximal squat at one end of the ship, whereas our program compute the complete squat of the hull.

## INTRODUCTION

Lorsqu'un navire se déplace sur un plan d'eau initialement au repos, les valeurs réelles de son tirant d'eau et de son assiette sont sensiblement différentes de celles de l'équilibre statique. Ces écarts dépendent des formes de la carène, de la bathymétrie et de la vitesse de route.

Ce phénomène ne peut pas être négligé lors de l'étude du comportement hydrodynamique d'un navire évoluant en eau peu profonde ou au dessus d'obstacles, l'étude sur houle devant être effectuée à partir de la position moyenne dynamique.

Nous avons réalisé deux approches différentes du problème posé;

- La première relève d'une étude théorique débouchant sur une modélisation numérique permettant de déterminer le champ de vitesse dans le fluide ainsi que le champ de pression et donc la position d'équilibre dynamique de la carène (surenfoncement moyen et assiette).
- La seconde relève d'une étude bibliographique concernant d'une part les calculs théoriques réalisés par divers auteurs, et d'autre part, la compilation de résultats expérimentaux en bassin et sur site. Elle ne concerne que le surenfoncement maximal et ne permet pas de déterminer la position moyenne réelle de la carène.

### 1. ETUDE THEORIQUE ET NUMERIQUE

L'étude théorique et numérique que nous avons mené au sujet du déplacement d'une carène sur une surface libre en eau calme, se décompose en trois parties qui sont respectivement :

- l'établissement des formules donnant l'expression du surenfoncement et de l'assiette en fonction du champ de vitesse dans le fluide (Annexe A)
- la formulation des équations intégrales qui gouvernent l'écoulement dans le fluide (Annexe B)
- la détermination de la fonction de GREEN du problème à résoudre (Annexe C)

La formulation analytique que nous avons obtenue a fait l'objet d'une programmation en Fortran 77, Le logiciel qui en résulte permet de calculer la vitesse en tout point du fluide, ce qui est nécessaire pour l'étude du surenfoncement et de l'assiette.

Les résultats numériques concernant l'enfoncement maximal (à l'extrémité avant des navires) et l'assiette sont visualisés sur les figures et dans le tableau du troisième paragraphe.

### 2. ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

Notre recherche bibliographique au sujet du surenfoncement des navires, a été particulièrement simplifiée grâce à l'étude bibliographique de L. RIBADEAU DUMAS parue en mars 1982 dans la Revue Technique du Service des

Phares et Balises.

Dans cette étude, l'auteur examine les principales théories échafaudées pendant les vingt dernières années ainsi que les résultats expérimentaux obtenus dans différents laboratoires. Il présente une synthèse des formules proposées par différents auteurs et en fait une analyse critique.

De cette étude, nous avons retenu trois formules :  
La première est due aux travaux théoriques et expérimentaux de O. HUUSKA et les deux autres ont été proposées par C.B. BARRASS d'après son analyse d'essais réels connus en 1977.

### 2.1 Formule de O. HUUSKA

La formule proposée par O. HUUSKA en 1976 est :

$$e = B * T / L_{pp} * C_b * (C_z + 0.5 * C_o) * K_s * K_l * F^{**2} / \text{SQRT}(1 - F^{**2})$$

Les grandeurs sont exprimées en unités du système international, Elles sont expliquées au paragraphe 2.3. Les résultats fournis par cette formule sont visualisés sur les figures et dans le tableau du troisième paragraphe,

### 2.2 Formules de C.B. BARRASS

Nous avons retenu deux formules proposées par le Professeur C.B. BARRASS. La première date de 1978 et s'écrit :

$$e = C_b / 30 * S^2^{(2/3)} * (U^{**2.08})$$

e est toujours l'enfoncement maximal à la proue ou à la poupe et s'exprime en mètre tandis que U qui désigne la vitesse du navire s'exprime ici en noeuds. La seconde formule de C.B. BARRASS, dite formule de sécurité, s'écrit :

$$e = C_b / 100 * U^{**2}$$

dans les mêmes unités que précédemment.

### 2.3 Notations

~ Surenfacement maximal (à l'avant ou à l'arrière)	e
- Largeur du navire	B
- Tirant d'eau au repos	T
- Longueur entre perpendiculaires	L <sub>pp</sub>
- Coefficient de bloc	C <sub>b</sub>
- Profondeur du chenal	H
- Largeur du chenal	W
- Facteur de blocage	$S = \frac{BT}{WH}$
- Facteur de blocage secondaire	$S_2 = \frac{S}{1-S}$
- Vitesse du navire	U
- Nombre de Froude	$F = U / \text{SQRT}(g * L_{pp})$
- Constante universelle de la gravité	g

(C<sub>z</sub> - 0.5 \* C<sub>o</sub>) est un coefficient dont la valeur moyenne est, d'après HUUSKA, égale à 2.4. K<sub>s</sub> et K<sub>l</sub> sont deux coefficients qui prennent en compte l'éloignement et la forme des berges, dans le cas d'un chenal très large ils sont tous deux égaux à l'unité.

Dans le cas de chenaux très larges ou très profonds, le facteur de blocage tend vers zéro, or il existe toujours un surenfoncement. Dans ces conditions, les formules de C.B. BARRASS ne peuvent rester valables qu'en introduisant les notions de "largeur d'influence" et de "profondeur d'influence". Celles-ci conduisent aux résultats suivants :

$$\lim \frac{W}{B} = 7.70 + 45*(1-Cw)**2$$

$$\lim \frac{H}{B} = 4.95 + 52.68*(1-Cw)**2$$

expressions dans lesquelles Cw désigne le rapport entre la surface de flottaison et le produit Lpp.B (coefficient de flottaison).

### 3. RESULTATS OBTENUS

Les résultats concernant le surenfoncement maximal sont rassemblés sur les figures 1 et 2. Ils ont été effectués pour une profondeur de 27 m, Quatre courbes ont été tracées pour chaque navire test.

Les valeurs numériques pour 8 et 15 noeuds sont également rassemblées dans le tableau suivant :

	Pétrolier de 270000 TDW		Pétrolier de 356000 TDW	
	8 noeuds	15 noeuds	8 noeuds	15 noeuds
Barrass 1	0.4794	1.7725	0,5003	1.8495
Barrass 2	0.5568	1.9575	0.5594	1.9665
Huuska	0.4677	1.8068	0.4991	1.9282
Présents Calculs	0.5274	1.8543	0.5016	1.7633

La figure 3 représente l'assiette des deux pétroliers en fonction de la vitesse. Seuls les résultats de notre calcul y figurent puisque les auteurs des formules de surenfoncement n'ont fourni aucune formule permettant d'appréhender cette grandeur dans le cas de chenaux très larges.

### CONCLUSION

#### 4. ANALYSE DES RESULTATS

La comparaison des différents résultats obtenus conduit à formuler plusieurs remarques.

Les enfoncements maximaux obtenus par les quatre méthodes sont pour chacun des deux pétroliers en très bon accord les uns avec les autres, d'autant plus d'ailleurs que les formules empiriques de HUUSKA et BARRASS sont données, par leurs auteurs respectifs, pour valables à 20 pour cent près et qu'il serait illusoire d'espérer une précision des résultats du programme de calcul supérieure à 5 ou 10 pour cent.

Conformément aux observations réalisées en bassin d'essais des carènes et in situ sur des gros navires, nous avons obtenu le surenfoncement maximal à l'avant des deux pétroliers (assiette positive dans nos axes).

Les formules empiriques de HUUSKA et de BARRASS ont été obtenues essentiellement à partir d'expériences et d'observations. Elles ne tiennent aucun compte de la forme avant des navires. En particulier, la suppression

Pétrolier de 270.000 tonnes

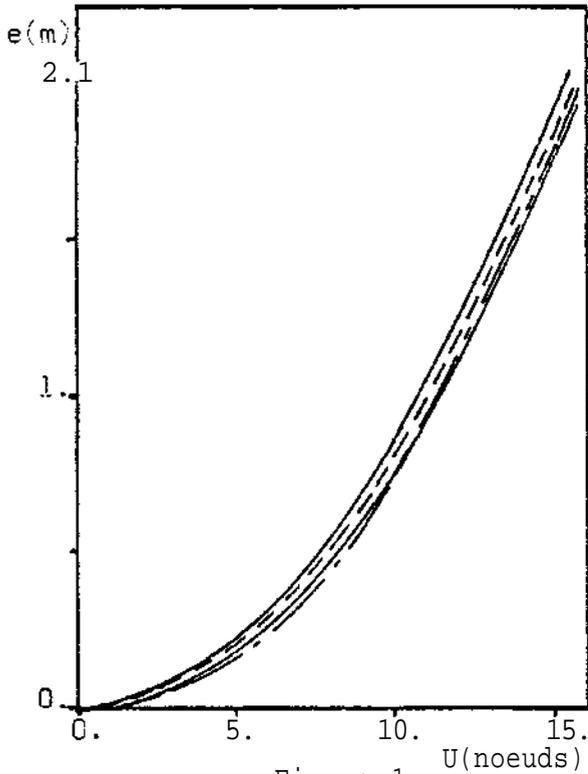


Figure 1

Pétrolier de 356.000 tonnes

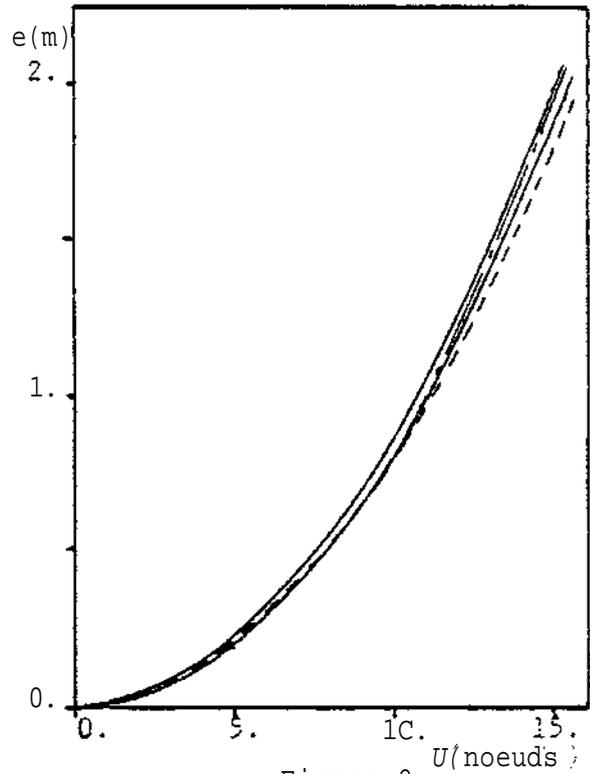


Figure 2

SURENFONCEMENT MAXIMAL ( A L'AVANT )

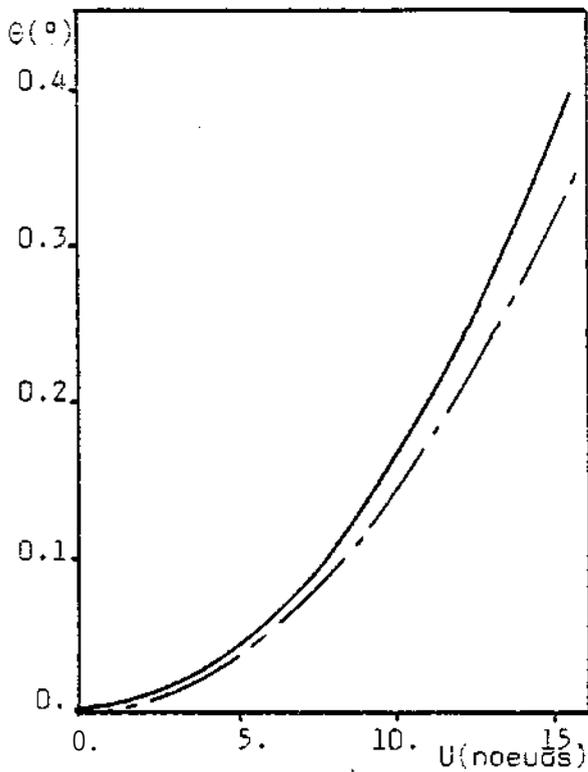


Figure 3

Figures 1 et 2

- Formules de BARRASS
- Formule de HUUSKA
- - - - - Présents calculs

Figure 3

- Pétrolier de 250.000 t
- - - - - Pétrolier de 356.000 t

ANGLE D'ASSIETTE

du bulbe nous a conduit, pour le deuxième pétrolier a un surenfoncement maximal de l'ordre de 1.40 mètres pour une vitesse de 15 noeuds. Il semble donc que la présence d'un bulbe avant augmente sensiblement l'assiette de la carène, sans changer notablement le surenfoncement moyen.

Il semble intéressant de noter enfin que la "formule de sécurité" de BARRASS conduit toujours aux résultats les plus pessimistes.

## ANNEXE A

### CALCUL DE L'ENFONCEMENT ET DE L'ASSIETTE D'UNE CARENE ANIMEE D'UNE VITESSE DE ROUTE CONSTANTE EN EAU CALME

#### A.1 Hypothèses et définitions

Le calcul de l'enfoncement et de l'assiette d'une carène qui se déplace à vitesse constante sur un plan d'eau initialement au repos, nécessite la connaissance de l'écoulement du fluide autour du solide.

La détermination de l'écoulement ne peut être réalisée qu'à partir d'hypothèses simplificatrices usuelles en hydrodynamique. Ces hypothèses seront faites au fur et à mesure que nous en aurons besoin.

Dans un premier temps, nous supposerons d'une part que les états du fluide peuvent à tout instant être représentés par des fonctions continues et dérivables par rapport aux variables spatiales et temporelle, et d'autre part, que le fluide est parfait et isovolume.

L'utilisation de ce modèle de fluide est justifiée, a priori, puisque les écoulements que nous aurons à considérer sont à très grand nombre de REYNOLDS. Les forces de viscosité sont donc négligeables devant les forces d'inertie.

Le fluide étant parfait, barotrope et en mouvement dans un champ de forces volumiques dérivant d'un potentiel scalaire (champ de pesanteur terrestre), il existe à tout instant un potentiel des accélérations. S'il existe à un instant donné un potentiel des vitesses, le théorème de LAGRANGE assurera sa pérennité.

Le fluide étant initialement au repos, l'écoulement sera à potentiel des vitesses.

Nous considérons deux référentiels orthonormes directs :

- Un repère fixe par rapport au fond ( $O_0 ; X, Y, Z$ ), les axes  $O_0X$  et  $O_0Y$  sont situés dans un plan horizontal, l'axe  $O_0X$  est parallèle à l'axe longitudinal du navire et orienté vers l'avant de celui-ci, l'axe  $O_0Z$  est vertical ascendant.
- Un repère mobile ( $0 ; x, y, z$ ) lié au solide en mouvement, les axes sont respectivement colinéaires aux axes du repère fixe.

Les vecteurs unitaires des deux repères sont respectivement  $i, j, k$ .

Le repère mobile est donc en translation rectiligne uniforme par rapport au repère fixe à la vitesse  $U.i$ .

#### A.2 Equations d'équilibre

Les efforts qui s'exercent sur la carène sont dus d'une part à la gravité et d'autre part à la pression du fluide qui incluent les forces de propulsion.

La vitesse du solide étant constante, les torseurs de ces deux types de forces s'équilibrent. Nous pourrions donc déterminer la position d'équilibre de la carène en écrivant que la somme de ces deux torseurs est nulle. Pour cela nous devons exprimer ces deux torseurs en fonction des inconnues.

### A.3 Expression du torseur des efforts de gravité

Soit  $V_0$  le volume déplacé au repos.  $\rho$  la masse volumique du fluide,  $G$  le centre de gravité du navire et  $g$  la constante de la gravité terrestre.

Le torseur des forces de gravité réduit au point  $O$  s'écrit :

$$T_g \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_g = - \rho V_0 g \vec{k} \\ \vec{M}_{Og} = - \rho V_0 g \vec{OG} \wedge \vec{k} \end{array} \right.$$

### A.4 Expression du torseur des efforts de pression

Le fluide étant parfait, isovolume et siège d'un écoulement irrotationnel, la pression  $p(M,t)$ , la vitesse  $V(M,t)$  et le potentiel des vitesses  $\phi(M,t)$  en un point  $M$  du fluide sont liés à tout instant par l'équation de LAGRANGE. Cette relation entre les grandeurs absolues s'écrit dans le repère fixe, (le second membre est en fait de la forme  $K + F(t)$ , mais  $F(t)$  est incluse dans  $\phi(M,t)$ ) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(M,t) + \frac{1}{2} V^2(M,t) + gz + \frac{1}{\rho} p(M,t) = K$$

Dans le repère mobile, l'écoulement est permanent. Les grandeurs ne dépendent donc pas du temps et l'équation de LAGRANGE devient :

$$- U \frac{\partial}{\partial x} \phi(M,t) + \frac{1}{2} V^2(M) + gz + \frac{1}{\rho} p(M) = K$$

La pression s'écrit alors :

$$p(M) = \rho U \frac{\partial}{\partial x} \phi(M) - \frac{1}{2} \rho V^2(M) - \rho gz - \rho K$$

Le torseur des efforts de pression est obtenu en intégrant  $p(M)$  sur la carène  $C$  du navire. Il vient, compte tenu de la définition de la normale  $\vec{n}$  extérieure au solide :

$$T_p \quad \left[ \begin{array}{l} \vec{F}_p = - \iint_C p(M) \vec{n} \, dS = - \rho \iint_C \left[ U \frac{\partial}{\partial x} \phi(M) - \frac{1}{2} \rho V^2(M) \right] \vec{n} \, dS + \rho g \iint_C z \vec{n} \, dS + \rho K \iint_C \vec{n} \, dS \\ \vec{M}_{Op} = - \iint_C p(M) \vec{OM} \wedge \vec{n} \, dS = - \rho \iint_C \left[ U \frac{\partial}{\partial x} \phi(M) - \frac{1}{2} \rho V^2(M) \right] \vec{OM} \wedge \vec{n} \, dS \\ \quad + \rho g \iint_C z \vec{OM} \wedge \vec{n} \, dS + \rho K \iint_C \vec{OM} \wedge \vec{n} \, dS \end{array} \right.$$

## A.5 Calcul de l'enfoncement et de l'assiette

A l'équilibre, nous avons :

$$\begin{aligned} \iint_C z \vec{n} \, dS - V_0 \vec{k} &= \frac{1}{g} \iint_C \left[ U \frac{\partial}{\partial x} \phi(M) - \frac{1}{2} \text{grad}^2 \phi(M) \right] \vec{n} \, dS - \frac{K}{g} S_f \vec{k} \\ \iint_C z \vec{OM}_A \vec{n} \, dS - V_0 \vec{OG}_A \vec{k} &= \frac{1}{g} \iint_C \left[ U \frac{\partial}{\partial x} \phi(M) - \frac{1}{2} \text{grad}^2 \phi(M) \right] \vec{OM}_A \vec{n} \, dS - \frac{K}{g} S_f \vec{OG}_A \vec{k} \end{aligned}$$

Gf désignant le centre de gravité de la surface de flottaison  $S_f$ . En appliquant la formule du gradient à la résultante, et celle du rotationnel au moment, il vient :

$$\begin{aligned} (V - V_0) \vec{k} &= \frac{1}{g} \iint_C \left[ U \frac{\partial}{\partial x} \phi(M) - \frac{1}{2} \text{grad}^2 \phi(M) \right] \vec{n} \, dS - \frac{K}{g} S_f \vec{k} \\ \left[ \iiint_V \vec{OP} \, dV - V_0 \vec{OG} \right] \vec{k} &= \frac{1}{g} \iint_C \left[ U \frac{\partial}{\partial x} \phi(M) - \frac{1}{2} \text{grad}^2 \phi(M) \right] \vec{OM}_A \vec{n} \, dS - \frac{K}{g} S_f \vec{OG}_A \vec{k} \end{aligned}$$

Si nous désignons par  $\vec{h}$  la translation du point 0 et par  $\vec{\Theta}$  la rotation du solide autour du point C à partir de la position d'équilibre statique, il vient :

$$\begin{aligned} V - V_0 &= -h_z S_f - \Theta_x \iint_{S_f} y \, dS + \Theta_y \iint_{S_f} x \, dS \\ \iiint_V \vec{OP} \, dV - V_0 \vec{OG} &= -V_0 \vec{O}_0 G + \left[ -h_z \iint_{S_f} x \, dS - \Theta_x \iint_{S_f} xy \, dS + \Theta_y \iint_{S_f} x^2 \, dS \right] \vec{i} \\ &\quad + \left[ -h_z \iint_{S_f} y \, dS - \Theta_x \iint_{S_f} y^2 \, dS + \Theta_y \iint_{S_f} xy \, dS \right] \vec{j} \end{aligned}$$

$O_0$  désigne, ici, la position du centre de carène  $O_0$  de l'équilibre statique, liée au solide dans son déplacement.

Puisque seules les composantes  $h_z$  et  $\Theta_y$  nous intéressent ici, il vient :

$$\begin{aligned} -h_z S_f + \Theta_y \iint_{S_f} x \, dS &= \frac{1}{g} \iint_C \left[ U \frac{\partial}{\partial x} \phi(M) - \frac{1}{2} \text{grad}^2 \phi(M) \right] x \, dS - \frac{K}{g} S_f \\ h_z \iint_{S_f} x \, dS - \Theta_y \left[ \iint_{S_f} x^2 \, dS - V_0 (z_G - z_{O_0}) \right] &= \\ \frac{1}{g} \iint_C \left[ U \frac{\partial}{\partial x} \phi(M) - \frac{1}{2} \text{grad}^2 \phi(M) \right] (pz - \lambda x) \, dS &+ \frac{K}{g} S_f \alpha_{Gf} \end{aligned}$$

Soit encore, sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} -S_f & \iint_{S_f} x \, dS \\ \iint_{S_f} x \, dS & -\left[ \iint_{S_f} x^2 \, dS - V_0(z_G - z_{a_0}) \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_x \\ \theta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{g} \iint_c \left[ U \frac{\partial}{\partial x} \phi(M) - \frac{1}{2} q \omega^2 \phi(M) \right] \lambda \, dS - \frac{K S_f}{g} \\ \frac{1}{g} \iint_c \left[ \frac{\partial}{\partial x} \phi(M) - \frac{1}{2} q \omega^2 \phi(M) \right] (\rho z - \lambda x) \, dS - \frac{K S_f z_{c_0}}{g} \end{bmatrix}$$

Il convient de noter que la valeur de la constante de LAGRANGE  $K$  dépend des valeurs des différentes grandeurs à l'infini. Dans le cas où le fluide est au repos à l'infini, et où la pression est nulle au-dessus de la surface libre, elle est nulle.

#### A.6 Expression de l'enfoncement et de l'assiette dans l'hypothèse du Froude zéro

L'hypothèse du Froude zéro consiste à résoudre le problème hydrodynamique limite dans lequel on a fait tendre la vitesse du solide vers zéro.

Dès lors la condition de surface libre se simplifie et ne dépend plus de la vitesse d'avance. Il est donc possible de résoudre le problème hydrodynamique pour une vitesse unitaire ( $\phi(M)$ ) et d'écrire le potentiel des vitesses sous la forme :

$$\phi(M) = U \psi(M)$$

Les formules précédentes deviennent alors :

$$\begin{bmatrix} -S_f & \iint_{S_f} x \, dS \\ \iint_{S_f} x \, dS & -\left[ \iint_{S_f} x^2 \, dS - V_0(z_G - z_{a_0}) \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_x \\ \theta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{U^2}{g} \iint_c \left[ \frac{\partial}{\partial x} \psi(M) - \frac{1}{2} q \omega^2 \psi(M) \right] \lambda \, dS \\ \frac{U^2}{g} \iint_c \left[ \frac{\partial}{\partial x} \psi(M) - \frac{1}{2} q \omega^2 \psi(M) \right] (\rho z - \lambda x) \, dS \end{bmatrix}$$

Si le point de réduction des torseurs des efforts coïncide avec le centre de gravité de la surface de flottaison, il n'y a plus de couplage entre les deux équations.

Il vient alors :

$$h_x = - \frac{U^2}{g S_f} \iint_c \left[ \frac{\partial}{\partial x} \psi(M) - \frac{1}{2} q \omega^2 \psi(M) \right] \lambda \, dS$$

$$\theta_y = - \frac{U^2}{g \left[ \iint_{S_f} x^2 \, dS - V_0(z_G - z_{a_0}) \right]} \iint_c \left[ \frac{\partial}{\partial x} \psi(M) - \frac{1}{2} q \omega^2 \psi(M) \right] (\rho z - \lambda x) \, dS$$

Le surenfoncement et l'assiette sont proportionnels au carré de la vitesse de la carène. Il faut toutefois noter que les dénominateurs des deux expressions contiennent des termes qui peuvent varier avec le déplacement de la condition d'équilibre. Cependant, les formes quasi-cylindriques de la flottaison et les faibles valeurs des assiettes permettent d'obtenir un résultat correct sans itération pour des nombres de Froude relativement petits.

Il convient également de noter que le modèle du Froude zéro n'assure pas une pression nulle sur la "surface libre" (plan des cotes nulles) et qu'il est alors nécessaire de tenir compte de cette pression, variable le long de la carène, dans le calcul du surenfoncement et de l'assiette.

## ANNEXE B

### DETERMINATION DU POTENTIEL DES VITESSES

#### B.1 Position du problème

La détermination du champ de vitesse engendré par un corps solide qui se déplace à vitesse constante sur une surface libre est particulièrement complexe.

Le cas, a priori plus simple, où tous les termes non linéaires sont négligés et où la condition de surface libre est affichée sur le plan d'eau au repos (problème de NEUMANN-KELVIN) fait l'objet de recherches depuis de longues années sans qu'une solution acceptable ait été fournie, si tant est qu'elle existe et de manière unique.

Nous ne pouvons donc espérer obtenir un résultat qu'à la condition de consentir une hypothèse supplémentaire appelée hypothèse du Froude zéro. Celle-ci consiste à effectuer tous les calculs avec une condition de surface libre linéaire dans laquelle on a fait tendre la vitesse d'avance vers zéro. Dans ces conditions, toutes les grandeurs sont proportionnelles à la vitesse d'avance ou à son carré, la vitesse de référence est donc égale à l'unité.

Il convient naturellement de s'interroger sur l'aptitude qu'ont les hypothèses faites à fournir un modèle représentatif de la réalité physique dans le domaine qui nous intéresse. Deux remarques peuvent être faites,

La première concerne le surenfoncement au sujet duquel tous les auteurs des divers travaux consultés s'accordent à dire qu'il est proportionnel au carré de la vitesse d'avance pour des nombres de Froude sub-critiques. Cette affirmation repose d'une part sur des travaux théoriques et d'autre part sur des travaux expérimentaux et des observations in situ»

Elle justifie le choix de nos hypothèses vis-à-vis de ce problème dans la mesure où le coefficient de proportionnalité du carré de la vitesse peut être calculé pour la valeur limite de celle-ci,

La seconde concerne le champ de vitesse dans le fluide. Dans la mesure où nous ne nous intéressons à ce dernier qu'au voisinage du fond, loin de la surface libre, les hypothèses faites fournissent des résultats acceptables, surtout sous le pétrolier et à proximité de celui-ci, là où l'influence de la surface libre est faible pour les nombres de Froude considérés.

## B.2 Problème aux limites

Compte tenu des hypothèses faites en annexe A, et de l'hypothèse supplémentaire de surface libre rigide, nous avons à résoudre le problème aux limites suivantes :

- 1  $\Delta \phi(M) = 0.$  en tout point du fluide
- 2  $\frac{\partial}{\partial z} \phi(M) = 0.$  sur la surface libre SL
- 3  $\frac{\partial}{\partial n} \phi(M) = \vec{U} \cdot \vec{n}$  en tout point de la carène C
- 4  $\frac{\partial}{\partial z} \phi(M) = 0.$  sur le fond supposé plan et horizontal F
- 5  $\lim \phi(M) = 0.$  à l'infini

Nous utiliserons pour résoudre ce problème une méthode intégrale qui nous fournira par discrétisation un système d'équations linéaires.

## B.3 Equation intégrale

Soit  $D_0$  un domaine limité par la surface libre SL, le fond F, la carène C et la surface  $S$  d'un cylindre d'axe vertical entourant la carène. L'application de la deuxième formule de GREEN aux deux fonctions  $\phi(M')$  et  $1/|MM'|$  [dans le domaine  $D_0$  permet d'écrire, compte tenu de l'harmonicité de la fonction potentiel, l'expression suivante dans laquelle l'intégrale de STIELTJES a été remplacée par sa valeur :

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{\partial D} \frac{\partial}{\partial n'} \phi(M') \frac{1}{|MM'|} dS(M') - \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial D} \phi(M') \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{|MM'|} dS(M') = \frac{1}{4\pi} \Omega(M) \phi(M)$$

où  $\Omega(M)$  désigne l'angle solide sous lequel le bord de  $D$  est vu depuis  $M$ .

Cette expression, issue de la formule d'OSTROGRADSKY a été établie dans le cas où la normale est extérieure au domaine  $D_0$ . Nous pouvons changer le sens de cette normale en changeant simultanément les signes du premier membre de l'équation.

La fonction  $\phi(M)$  est régulière à l'infini. Il s'ensuit que les intégrales qui ont  $S$  pour support ont une limite nulle quand  $S$  tend vers l'infini.

Considérons désormais les deux infinités dénombrables de couples de domaines ( $D_p$  et  $D_{p'}$ ),  $D_p$  étant limité par les plans  $F_p$  et  $SL_p$  de cotes respectives  $(2p-1)h$  et  $2ph'$  et  $D_{p'}$  étant compris entre les plans  $SL_p$  et  $F_{p+1}$ .

Il convient de noter que seuls les domaines  $D_0$  et  $D_0'$  ne sont pas de simples bandes en raison de la présence de la carène.

La formule précédente peut être transposée aux domaines autres que  $D_0$  en introduisant les fonctions harmoniques régulières  $\phi_p(M)$  et  $\phi_{p'}(M)$ . La superposition de l'ensemble de ces résultats conduit à l'expression générale suivante :

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4\pi} \iint_{SL+c} \frac{\partial}{\partial n'} [\phi(M') - \phi'(M')] \frac{1}{|MM'|} dS(M') + \frac{1}{4\pi} \iint_{SL+c} [\phi(M') - \phi'(M')] \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{|MM'|} dS(M') \\
& -\frac{1}{4\pi} \iint_F \frac{\partial}{\partial n'} [\phi(M') - \phi'(M')] \frac{1}{|MM'|} dS(M') + \frac{1}{4\pi} \iint_F [\phi(M') - \phi'(M')] \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{|MM'|} dS(M') \\
& + \sum_{p \in \mathbb{Z}^*} \left\{ -\frac{1}{4\pi} \iint_{SL_p} \frac{\partial}{\partial n'} [\phi_p(M') - \phi'_p(M')] \frac{1}{|MM'|} dS(M') + \frac{1}{4\pi} \iint_{SL_p} [\phi_p(M') - \phi'_p(M')] \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{|MM'|} dS(M') \right. \\
& \left. -\frac{1}{4\pi} \iint_{F_p} \frac{\partial}{\partial n'} [\phi_p(M') - \phi'_p(M')] \frac{1}{|MM'|} dS(M') + \frac{1}{4\pi} \iint_{F_p} [\phi_p(M') - \phi'_p(M')] \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{|MM'|} dS(M') \right\} \\
& = \frac{1}{4\pi} \left\{ \Omega(M) \phi(M) + \Omega'(M) \phi'(M) + \sum_{p \in \mathbb{Z}^*} [\Omega_p(M) \phi_p(M) + \Omega'_p(M) \phi'_p(M)] \right\}
\end{aligned}$$

Soit maintenant  $g_p(M, M')$  une fonction harmonique et régulière dans le domaine  $D_p$ . L'application de la deuxième formule de GREEN à  $\phi_p(M')$  et à  $g_p(M, M')$  conduit à un résultat évidemment nul que nous pouvons superposer membre à membre avec l'équation précédente. Les fonctions  $g_p(M, M')$  étant arbitraires, elles peuvent être choisies pour que les intégrales sur tous les supports  $SL_p$  et  $F_p$  soient nulles. Il suffit, pour cela, d'écrire que  $\phi_p(M)$  vérifie les conditions aux limites sur  $SL$  et sur  $F$ , puisque toutes les fonctions  $g_p(M, M')$  peuvent être obtenues à partir de la première par changement de coordonnées. Il suffira donc d'imposer à  $g(M, M')$  de vérifier l'équation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{|MM'|} + g(M, M') \right] = 0 \quad \text{sur } SL \text{ et sur } F$$

La fonction  $g(M, M')$  étant elle aussi arbitraire, nous pouvons lui imposer d'être égale à  $\frac{1}{2} (\phi(M) - \phi'(M))$  sur leurs frontières communes. Dans ces conditions, la vitesse normale à la carène s'écrit en tout point de celle-ci :

$$-\frac{1}{4\pi} \iint \frac{\partial}{\partial n'} [\phi(M') - \phi'(M')] \frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{1}{|MM'|} + g(M, M') \right] dS(M') = \frac{\partial}{\partial n} \phi(M) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial n} [\phi(M) - \phi'(M)]$$

En posant  $\sigma(M) = \frac{\partial}{\partial n} (\phi(M) - \phi'(M))$ , nous obtenons une équation intégrale de FREDHOLM de deuxième espèce :

$$\frac{1}{2} \sigma(M) - \frac{1}{4\pi} \iint \sigma(M') \frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{1}{|MM'|} + g(M, M') \right] dS(M') = \vec{U} \cdot \vec{n} \quad \text{pour tout } M \text{ de } C$$

ANNEXE C

CONSTRUCTION DE LA FONCTION DE GREEN

Nous devons désormais construire la fonction de GREEN

$G(M, M') = 1/|MM'| + g(M, M')$  telle qu'elle vérifie les conditions de surface libre et de glissement sur le fond.

La fonction  $1/|MM'| + 1/|MN'|$  où  $N'$  est le point symétrique de  $M'$  par rapport au fond vérifie les équations 1,4 et 5 du paragraphe B.2. Nous recherchons donc une fonction  $g'(M, M')$  qui vérifie les équations 1,4 et 5 et telle que :

$$G(M, M') = \frac{1}{|MM'|} + \frac{1}{|MN'|} + g'(M, M')$$

vérifie l'équation 2. La fonction  $g'(M, M')$  écrite sous la forme suivante :

$$g'(M, M') = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} \hat{g}'(\theta, k) \frac{ch k(z+h)}{ch kh} e^{ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} k dk \right\}$$

convient à l'évidence. En exprimant les deux premiers termes de  $G(M, M')$  sous la forme d'une intégrale de FOURIER, nous obtenons :

$$G(M, M') = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \left[ 2 e^{-kh} e^{-kz} ch k(z+h) e^{-ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} + \hat{g}'(\theta, k) k \frac{ch k(z+h)}{ch kh} \right] e^{ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} dk \right\}$$

En écrivant que la condition 2 est vérifiée, nous obtenons :

$$\hat{g}'(\theta, k) = \frac{2 e^{-kh}}{k h k h} ch k(z+h) e^{-ik(x \cos \theta + y \sin \theta)}$$

Il vient alors :

$$G(M, M') = \frac{1}{|MM'|} + \frac{1}{|MN'|} + \frac{2}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} \frac{e^{-k\bar{\omega}}}{k h k h} ch k(z+h) ch k(z+h) e^{ik\bar{\omega}} dk \right\}$$

avec :  $\bar{\omega} = (x-x') \cos \theta + (y-y') \sin \theta$

Il vient donc, en posant  $K = kh$ ,  $\bar{\omega} = \bar{\omega}/h$  et  $Z = z/h$

$$G(M, M') = \frac{1}{|MM'|} + \frac{1}{|MN'|} + \frac{2}{\pi h} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} \frac{e^{-K\bar{\omega}}}{K K} ch K(Z+1) ch K(Z+1) e^{iK\bar{\omega}} dK \right\}$$

Il convient de noter que cette intégrale en  $K$  est divergente en 0. Dans ces conditions, nous transformerons l'intégrale en série, en remplaçant  $shK$  par son développement :

$$sh K = \frac{e^K - e^{-K}}{2} \Rightarrow sh^{-1} K = 2 e^{-K} (1 - e^{-2K})^{-1} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(2n+1)K} \quad |K| > 0$$

En transformant le produit des deux cosinus hyperboliques en exponentielles et en intégrant les termes de la série, nous obtenons :

$$G(M, M') = \frac{1}{|MM'|} + \frac{1}{|MM'|} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{|MN'_{n1}|} + \frac{1}{|MN'_{n2}|} + \frac{1}{|MN'_{n3}|} + \frac{1}{|MN'_{n4}|} \right]$$

avec :

$$z'_{n1} = z' + 2(n+1)h$$

$$z'_{n3} = -z' + 2nh$$

$$z'_{n2} = z' - 2(n+1)h$$

$$z'_{n4} = -z' - 2(n+2)h$$

Naturellement, cette série n'est pas convergente non plus. Cependant, les dérivées de  $G(M, M')$  par rapport aux coordonnées conduisent à des intégrales ou à des séries convergentes.

Il convient de noter par ailleurs, que si l'opérateur ponctuel (fonction de GREEN pour des points  $M$  et  $M'$  donnés) n'est pas convergent, l'ensemble des opérateurs intégrés sur la carène conduit à un résultat convergent. Ceci provient du fait qu'un opérateur ponctuel donne en débit tandis que leur somme sur la carène correspond à son débit non nul puisque le navire est réputé indéformable.

Considérons désormais la série suivante :

$$G_p(M, M') = \frac{1}{|MM'|} + \frac{1}{|MM'|} + \sum_{n=0}^p \left[ \frac{1}{|MN'_{n1}|} + \frac{1}{|MN'_{n2}|} + \frac{1}{|MN'_{n3}|} + \frac{1}{|MN'_{n4}|} \right]$$

Cette fonction vérifie toutes les conditions requises sauf la condition de surface libre. Nous nous attacherons donc à étudier l'influence du rang  $p$  sur la condition de surface libre. Pour cela, nous réexprimerons  $G_p(M, M')$  sous forme intégrale (convergente).

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} G_p(M, M') \Big|_{z=0} &= \frac{2}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} \left[ 2 \sum_{n=0}^p e^{-(2n+1)kh} \frac{e^{-k(z'+h)}}{k} \right] e^{-kz} dk \right\} \\ &= -\frac{2}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} e^{-(2p+3)kh} \frac{e^{-k(z'+h)}}{k} e^{ikz} dk \right\} \end{aligned}$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial z} G_p(M, M') \Big|_{z=0} \right| \leq \frac{1}{h^2} \int_0^{\infty} \left[ e^{-(2p+2)k} + e^{-(2p+4)k} \right] k dk = \frac{1}{h^2} \left[ \frac{1}{(2p+2)^2} + \frac{1}{(2p+4)^2} \right] < \frac{1}{h^2} \frac{1}{2(p+1)^2}$$

Ainsi, quel que soit  $\varepsilon$ , il existe  $p$  tel que  $\left| \frac{\partial}{\partial z} G_q(M, M') \Big|_{z=0} \right|$  soit inférieur à  $\varepsilon$  pour tout  $q$  supérieur ou égal à  $p$ .

En choisissant une valeur suffisamment grande de  $p$ , toutes les conditions aux limites sont satisfaites ; les conditions d'harmonicité, de régularité à l'infini et de glissement sur le fond de manière exacte, et les conditions de surface libre et de glissement sur la carène avec une précision donnée.

Des tests numériques ont été réalisés pour un navire test, avec des valeurs de  $p$  variant de 0 à 80. Ils ont montré que les résultats étaient satisfaisants à une précision  $M$  près en prenant :

$$p = E \left[ \frac{1}{\sqrt{2 M H^2}} \right] + 1$$

#### BIBLIOGRAPHIE

BOUGIS J.

"Etude de la diffraction-radiation dans le cas d'un flotteur indéformable animé d'une vitesse moyenne constante et sollicité par une houle sinusoidale de faible amplitude."  
Thèse de Docteur-Ingénieur. Nantes, 1980.

BOUGIS J.

"Etude du surenfoncement et de l'assiette des navires dus à la vitesse d'avance en eau calme."  
Rapport de recherche 315.82. Principia Sophia, 1982.

DELHOMMEAU G.

"Contribution à l'étude théorique et à la résolution numérique du problème de la résistance de vagues."  
Thèse de Docteur-Ingénieur. Nantes, 1978.

GUEVEL P.

"Hydrodynamique navale."  
Cours de la Section Spéciale d'Hydrodynamique Navale Avancée.  
Nantes, 1979.

RIBADEAU DUMAS L.

"Le surenfoncement des navires dû à leur mouvement."  
Revue technique du Service des Phares et Balises  
n°53. Mars 1982.