

# Méthode rapide de calcul des efforts dus à la diffraction-radiation de la houle sur des structures entièrement immergées

par

**P. GUEVEL**

Professeur

**G.DELHOMMEAU**

Ingénieur - Docteur

**J.C.DAUBISSE**

Maître-Assistant

Laboratoire d'Hydrodynamique Navale . ENSM. Nantes

et

**J. BOUGIS**

Ingénieur- Docteur

Principia Recherche Développement

## SOMMAIRE

Il n'y a aucune difficulté, d'ordre théorique ou d'ordre numérique, pour résoudre un problème de diffraction-radiation, que la structure considérée soit entièrement immergée ou non.

Cependant, le coût du traitement sur ordinateur reste très important lorsque les formes géométriques de la structure sont complexes.

Afin de diminuer ce coût, nous proposons un programme de calcul permettant de réaliser un gain substantiel sur les temps d'exploitation dans le cas où la structure est profondément immergée.

Cette méthode consiste essentiellement à générer le potentiel de Rankine par une distribution de singularités ordinaires réparties sur la surface de la carène et à générer le potentiel du champ de vagues par une suite de multipôles centrée en un seul point profondément immergé. Cette suite est obtenue en approchant au sens des moindres carrés le potentiel des singularités ordinaires sur une surface de contrôle entièrement immergée entourant le corps. Les potentiels de Rankine et de Kelvin n'étant pas indépendants, la mise en oeuvre de la méthode nécessite l'utilisation d'un processus itératif.

A FAST NUMERICAL METHOD FOR SOLVING THE PROBLEM  
OF DIFFRACTION-RADIATION FOR FULLY SUBMERGED BODIES

## SUMMARY

The linear problem of diffraction-radiation has already been solved. However, the computation cost are high when the structure is complicated, especially in finite water depth.

We propose here a method allowing to decrease considerably the computation time when the structure is deeply submerged.

In this method, the Rankine potential is calculated by Rankine singularities located on the hull, the wave potential being generated by a multipole series located at a point deeply submerged. The multipole strengths are obtained by approachin at the least square sense the Rankine potential on a given surface entirely submerged surrounding the body.

The Rankine potential and the wave potential are not independant, therefore we use an iterative process to obtain the solutions.

The results and the computation time are compared to those of classical diffraction-radiation program.

### I - INTRODUCTION

Une structure, de forme quelconque, soumise à l'action d'une houle monochromatique, unidirectionnelle, de faible amplitude, effectue des petites oscillations autour de sa position d'équilibre. Les mouvements de celle-ci seront rapportés à un système d'axes fixes (o, xyz); le plan x o y coïncide avec le plan de la surface libre au repos, oz est une verticale ascendante. Fig. (1).

Le domaine fluide est limité par un fond horizontal indéfini situé à la cote  $z=-h$ .

La direction dans laquelle se propage la houle incidente forme avec l'axe ox un angle que nous noterons  $\beta$ .

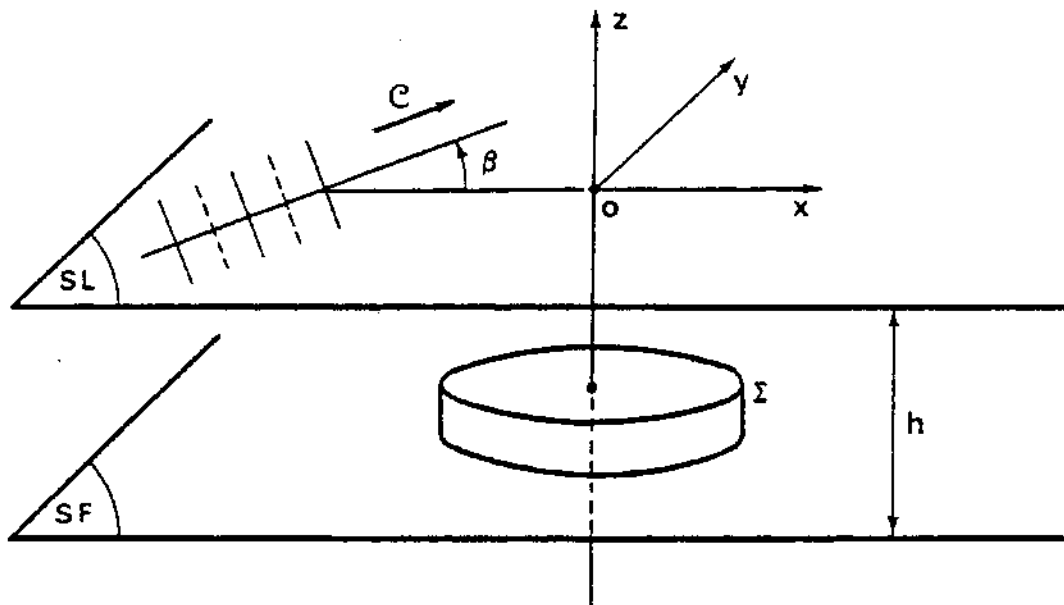
Cette houle incidente sera alors caractérisée par le potentiel :

$$\phi_I = \Re_e(\phi_I e^{-i\omega t}) \quad , \quad (1)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} \phi_I &= -\frac{aq}{\omega} \frac{\operatorname{ch} m_0(z+h)}{\operatorname{ch} m_0 h} e^{im_0(x \cos \beta + y \sin \beta)} \\ \omega^2 &= g m_0 \operatorname{th} m_0 h \quad , \end{aligned} \right\} (2)$$

a, T désignant respectivement l'amplitude et la période de cette houle;  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , la pulsation et  $m_0$ , le nombre d'ondes.



Fig(1)

Dans le cadre d'une théorie entièrement linéaire, la détermination des mouvements d'oscillations de la structure nécessite de résoudre au préalable les sept problèmes d'hydrodynamique définis par les équations suivantes.\*

$$\begin{aligned}
 \Delta \phi_q &= 0, \text{ dans tout le domaine fluide } (\mathcal{D}). \\
 -k_0 \phi_q + \left. \frac{\partial \phi_q}{\partial z} \right|_{z=0} &= 0 \quad k_0 = \frac{\omega^2}{g} \\
 \left. \frac{\partial \phi_q}{\partial z} \right|_{z=-h} &= 0 \\
 \left. \frac{\partial \phi_q}{\partial n} \right|_{\Sigma} &= \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{e}_q, & \text{pour } q=1,2,3 \text{ problèmes de radiation} \\ \vec{n} (\vec{e}_{q-3} \wedge 0\vec{M}), & \text{pour } q=4,5,6 \\ -\frac{\partial \phi_I}{\partial n}, & \text{pour } q=7, \text{ problème de diffraction} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{3}$$

( $\Sigma$ ) désignant la surface de carène,  $\vec{n}$  sa normale extérieure ;  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  étant les vecteurs unitaires des axes  $ox, oy, oz$ .

\* A ces équations, il convient encore d'adjoindre la condition de radiation à l'infini qui consiste à écrire que toutes les ondes émises par le flotteur sont des ondes divergentes ; ce résultat est automatiquement obtenu en substituant à la condition de surface libre des fluides parfaits, la condition de surface libre des fluides "presque parfaits" :

$$- \left[ k_0 + i(\varepsilon) \right] \phi_q + \left. \frac{\partial \phi_q}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \varepsilon \text{ étant un infiniment petit positif.}$$

De nombreuses méthodes ont déjà été mises au point pour résoudre ces sept problèmes : méthodes de singularités, de Rankine ou de Green ; méthode d'éléments finis ; méthodes mixtes . |1|, |2|, |3|, |4|, |5|, |6|, |7|, |8| .

La méthode de calcul que nous proposons ici est une variante de la méthode classique des singularités de Green ; aussi nous rappellerons brièvement les bases essentielles sur lesquelles celle-ci est fondée.

## II - MISE EN OEUVRE D'UNE METHODE DE SINGULARITES DE GREEN

a - Construction de l'opérateur élémentaire du type sources, de débit pulsatoire  $Q(t) = \mathcal{R}_e(Q e^{-i\omega t})$  :

Il s'agit de déterminer une fonction de potentiel  $\phi(M)$ , satisfaisant les trois premières équations (3), ainsi que la condition de radiation à l'infini, et telle que celle-ci présente au point  $M'$  une singularité du type source, soit :

$$\text{partie principale de } \phi(M), \text{ pour } M \rightarrow M', = -\frac{Q}{4\pi} \frac{1}{|MM'|}$$

Ce potentiel  $\phi$  peut être "exprimé sous forme d'une série ou sous la forme d'une intégrale.

### Formulation par une série

$$\phi = -i\frac{Q}{2h} \frac{M_0^2 - K_0^2}{M_0^2 - K_0^2 + K_0} \operatorname{ch} m_0(z+h) \operatorname{ch} m_0(z'+h) [J_0(m_0 r) + i Y_0(m_0 r)] - \frac{Q}{\pi h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k^2 + K_0^2}{M_k^2 + K_0^2 - K_0} \cos m_k(z+h) \cos m_k(z'+h) K_0(m_0 r) \quad (4)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \\ K_0 &= \frac{\omega^2 h}{g}, \quad M_0 \operatorname{th} M_0 = K_0, \quad M_0 = m_0 h \\ M_k \operatorname{tg} M_k &= -K_0, \quad M_k = m_k h \end{aligned} \right\} (5)$$

$J_0, Y_0$  désignant les fonctions de Bessel de première et de seconde espèce, d'ordre zéro ;  $K_0$ , étant la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce, d'ordre zéro.

Le recours à cette formule n'est avantageux que lorsque la distance horizontale  $r$  des points  $M$  et  $M'$  est grande vis à vis de la longueur d'onde  $\lambda = \frac{2\pi}{m_0}$  .

Formulation par une intégrale

$$\phi = -\frac{Q}{4\pi} \left[ \frac{1}{|MM'|} + \frac{1}{|MN'|} \right] - \frac{Q}{2\pi} \int_0^\infty \frac{(k+k_0) e^{-kh}}{k \operatorname{sh} k h - k_0 \operatorname{ch} k h - i(0)} \operatorname{ch} k(z+h) \operatorname{ch} k(z'+h) J_0(kr) dk \quad (6)$$

avec :

$$|MM'| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}, \quad |MN'| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z'+2h)^2} \\ r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}, \quad k_0 = \frac{\omega^2}{g} \quad (7)$$

$J_0$  désignant toujours la fonction de Bessel, de première espèce, d'ordre zéro.

Pour calculer numériquement l'intégrale  $I(M, M')$  de la formule (6), plusieurs méthodes ont déjà été proposées [7], [8] ; nous nous bornerons à décrire celle que nous avons adoptée - pour établir le programme de calcul "Aquadyn".

Le noyau  $N(k; M, M')$  de l'intégrale  $I(M, M')$  peut être mis sous la forme suivante :

$$N(k; M, M') = F(K) \cdot e^{-2kh} \operatorname{ch} k(z+h) \operatorname{ch} k(z'+h) J_0(kr) \quad (8)$$

en posant :

$$F(K) = \frac{(K+K_0) e^K}{K \operatorname{sh} K - K_0 \operatorname{ch} K - i(0)}, \quad K = kh, \quad K_0 = k_0 h \quad (9)$$

La partie réelle,  $K \operatorname{sh} K - K_0 \operatorname{ch} K$ , du dénominateur de cette fonction  $F(K)$  s'annule sur l'intervalle d'intégration pour une seule valeur  $K = M_0$  de la variable  $K$ ,  $M_0$  étant la solution positive de l'équation implicite :

$$M_0 \operatorname{th} M_0 = K_0 \quad (10)$$

Pour  $k = M_0$ , la dérivée de  $K \operatorname{sh} K - K_0 \operatorname{ch} K$  a pour expression :

$$\left. \frac{d}{dK} (K \operatorname{sh} K - K_0 \operatorname{ch} K) \right|_{K=M_0} = \frac{M_0^2 - K_0^2 + K_0}{M_0} \operatorname{ch} M_0$$

Cette quantité est manifestement positive, puisque  $M_0 > K_0$ ; la fonction  $F(K)$  admet donc un pôle simple pour  $K = M_0 + i(0)$ ; la valeur du résidu en ce point est :

$$A_0 = \frac{(M_0 + K_0)^2}{M_0^2 - K_0^2 + K_0} \quad (11)$$

Dans ces conditions, nous poserons :

$$F(K) = F_1(K) + \frac{A_0}{K - [M_0 + i(o)]} \quad (12)$$

de manière à faire apparaître une fonction  $F_1(K)$ ,

$$F_1(K) = \frac{(K+K_0) e^K}{K \operatorname{sh} K - K_0 \operatorname{ch} K - i(o)} - \frac{A_0}{K - [M_0 + i(o)]} \quad (13)$$

ne possédant plus de pôle sur l'intervalle d'intégration.

Afin d'effectuer commodément l'intégration en  $K$ , après avoir multiplié  $F_1(K)$  par  $e^{-2kh} \operatorname{ch} k(z+h) \operatorname{ch} k(z'+h) J_0(k_0 r)$ , on a évidemment intérêt à approximer la fonction  $F_1(K)$  par une fonction  $\tilde{F}_1(K)$  se présentant sous une forme beaucoup plus simple ; nous avons choisi de générer celle-ci par une suite finie d'exponentielles se présentant sous la forme suivante : |9|

$$\tilde{F}_1(K) = \sum_{s=1}^S a_s e^{\lambda_s K}, \quad (14)$$

les coefficients  $\lambda_s$  étant des réels négatifs ou nuls.

Le nombre d'exponentielles  $S$  est déterminé de telle sorte qu'on ait, quel que soit  $K$  :

$$\frac{F_1 - \tilde{F}_1}{|F_1|_{\max}} < 10^{-3}$$

A titre d'exemple, nous avons représenté sur la figure (2) les variations des fonctions  $F_1(K)$  et  $\tilde{F}_1(K)$ , pour  $K_0 = 1$ , en imposant d'abord  $S=3$ , puis  $S=8$ .

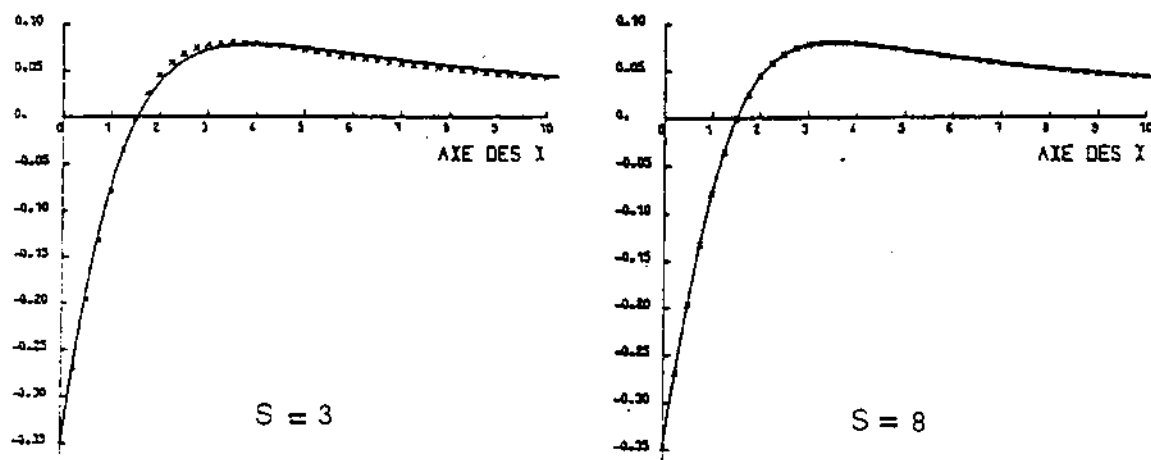


Fig. (2)

Dans ces conditions, l'intégrale  $I(M, M')$  prend la forme suivante :

$$I(M, M') = \sum_{s=1}^S a_s \int_0^{\infty} e^{h\lambda_s k} e^{-2kh} \operatorname{ch} k(z+h) \operatorname{ch} k(z'+h) J_0(kr) dk \\ + \frac{A_0}{h} \int_0^{\infty} \frac{1}{k - |m_0 + i(0)|} e^{-2kh} \operatorname{ch} k(z+h) \operatorname{ch} k(z'+h) J_0(kr) dk$$

En explicitant le produit  $\operatorname{ch} k(z+h) \operatorname{ch} k(z'+h)$  par une somme d'exponentielles, il vient encore :

$$I(M, M') = \frac{1}{4} \sum_{s=1}^S \sum_{p=1}^4 a_s \int_0^{\infty} e^{(z_p + h\lambda_s)k} J_0(kr) dk \\ + \frac{A_0}{4h} \sum_{s=1}^4 \int_0^{\infty} \frac{1}{k - |m_0 + i(0)|} e^{z_p k} J_0(kr) dk \quad (15)$$

avec

$$z_1 = z+z' \quad , \quad z_2 = -(z-z'+2h) \quad , \quad z_3 = z-z'-2h \quad , \quad z_4 = -(z+z'+4h) \quad (16)$$

Les intégrales du type  $\int_0^{\infty} e^{(z_p + h\lambda_s)k} J_0(kr) dk$  s'explicitent analytiquement.

On a, en effet, d'après l'identité  $\int_0^{\infty} e^{-|a|t} J_0(t) dt = \left(\frac{1}{1+a^2}\right)^{\frac{1}{2}}$  :

$$\int_0^{\infty} e^{(z_p + h\lambda_s)k} J_0(kr) dk = \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z_p + h\lambda_s)^2}} \quad (17)$$

D'où une nouvelle expression du potentiel  $\phi$  :

$$\phi = -\frac{Q}{4\pi} \left[ \frac{1}{|MM'|} + \frac{1}{|MN'|} + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^S \sum_{p=1}^4 a_s \frac{1}{|MM'_{sp}|} \right] \\ - \frac{Q}{8\pi} \frac{1}{h} A_0 \sum_{p=1}^4 \int_0^{\infty} \frac{1}{k - [m_0 + i(0)]} e^{z_p k} J_0(kr) dk \quad , \quad (18)$$

en posant :

$$|MM'_{sp}| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (h\lambda_s + z_p)^2} \quad (19)$$

Cette formulation, apparemment simple, est mal adaptée aux exigences des calculs qui seront développés par la suite. Aussi, nous transformerons l'intégrale :

$$\mathcal{L}_p(M, M') = \int_0^{\infty} \frac{1}{k - [m_0 + i(0)]} e^{z_p k} J_0(kr) dk \quad ,$$

en y effectuant la substitution :

$$J_0(kr) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{ikr \cos \theta} d\theta \\ = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{ik[(x-x') \cos \theta + (y-y') \sin \theta]} d\theta$$

Il vient ainsi :

$$\mathcal{L}_p(M, M') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta \int_0^{\infty} \frac{1}{k - [m_0 + i(0)]} e^{k \left\{ z_p + i[(x-x') \cos\theta + (y-y') \sin\theta] \right\}} dk$$

soit : |10|

$$\mathcal{L}_p(M, M') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{\zeta_p} \left[ \mathcal{E}_1(\zeta_p) + 2 i \pi \right] d\theta \quad (20)$$

avec :

$$\zeta_p = m_0 \left\{ z_p + i[(x-x') \cos\theta + (y-y') \sin\theta] \right\}, \quad (21)$$

$\mathcal{E}_1(\zeta)$  désignant la fonction exponentielle intégrale modifiée définie ainsi :

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_1(\zeta) &= E_1(\zeta) & , \quad \text{si } \text{Im } \zeta > 0 \\ \mathcal{E}_1(\zeta) &= E_1(\zeta) - 2i\pi & , \quad \text{si } \text{Im } \zeta < 0 \\ \mathcal{E}_1(\zeta) &= -E_1(-\zeta) - i\pi & , \quad \text{si } \text{Im } \zeta = 0 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$E_1(\zeta)$ ,  $E_i(\zeta)$  étant les fonctions exponentielles intégrales classiques dont nous rappelons ci-dessous les formules de définition :

$$\left. \begin{aligned} E_1(\zeta) &= \int_{\zeta}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt & (-\pi < \text{Arg } \zeta < +\pi) \\ E_i(\zeta) &= -\text{V.P.} \int_{-\zeta}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt & (\zeta > 0) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

En mettant à profit l'identité :

$$\mathcal{E}_1(\bar{\zeta}) = \overline{\mathcal{E}_1(\zeta)} - 2 i \pi, \quad (24)$$

l'intégrale  $\mathcal{L}_p(M, M')$  peut encore être mise sous la forme suivante :

$$\mathcal{L}_p(M, M') = \frac{1}{\pi} \mathcal{R}_e \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} e^{\zeta_p} \mathcal{E}_1(\zeta_p) d\theta + i \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} e^{\zeta_p} d\theta \quad (25)$$

D'où, en définitive, la formulation que nous avons retenue :

$$\phi = Q S(M, M') \quad (26)$$

avec :

$$\left. \begin{aligned} S(M, M') &= -\frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1}{|MM'|} + \frac{1}{|MN'|} + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^S \sum_{p=1}^4 a_s \frac{1}{|MM'_{sp}|} \right] \\ &\quad - \frac{1}{8\pi^2} \frac{A_0}{h} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sum_{p=1}^4 \left\{ \mathcal{R}_e \left[ e^{\zeta_p} \mathcal{E}_1(\zeta_p) \right] + i \pi e^{\zeta_p} \right\} d\theta \end{aligned} \right\} \quad (27)$$



b - Transformation du problème aux limites en un problème intégral

La distribution de singularités cinématiquement équivalente à la carène est recherchée sous la forme d'une distribution superficielle du type mixte de Green, répartie uniquement sur la surface de carène ( $\Sigma$ ) ; celle-ci est composée de sources et de doublets normaux ayant respectivement pour densités superficielles :

$$\sigma(M') = \left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_{M'} , \quad \mu(M') = -\phi(M') \quad (28)$$

Pour chacun des sept problèmes d'hydrodynamique qu'on a à résoudre,  $\frac{\partial\phi}{\partial n}$  est donné sur la surface de carène par la dernière des formules (3).

Seule, reste donc inconnue la densité de doublets  $\mu(M')$ .

Le potentiel engendré en tout point M du domaine ( $-h < z < 0$ ) par la distribution considérée a pour expression :

$$\phi(M) = \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_{M'} S(M, M') d\Sigma(M') + \iint_{\Sigma} \mu(M') D(M, M') d\Sigma(M') \quad (29)$$

avec :

$$D(M, M') = \vec{n}(M') \cdot \text{grad}_{M'} S(M, M') , \quad (30)$$

$S(M, M')$  étant la fonction définie par la formule (27).

Compte-tenu de la discontinuité du potentiel de double couche, le potentiel au point  $M'$  situé sur la face interne ( $\Sigma^-$ ) de la surface de carène ( $\Sigma$ ) s'exprime alors ainsi :

$$\phi(M^-) = \frac{1}{2} \mu(M) + \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_{M'} S(M, M') d\Sigma(M') + \iint_{\Sigma} \mu(M') D(M, M') d\Sigma(M') , \quad M \in (\Sigma)$$

Or, la distribution mixte de Green engendre un potentiel identiquement nul à l'intérieur de la carène ; on a donc, en particulier :

$$\phi(M^-) \equiv 0 , \quad M^- \in (\Sigma^-) \quad (31)$$

D'où l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce qui permet de déterminer la densité  $\mu(M')$  des doublets normaux :

$$\frac{1}{2} \mu(M) + \iint_{\Sigma} \mu(M') D(M, M') d\Sigma(M') = - \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_{M'} S(M, M') d\Sigma(M') ; \quad M \in (\Sigma) \quad (32)$$

c - Détermination de la densité de doublets normaux par une méthode de discrétisation

La surface de carène ( $\Sigma$ ) est assimilée à la juxtaposition de N facettes polygonales planes  $s_j$ , de dimensions suffisamment petites pour qu'on puisse admettre que chacune d'elles est le support d'une distribution uniforme de sources et de doublets normaux de densités  $\sigma_j$  et  $\mu_j$ .

Dans ces conditions, l'équation intégrale (32) prend la forme suivante  $\sigma_j$  désignant la valeur moyenne de  $\frac{\partial\phi}{\partial n}$  sur la facette  $s_j$  :

$$\frac{1}{2} \mu(M) + \sum_{j=1}^N \mu_j D_j(M) = - \sum_{j=1}^N \sigma_j S_j(M) \quad (33)$$

avec :

$$S_j(M) = \iint_{s_j} S(M, M') d\Sigma(M') \quad , \quad D_j(M) = \iint_{s_j} D(M, M') d\Sigma(M') \quad (34)$$

Cette dernière équation, qui ne comporte plus que N inconnues, ne peut évidemment pas être satisfaite en tout point M de la surface ( $\Sigma$ ) ; on se contentera de l'écrire seulement en N points de contrôle, par exemple au centre de gravité  $M_i$  de chacune des facettes  $s_j$ .

En définitive, l'équation intégrale (32) est remplacée par le système linéaire suivant de N équations complexes à N inconnues complexes :

$$\frac{1}{2} u_i + \sum_{j=1}^N u_j D_{ij} = - \sum_{j=1}^N \sigma_j S_{ij} \quad (35)$$

avec :

$$S_{ij} = \iint_{s_j} S(M_i, M') d\Sigma(M') \quad , \quad D_{ij} = \iint_{s_j} D(M_i, M') d\Sigma(M') \quad (36)$$

ou bien, d'après (27) :

$$S_{ij} = s_{ij} + \mathcal{S}_{ij} \quad , \quad D_{ij} = d_{ij} + \mathcal{D}_{ij} \quad (37)$$

en posant :

$$\left. \begin{aligned} s_{ij} &= - \frac{1}{4\pi} \iint_{s_j} \left[ \frac{1}{|M_i M'|} + \frac{1}{|M_i N'|} + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^S \sum_{p=1}^4 a_s \frac{1}{|M_i M'_{sp}|} \right] d\Sigma(M') \\ \mathcal{S}_{ij} &= - \frac{1}{8\pi^2} \frac{A_0}{h} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \iint_{s_j} \sum_{p=1}^4 \left\{ \mathcal{R}_e [e^{\zeta_p} \mathcal{E}_1(\zeta_p)] + i \pi e^{\zeta_p} \right\} d\Sigma(M') \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

et :

$$\left. \begin{aligned} d_{ij} &= - \frac{1}{4\pi} \iint_{s_j} \vec{n}_j \cdot \text{grad}_{M'} \left[ \frac{1}{|M_i M'|} + \frac{1}{|M_i N'|} + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^S \sum_{p=1}^4 a_s \frac{1}{|M_i M'_{sp}|} \right] d\Sigma(M') \\ \mathcal{D}_{ij} &= - \frac{1}{8\pi^2} \frac{A_0}{h} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \iint_{s_j} \vec{n}_j \cdot \text{grad}_{M'} \sum_{p=1}^4 \left\{ \mathcal{R}_e [e^{\zeta_p} \mathcal{E}_1(\zeta_p)] + i \pi e^{\zeta_p} \right\} d\Sigma(M') \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Les coefficients d'influence  $s_{ij}$ ,  $d_{ij}$  s'expriment analytiquement par les formules de Hess et Smith [11].

Par ailleurs, les intégrales de surface qui interviennent dans les expressions des coefficients d'influence  $\mathcal{S}_j$  et  $\mathcal{D}_j$  peuvent également être calculées analytiquement [12]. Cette circonstance favorable est due, d'une part, au fait que les arguments  $\zeta$  des fonctions transcendentes  $e^\zeta$  et  $e^\zeta \mathcal{E}_1(\zeta)$  sont des fonctions linéaires des variables  $x^1, y^1, z^1$  et, d'autre part, que les primitives de ces fonctions transcendentes sont connues analytiquement.

$$\begin{aligned} * \int e^\zeta \mathcal{E}_1(\zeta) d\zeta &= e^\zeta \mathcal{E}_1(\zeta) + \text{Log}(-\zeta) + c^{te}, \quad -\pi < \text{Arg}(-\zeta) < +\pi \\ \int [e^\zeta \mathcal{E}_1(\zeta) + \text{Log}(-\zeta)] d\zeta &= e^\zeta \mathcal{E}_1(\zeta) + (1+\zeta) \text{Log}(-\zeta) + c^{te} \end{aligned}$$

On trouve ici la justification du processus qui nous a amené à exprimer le potentiel élémentaire engendré par une source ponctuelle de débit pulsant par les formules (26, 27) plutôt que par les formules (4) ou (18), apparemment plus simples.

Cependant le calcul effectif des coefficients d'influence  $S_{ij}$ ,  $D_{ij}$  exige encore d'effectuer des quadratures numériques ; les noyaux des intégrales relatives à la variable  $\theta$  se présentent en effet sous une forme trop complexe pour qu'on puisse espérer trouver une méthode d'intégration analytique. Il en résulte que les temps nécessaires au traitement numérique restent importants ; aussi, on ne peut raisonnablement envisager de discrétiser une carène par plus d'une centaine de facettes.

Or, il existe de nombreux types de structures complexes qui ne peuvent pas être convenablement décrites par un nombre de facettes aussi réduit.

La méthode de calcul que nous décrirons ci-après permet d'augmenter sensiblement la finesse de la discrétisation sans majorer pour autant le coût du traitement numérique.

Pour l'instant, cette méthode n'est applicable qu'au cas des structures entièrement immergées.

Sa mise en oeuvre comporte d'ailleurs deux versions, selon que la structure est située loin du fond ou bien à proximité de celui-ci.

Nous nous bornerons à exposer la seconde de ces versions.

### III - PRINCIPE DE LA METHODE DES MULTIPLES

Cette méthode s'apparente à celle que nous avons décrite aux journées de l'ATMA, en 1979, pour traiter le problème de la résistance de vagues [12].

Elle consiste essentiellement à distinguer, dans le potentiel total  $\Phi$  engendré par une distribution de singularités cinématiquement équivalente à la carène, le potentiel de RANKINE  $\phi$  et le potentiel de KELVIN  $\varphi$ .

Ceux-ci sont définis de la manière suivante, pour une distribution superficielle de singularités composée de sources et de doublets normaux ayant respectivement pour densités  $\sigma(M')$ ,  $\mu(M')$  :

$$\phi = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \sigma(M') \left[ \frac{1}{|MM'|} + \frac{1}{|MN'|} \right] d\Sigma(M') - \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \mu(M') \vec{n}(M') \cdot \text{grad}_{M'} \left[ \frac{1}{|MM'|} + \frac{1}{|MN'|} \right] d\Sigma(M') \quad (40)$$

$$\varphi = \iint_{\Sigma} \sigma(M') G(M, M') d\Sigma(M') + \iint_{\Sigma} \mu(M') \vec{n}(M') \cdot \text{grad}_{M'} G(M, M') d\Sigma(M') \quad , \quad (41)$$

la fonction  $G(M, M')$  ayant pour expression, d'après (27) :

$$G(M, M') = -\frac{1}{8\pi} \sum_{s=1}^S \sum_{p=1}^4 a_s \frac{1}{|MM'_{sp}|} - \frac{1}{8\pi^2} \frac{A_0}{h} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sum_{p=1}^4 \left\{ \mathcal{R}_e \left[ e^{\zeta_p} \mathcal{E}_1(\zeta_p) \right] + i \pi e^{\zeta_p} \right\} d\theta \quad (42)$$

Le calcul effectif des coefficients d'influence  $K_{ij}$  attachés à l'existence du potentiel de KELVIN est incomparablement plus long que celui des coefficients d'influence  $R_{ij}$ , correspondant au potentiel de RANKINE. Rappelons en effet que les premiers s'expriment par une intégrale relative à la variable  $\theta$ , tandis que les seconds sont donnés par une formule analytique très simple ; à titre indicatif, le rapport des temps nécessaires au calcul de ceux-ci est de l'ordre de 20.

Or, il ne semble pas qu'il soit encore possible de réaliser des progrès très significatifs sur le calcul des coefficients  $K_{ij}$ .

Aussi, pour améliorer sensiblement les performances du programme de diffraction-radiation décrit ci-dessus, on n'entrevoit guère d'autre solution que celle qui consiste à réduire le nombre de coefficients  $K_{ij}$  qu'il convient de calculer-

Mais encore faut-il ne pas altérer pour autant la précision des résultats ; cela semble possible, compte-tenu des remarques suivantes :

Le potentiel de RANKINE varie très rapidement autour des accidents locaux d'une carène ; c'est la raison pour laquelle il est nécessaire de discretiser très finement de tels accidents. Par contre, le potentiel de KELVIN n'est guère sensible à la présence d'appendices divers, surtout lorsque ceux-ci sont immergés à une profondeur relativement grande. Par ailleurs, le potentiel de KELVIN  $\phi$  est parfaitement déterminé, dans tout l'espace ( $-h < z < 0$ ), lorsqu'on connaît seulement la trace du potentiel de RANKINE  $\phi$  sur le plan  $z=0$  ainsi que sa dérivée normale

$\frac{\partial \phi}{\partial z}$  sur ce même plan.

Dans ces conditions, on conçoit qu'il peut être intéressant de générer les fonctions :

$$\phi(x,y) \Big|_{z=0}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \phi(x,y,z) \Big|_{z=0},$$

non plus par la distribution superficielle de singularités initiale  $(\mathcal{E}_R)$ , mais par une distribution de singularités différente  $(\tilde{\mathcal{E}}_R)$ , mieux adaptée à la poursuite des calculs ; les distributions  $(\mathcal{E}_R)$ ,  $(\tilde{\mathcal{E}}_R)$  ne devant être équivalentes que sur le plan  $z=0$ .

La distribution  $(\tilde{\mathcal{E}}_R)$  que nous avons adoptée est une suite de multipôles de RANKINE ; dans la version présentée ici, tous ces multipôles sont centrés sur le même point  $M_0$  du plan  $z = -h$ , situé sur la verticale du centre de carène C.

Dès lors qu'on aura déterminé cette suite de multipôles, nous calculerons le potentiel de KELVIN  $\tilde{\phi}$  attaché à celle-ci, de sorte que la solution du problème complet sera :  $\phi = \phi + \tilde{\phi}$ . Il apparaît immédiatement que le recours à un tel artifice pour expliciter ce potentiel de KELVIN présentera d'autant plus d'intérêt que le nombre de termes K intervenant dans la suite de multipôles sera faible vis à vis du nombre de facettes N retenu pour discretiser la surface de carène  $(\Sigma)$ .

\* Dans le cas où la structure n'est pas disposée à proximité du fond, on doit considérer deux suites de multipôles, l'une centrée sur le centre de carène C, l'autre sur son symétrique  $C_1$  par rapport au fond.

Pour que le potentiel  $\tilde{\phi}^2$  soit bien identique au potentiel  $\phi$ , on doit satisfaire les conditions d'équivalence :

$$\tilde{\phi} \equiv \phi \quad , \quad \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z} \equiv \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad , \quad \text{pour } z = 0 \quad (43)$$

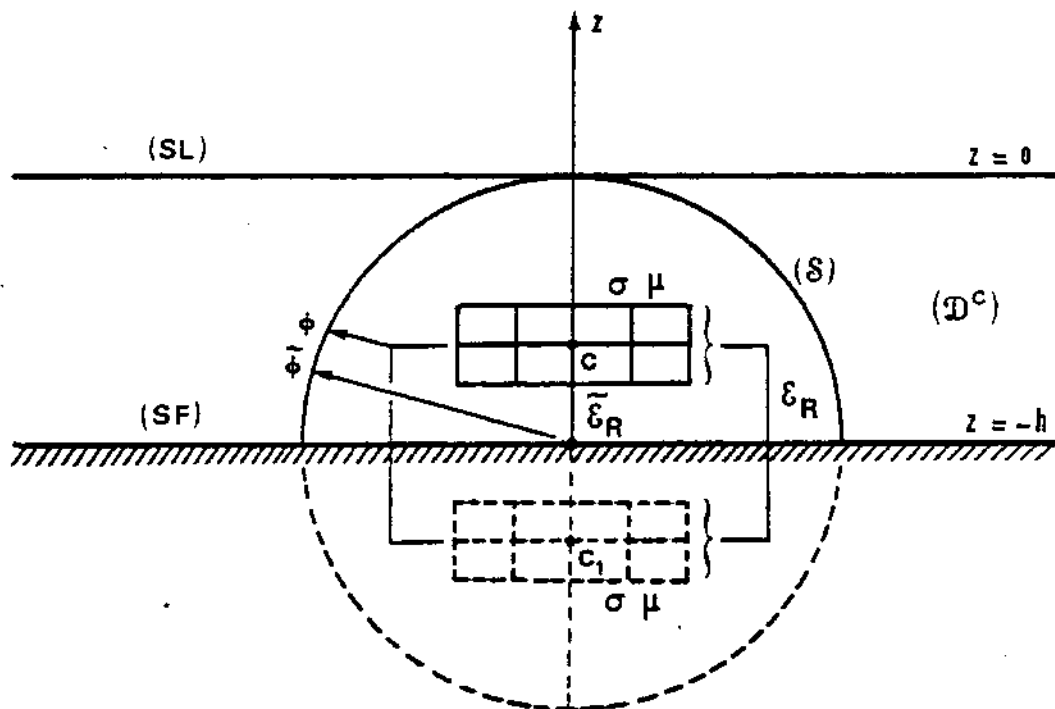
Pour cela, il suffit qu'on ait  $\tilde{\phi} \equiv \phi$  dans tout le domaine  $(\mathcal{D}^c)$  extérieur à une sphère de Centre  $M_0$ , de rayon  $r=h$ ; mais comme  $\tilde{\phi}$ ,  $\phi$  sont des fonctions harmoniques s'annulant toutes deux à l'infini comme  $\frac{1}{|M_0 M|^2}$ , la condition  $\tilde{\phi} \equiv \phi$  dans  $(\mathcal{D}^c)$  sera assurée si on a seulement :

$$\tilde{\phi} \equiv \phi \quad , \quad \text{sur } (\mathcal{S}) \quad (44)$$

La puissance de chacun des multipoles constituant la suite  $(\tilde{\epsilon}_R)$  sera alors déterminée en effectuant l'identification ci-dessus.

Le schéma de la figure (3) résume le principe de la méthode que nous venons d'exposer.

Il reste maintenant à donner les éléments essentiels à sa mise en application.



$$[\tilde{\phi} \equiv \phi]_{(S)} \longrightarrow [\tilde{\phi} \equiv \phi]_{(\mathcal{D}^c)} \longrightarrow \left[ \tilde{\phi} \equiv \phi \quad \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z} \equiv \frac{\partial \phi}{\partial z} \right]_{(SL)} \longrightarrow [\tilde{\epsilon}_R^2 \equiv \phi]_{(-h < z < 0)}$$

Fig. (3)

#### IV - MISE EN OEUVRE DE LA METHODE DES MULTIPLES

##### IV.1 - Potentiel de RANKINE, engendré par une suite de multipoles

Considérons tout d'abord une source de RANKINE, de débit unitaire,

centrée sur le point  $M'(x', y', z')$  ; celle-ci engendre en tout point  $M$  de l'espace un potentiel harmonique ayant pour expression :

$$\phi(M) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{R} \quad , \quad R = |MM'| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \quad (45)$$

Toutes ses dérivées successives, par rapport à  $x'$ ,  $y'$  ou  $z'$ , sont manifestement des solutions de l'équation de Laplace.

Les fonctions construites comme suit,

$$\phi_{\ell, m, n} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial^\ell}{\partial x'^\ell} \frac{\partial^m}{\partial y'^m} \frac{\partial^n}{\partial z'^n} \left[ \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \right] \quad (46)$$

forment donc une suite de fonctions harmoniques élémentaires. Celles-ci ne sont pas toutes linéairement indépendantes ; on a, en effet, par exemple :

$$\begin{aligned} \phi_{2,0,0} + \phi_{0,2,0} + \phi_{0,0,2} &= 0 ; \\ \phi_{3,0,0} + \phi_{1,2,0} + \phi_{1,0,2} &= 0 \quad , \quad \phi_{0,3,0} + \phi_{2,1,0} + \phi_{0,1,2} = 0 \quad , \quad \phi_{0,0,3} + \phi_{2,0,1} + \phi_{0,2,1} = 0 \end{aligned}$$

Nous donnons ci-dessous les expressions explicites de celles de ces fonctions qui sont linéairement indépendantes, et qui satisfont en outre la condition  $\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=z'} = 0$  \* :

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 = \phi_{1,0,0} &= -\frac{1}{4\pi} \frac{x-x'}{R^3} \\ \phi_2 = \phi_{0,1,0} &= -\frac{1}{4\pi} \frac{y-y'}{R^3} \\ \phi_3 = \phi_{2,0,0} &= -\frac{1}{4\pi} \left[ \frac{3(x-x')^2}{R^5} - \frac{1}{R^3} \right] \\ \phi_4 = \phi_{1,1,0} &= -\frac{1}{4\pi} \frac{3(x-x')(y-y')}{R^5} \\ \phi_5 = \phi_{0,2,0} &= -\frac{1}{4\pi} \left[ \frac{3(y-y')^2}{R^5} - \frac{1}{R^3} \right] \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

\* Nous avons arrêté cette liste aux multipôles de rang  $r=4$  inclus ( $r=\ell+m$ ,  $n=0$ ). Les expressions des potentiels engendrés par les multipôles d'ordre supérieur s'obtiennent sans difficulté par application des identités :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'} \left[ \frac{(x-x')^\alpha (y-y')^\beta}{R^\delta} \right] &= \delta \frac{(x-x')^{\alpha+1} (y-y')^\beta}{R^{\delta+2}} - \frac{(x-x')^{\alpha-1} (y-y')^\beta}{R^\delta} \\ \frac{\partial}{\partial y'} \left[ \frac{(x-x')^\alpha (y-y')^\beta}{R^\delta} \right] &= \delta \frac{(x-x')^\alpha (y-y')^{\beta+1}}{R^{\delta+2}} - \frac{(x-x')^\alpha (y-y')^{\beta-1}}{R^\delta} \end{aligned}$$

Les monômes de mêmes puissances, en  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$ , sont regroupés après dérivation ; les expressions de  $\phi_{\ell+1, m, 0}$  et  $\phi_{\ell, m+1, 0}$  se déduisent alors immédiatement de l'expression de  $\phi_{\ell, m, 0}$ .

$$\begin{aligned}
\phi_6 = \phi_{3,0,0} &= -\frac{1}{4\pi} (x-x') \left[ \frac{15(x-x')^2}{R^7} - \frac{9}{R^5} \right] \\
\phi_7 = \phi_{2,1,0} &= -\frac{1}{4\pi} (y-y') \left[ \frac{15(x-x')^2}{R^7} - \frac{3}{R^5} \right] \\
\phi_8 = \phi_{1,2,0} &= -\frac{1}{4\pi} (x-x') \left[ \frac{15(y-y')^2}{R^7} - \frac{3}{R^5} \right] \\
\phi_9 = \phi_{0,3,0} &= -\frac{1}{4\pi} (y-y') \left[ \frac{15(y-y')^2}{R^7} - \frac{9}{R^5} \right] \\
\phi_{10} = \phi_{4,0,0} &= -\frac{1}{4\pi} \left[ \frac{105(x-x')^4}{R^9} - \frac{90(x-x')^2}{R^7} + \frac{9}{R^5} \right] \\
\phi_{11} = \phi_{3,1,0} &= -\frac{1}{4\pi} (x-x')(y-y') \left[ \frac{105(x-x')^2}{R^9} - \frac{45}{R^7} \right] \\
\phi_{12} = \phi_{2,2,0} &= -\frac{1}{4\pi} \left[ \frac{105(x-x')^2(y-y')^2}{R^9} - \frac{15(x-x')^2 + (y-y')^2}{R^7} + \frac{3}{R^5} \right] \\
\phi_{13} = \phi_{1,3,0} &= -\frac{1}{4\pi} (x-x')(y-y') \left[ \frac{105(y-y')^2}{R^9} - \frac{45}{R^7} \right] \\
\phi_{14} = \phi_{0,4,0} &= -\frac{1}{4\pi} \left[ \frac{105(y-y')^4}{R^9} - \frac{90(y-y')^2}{R^7} + \frac{9}{R^5} \right]
\end{aligned} \tag{47}$$

On constate que chacune de ces fonctions peut être identifiée par un seul numéro d'ordre  $k$  ; on a, en effet :

$$\phi_k = \phi_{\ell,m,0} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x'^{\ell}} \frac{\partial}{\partial y'^m} \left[ \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \right] \tag{48}$$

avec :

$$\begin{aligned}
\ell &= \frac{r(r+3)}{2} - k \\
m &= k - \frac{r(r+1)}{2} \\
r &= \ell + m = \text{partie entière de } \left( \frac{\sqrt{\ell+8k-1}}{2} \right)
\end{aligned} \tag{49}$$

Dans notre cas particulier, il nous suffit de connaître le potentiel  $\tilde{\phi}$  engendré, sur la sphère (S), par la suite  $(\tilde{\epsilon}_R)$ .

En notant  $\mathcal{M}_k$  la puissance du multipôle caractérisé par le numéro d'ordre  $k$ , ce potentiel a pour expression :

$$\tilde{\phi}(M) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^K \frac{\mathcal{M}_k}{h^{r+1}} R_k(M) \tag{50}$$

en posant :

$$X = \frac{x-x'}{h} = \sin\theta \cos\varphi, \quad Y = \frac{y-y'}{h} = \sin\theta \sin\varphi, \tag{51}$$

$\theta, \varphi$  désignant respectivement la longitude et la colatitude d'un point M situé sur la sphère (S), de centre  $M_0$ , de rayon  $h$ , et :

$$\begin{aligned}
R_1 &= X & , R_2 &= Y & ; \\
R_3 &= 3X^2 - 1 & , R_4 &= 3XY & , R_5 &= 3Y^2 - 1 & ; \\
R_6 &= 15X^3 - 9X & , R_7 &= 15X^2Y - 3Y & , R_8 &= 14XY^2 - 3X & , R_9 &= 15Y^3 - 9Y ; \\
R_{10} &= 105X^4 - 90X^2 & , R_{11} &= 105X^3Y - 45XY & , R_{12} &= 105X^2Y^2 - 15(X^2 + Y^2) + 3 & , R_{13} &= 105XY^3 - 45XY \\
& & & & & & & R_{14} &= 105Y^4 - 90Y^2 + 9 ;
\end{aligned} \quad (52)$$

Dès que la distribution superficielle de singularités cinématiquement équivalente à la carène est connue, la puissance des multipôles formant la suite  $(\tilde{\mathcal{E}}_p)$  s'obtient sans difficulté, par identification ; pour un nombre donné  $\tilde{R}$  de multipôles, on cherche à satisfaire le mieux possible l'identité :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^K \frac{\mathcal{M}_k}{h^{r+1}} R_k(M) &= \iint_{\Sigma} \sigma(M') \left[ \frac{1}{|MM'|} + \frac{1}{|MN'|} \right] d\Sigma(M') \\
&\quad \iint_{\Sigma} \mu(M') \cdot \vec{n}(M') \operatorname{grad}_{M'} \left[ \frac{1}{|MM'|} + \frac{1}{|MN'|} \right] d\Sigma(M'), \quad M \in (S)
\end{aligned} \quad (53)$$

Pour cela, on a recours à une méthode de moindres carrés utilisant des transformations orthogonales du type HOUSEHOLDER.

#### IV.2 - Potentiel de KELVIN, engendré par une suite de multipôles

D'après les formules (16), (19), (21), (41) et (42), le potentiel engendré par une source de KELVIN a pour expression :

$$\begin{aligned}
\varphi &= -\frac{Q}{8\pi} \sum_{s=1}^S \sum_{p=1}^4 a_s \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (h\lambda_s + z_p)^2}} \\
&\quad - \frac{Q}{8\pi^2} \frac{A_0}{h} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sum_{p=1}^4 \left\{ \mathcal{R}_e \left[ e^{\zeta_p} \mathcal{E}_1(\zeta_p) \right] + i \pi e^{\zeta_p} \right\} d\theta,
\end{aligned}$$

avec :

$$\zeta_p = m_0 \left\{ z_p + i \left[ (x-x') \cos\theta + (y-y') \sin\theta \right] \right\}$$

et :

$$z_1 = z + z', \quad z_2 = -(z - z' + 2h), \quad z_3 = z - z' - 2h, \quad z_4 = -(z + z' + 4h)$$

Dans le cas particulier où cette source est centrée sur le plan  $z = -h$ , il convient d'effectuer dans les formules ci-dessus les substitutions suivantes :

$$Q \rightarrow \frac{Q}{2}, \quad z' \rightarrow -h$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}
z_3 &= z_1 = z - h, & z_4 &= z_2 = -(z + 3h) ; \\
\zeta_3 &= \zeta_1 = m_0 \left\{ z_1 + i \left[ (x-x') \cos\theta + (y-y') \sin\theta \right] \right\} \\
\zeta_4 &= \zeta_2 = m_0 \left\{ z_2 + i \left[ (x-x') \cos\theta + (y-y') \sin\theta \right] \right\}
\end{aligned} \quad (54)$$



et, par suite :

$$\begin{aligned} \varphi = & -\frac{Q}{8\pi} \sum_{s=1}^S \sum_{p=1}^2 a_s \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (h_s + z_p)^2}} \\ & - \frac{Q}{8\pi^2} \frac{A_0}{h} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sum_{p=1}^2 \left\{ \mathcal{R}_e [e^{\zeta_p} \mathcal{E}_1(\zeta_p)] + i \pi e^{\zeta_p} \right\} d\theta \end{aligned} \quad (55)$$

La méthode de calcul adoptée ici ne nécessitant plus d'effectuer des quadratures sur des surfaces élémentaires, nous avons intérêt à transformer le premier terme de (55) en recourant à l'identité :

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{1}{\pi} \mathcal{R}_e \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{d\theta}{z + i(x \cos \theta + y \sin \theta)}, \quad z < 0, \quad (56)$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (h_s + z_p)^2}} &= -\frac{1}{\pi} \mathcal{R}_e \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{d\theta}{h \lambda_s + z_p + i[(x-x') \cos \theta + (y-y') \sin \theta]} \\ &= -\frac{m_0}{\pi} \mathcal{R}_e \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{d\theta}{M_0 \lambda_s + \zeta_p} \end{aligned}$$

D'où, en définitive, l'expression du potentiel de KELVIN engendré par une source de débit pulsatoire, centrée sur le plan  $z=-h$  :

$$= -\frac{Q}{8\pi^2} \frac{1}{h} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sum_{p=1}^2 [F_0(\zeta_p, \theta) + G_0(\zeta_p, \theta)] d\theta \quad (57)$$

avec :

$$\left. \begin{aligned} F_0(\zeta_p, \theta) &= \mathcal{R}_e \left[ A_0 e^{\zeta_p} \mathcal{E}_1(\zeta_p) - \sum_{s=1}^S a_s \frac{M_0}{M_0 \lambda_s + \zeta_p} \right] \\ G_0(\zeta_p, \theta) &= i \pi A_0 e^{\zeta_p} \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

On en déduit immédiatement le potentiel de KELVIN engendré par un multipole ayant pour numéro d'ordre  $k$ , soit :

$$\varphi_k = -\frac{\mathcal{M}_k}{8\pi^2} \frac{1}{h} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sum_{p=1}^2 [F_k(\zeta_p, \theta) + G_k(\zeta_p, \theta)] d\theta$$

avec :

$$\begin{aligned} F_k(\zeta_p, \theta) &= \frac{\partial^\ell}{\partial x'^\ell} \frac{\partial^m}{\partial y'^m} F_0(\zeta_p, \theta) = (-im_0)^r \cos^\ell \theta \sin^m \theta \frac{\partial^r}{\partial \zeta_p^r} F_0(\zeta_p, \theta) \\ G_k(\zeta_p, \theta) &= \frac{\partial^\ell}{\partial x'^\ell} \frac{\partial^m}{\partial y'^m} G_0(\zeta_p, \theta) = (-im_0)^r \cos^\ell \theta \sin^m \theta G_0(\zeta_p, \theta) \end{aligned}$$

les nombres  $\ell$ ,  $m$ ,  $r$  attachés au numéro d'ordre  $k$  étant toujours donnés par les relations (49).

Compte-tenu des formules de dérivation ci-dessous,

$$\frac{\partial^r}{\partial \zeta^r} \left[ e^{\zeta} \mathcal{E}_1(\zeta) \right] = e^{\zeta} \mathcal{E}_1(\zeta) + \sum_{m=1}^r (-1)^m \cdot \frac{(m-1)!}{r} ; \quad (59)$$

$$\frac{\partial^r}{\partial \zeta^r} \left( \frac{1}{a+\zeta} \right) = (-1)^r \frac{r!}{(a+\zeta)^{r+1}} , \quad (60)$$

il vient finalement :

$$\varphi_k = - \frac{1}{8\pi^2} \frac{\mathcal{M}_k}{h^{r+1}} M_0^r \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos^{\ell} \theta \sin^m \theta \sum_{p=1}^2 [\mathcal{F}_k(\zeta_p, \theta) + \mathcal{G}_k(\zeta_p, \theta)] d\theta \quad (61)$$

avec :

$$\mathcal{F}_k(\zeta_p, \theta) = \mathcal{R}_e \left\{ (-i)^r A_0 \left[ e^{\zeta_p} \mathcal{E}_1(\zeta_p) + \sum_{m=1}^r (-1)^m \frac{(m-1)!}{\zeta_p^r} \right] - (i)^r M_0 \sum_{s=1}^S a_s \frac{r!}{(M_0 \lambda_s + \zeta_p)^{r+1}} \right\} \quad (62)$$

$$\mathcal{G}_k(\zeta_p, \theta) = (-i)^{r-1} \pi A_0 e^{\zeta_p}$$

D'où, l'expression du potentiel de KELVIN engendré par la suite de multipôles considérée dans le paragraphe précédent :

$$\tilde{\varphi}(M) = - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^K \frac{\mathcal{M}_k}{h^{r+1}} \mathcal{K}_k(M) , \quad (63)$$

les coefficients d'influence  $\mathcal{K}_k(M)$  étant donnés par la formule suivante :

$$\mathcal{K}_k(M) = - \frac{1}{2\pi} M_0^r \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos^{\ell} \theta \sin^m \theta \sum_{p=1}^2 [\mathcal{F}_k(\zeta_p, \theta) + \mathcal{G}_k(\zeta_p, \theta)] d\theta , \quad (64)$$

les fonctions  $\mathcal{F}_k(\zeta_p, \theta)$ ,  $\mathcal{G}_k(\zeta_p, \theta)$  étant explicitées en (62).

Ce potentiel  $\tilde{\varphi}(M)$  est sensiblement équivalent, dans tout le domaine ( $-h < z < 0$ ) au potentiel de KELVIN  $\varphi(M)$  engendré par la distribution superficielle de singularités réparties sur la surface de carène ( $\Sigma$ ) ; l'approximation est évidemment d'autant meilleure que la suite de multipôles comporte d'avantage de termes.

Sur ce point, on n'est d'ailleurs très peu limité car l'introduction de termes supplémentaires dans cette suite ne nécessite que des calculs extrêmement simples ; l'examen des formules (62) montre, en particulier, que les fonctions  $\mathcal{F}_k(\zeta_p, \theta)$ ,  $\mathcal{G}_k(\zeta_p, \theta)$  caractérisent tout le groupe constitué des  $r+1$  multipôles de même rang  $r$ .

Notons également que le processus d'identification qui permet de déterminer les moments  $\mathcal{M}$  de ces multipôles est assez peu coûteux, du moins tout que leur nombre reste limité à quelques dizaines ; ce qui est, en général, amplement suffisant.

#### IV.3 - Résolution du problème par une méthode d'approximations successives

Jusqu'ici, nous avons seulement établi les formules qui permettent de calculer rapidement le potentiel de KELVIN, engendré par une distribution

superficielle de singularités supposée connue ; il s'agit maintenant de déterminer la distribution superficielle de singularités cinématiquement équivalente à la carène.

Pour cela, nous mettrons en oeuvre un processus d'approximations successives.

Avant de décrire celui-ci, nous rappellerons les équations auxquelles doit satisfaire le potentiel  $\phi_n$  correspondant à l'un quelconque des sept problèmes élémentaires d'hydrodynamique, définis en (I), et qu'on se propose de résoudre effectivement.

$$-k_0 \phi_q + \left. \frac{\partial \phi_q}{\partial z} \right]_{z=0} = 0, \quad \text{condition de surface libre} \quad (65)$$

$$\left. \frac{\partial \phi_q}{\partial z} \right]_{z=-h} = 0, \quad \text{condition de glissement sur le fond} \quad (66)$$

$$\left. \frac{\partial \phi_q}{\partial z} \right]_{\Sigma} = \sigma_q, \quad \text{condition de glissement sur la carène} \quad (67)$$

avec :

$$\sigma_q = \left\{ \begin{array}{ll} \vec{n} \cdot \vec{e}_q & , \quad q = 1, 2, 3 \\ \vec{n} \cdot (\vec{e}_{q-3} \wedge \vec{OM}) & , \quad q = 4, 5, 6 \\ - \frac{\partial \phi_I}{\partial n} & , \quad q = 7 \end{array} \right\} \quad (68)$$

Cette démarche consiste essentiellement à résoudre alternativement un problème de NEUMANN extérieur, noté  $N^p$ , et un problème de KELVIN, noté  $K^p$  ; à chaque étape du calcul la condition de glissement sur le fond sera satisfaite exactement.

Le processus d'approximations successives s'articule alors ainsi :

Problème  $N^1$ :

On détermine le potentiel  $\phi^{(1)}$ , solution du problème de NEUMANN extérieur défini comme suit :

$$\left. \frac{\partial \phi_q^{(1)}}{\partial n} \right]_{\Sigma} = \sigma_q, \quad \left. \frac{\partial \phi_q^{(1)}}{\partial z} \right]_{z=-h} = 0, \quad \phi_q^{(1)} \sim 0 \left( \frac{1}{r^2} \right), \quad \text{pour } r \rightarrow \infty$$

Soit  $\mathcal{G}^{(1)}$  la distribution superficielle de singularités générant ce potentiel  $\phi_q^{(1)}$  ;

Problème  $K^1$ :

On procède à l'identification (53) qui fournit la puissance  $\mathcal{M}_k$  de chacun des  $K$  multipôles attachés à la distribution  $[\mathcal{E}_{i,q}^{(1)}]$  ; ce qui permet de calculer, par application de la formule (63), le potentiel de KELVIN  $\varphi_q^{(1)} = \tilde{\varphi}^{(1)}$  associé au potentiel de RANKINE  $\phi^{(1)}$ .

Le potentiel  $\phi_q^{(1)} = \phi_q^{(1)} + \varphi_q^{(1)}$  serait la solution du problème si

$\left. \frac{\partial \varphi_q^{(1)}}{\partial n} \right]_{\Sigma}$  pouvait être considéré comme négligeable ;

Problème N<sup>2</sup> :

On résoud à nouveau un problème de NEUMANN, analogue au problème N<sup>1</sup>, les conditions aux limites caractérisant le potentiel  $\phi_q^{(2)}$  étant maintenant :

$$\left. \frac{\partial \phi_q^{(2)}}{\partial n} \right]_{\Sigma} = \sigma_q - \frac{\partial \varphi_q^{(1)}}{\partial n}, \quad \left. \frac{\partial \phi_q^{(2)}}{\partial n} \right]_{z=-h} = 0, \quad \phi_q^{(2)} \sim O\left(\frac{1}{r^2}\right), \text{ pour } r \rightarrow \infty$$

Soit  $[\mathcal{E}_q^{(2)}]$  la distribution superficielle de singularités générant ce potentiel  $\phi_q^{(2)}$ ;

Problème K<sup>2</sup> :

On détermine, selon le même processus qu'en K<sup>1</sup>, le potentiel de KELVIN  $\varphi_q^{(2)}$  associé au potentiel de RANKINE  $\phi_q^{(2)}$ .

Le potentiel  $\phi_q^{(2)} = \phi_q^{(2)} + \varphi_q^{(2)}$  serait la solution du problème si la

différence  $\left. \frac{\partial \phi_q^{(2)}}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_q^{(1)}}{\partial n} \right]_{\Sigma}$  pouvait être considérée comme négligeable ;

Problème N<sup>3</sup> :

On détermine de la même manière qu'en N<sup>2</sup>, le potentiel  $\phi_q^{(3)}$  défini ainsi :

$$\left. \frac{\partial \phi_q^{(3)}}{\partial n} \right]_{\Sigma} = \sigma_q - \frac{\partial \varphi_q^{(2)}}{\partial n}, \quad \left. \frac{\partial \phi_q^{(3)}}{\partial n} \right]_{z=-h} = 0, \quad \phi_q^{(3)} \sim O\left(\frac{1}{r^2}\right), \text{ pour } r \rightarrow \infty,$$

ce qui fournit une nouvelle distribution de singularités  $[\mathcal{E}_q^{(3)}]$ .

On continue ainsi jusqu'à l'étape K<sup>P</sup>, à l'issue de laquelle on estime que la différence :

$\left. \frac{\partial \phi_q^{(p)}}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_q^{(p-1)}}{\partial n} \right]_{\Sigma}$  est négligeable en tout point de la surface de carène ( $\Sigma$ ).

A ce moment là, la distribution de singularités cinématiquement équivalente à la carène est la distribution  $[\mathcal{E}_q^{(p)}]$  le potentiel cherché étant :

$$\phi_q = \phi_q^{(p)} + \varphi_q^{(p)}.$$

En pratique, les p problèmes de NEUMANN sont résolus par une distribution superficielle de singularités de RANKINE composée de sources et de doublets normaux ayant respectivement pour densités :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_q^{(p)} &= \sigma_q, \quad \forall p \\ \mu_q^{(p)} &= -\phi_q^{(p)} \end{aligned} \right\} (69)$$

La condition de glissement sur la carène s'exprime alors indirectement

en écrivant :

$$\phi_q^{(p)} \Big|_{\Sigma^-} = - \phi_q^{(p-1)} \Big|_{\Sigma} , \quad (70)$$

( $\Sigma^-$ ) désignant la face interne de la surface ( $\Sigma$ ).

On évite ainsi d'avoir à calculer les dérivées normales  $\frac{\partial \phi_q^{p-1}}{\partial n}$  sur ( $\Sigma$ ), du potentiel de KELVIN  $\phi_q^{p-1}$ .

Le test d'arrêt du processus itératif consiste à s'assurer qu'on a en tout point de la carène :

$$\frac{\mu_q^{(p)} - \mu_q^{(p-1)}}{|\mu_q|_{\max}} < 10^{-4}$$

Lorsqu'il en est ainsi, les valeurs prises par le potentiel  $\phi$  sur la surface de carène, sont simplement égales à  $-\mu_q^{(p)}$ .

Dès lors, le calcul des coefficients hydrodynamiques de masse d'eau ajoutée et d'amortissement ainsi que celui des efforts d'excitations s'effectuent dans les conditions habituelles, à partir de l'équation de LAGRANGE linéarisée.

#### V - RESULTATS NUMERIQUES

Nous nous sommes tout d'abord assurés de la fiabilité du programme de calcul "Multipôles" en comparant les résultats qu'il fournit à ceux qui sont obtenus par le programme "Aquadyn", ce dernier ayant lui-même subi suffisamment de tests satisfaisants pour qu'on puisse lui accorder une grande confiance.

L'exemple adopté est celui d'un caisson parallélépipédique dont les dimensions, ainsi que sa disposition par rapport au fond et à la surface libre, sont précisées sur la figure (4).

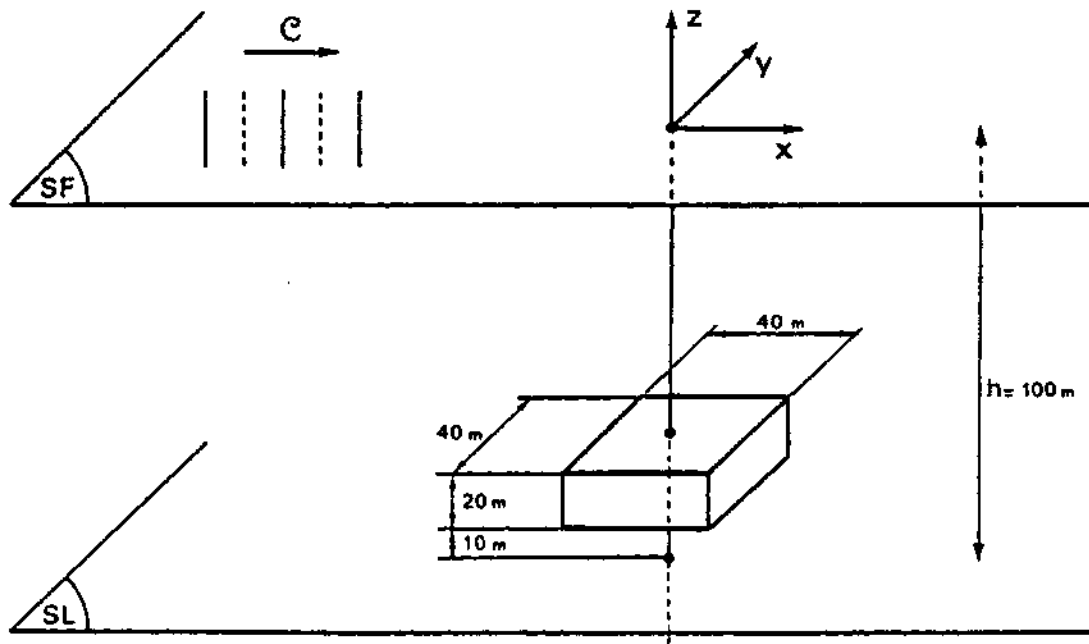


Fig. (4)

Les tableaux annexés ci-dessous fournissent à titre d'exemple, les résultats les plus significatifs qui ressortent de l'étude comparative que nous avons effectuée.

Dans ceux-ci, N désigne le nombre de facettes, T la période d'excitation en secondes.  $CM_{11}$ ,  $CA_{11}$ ;  $CM_{33}$ ,  $CA_{33}$  sont respectivement les coefficients de masse d'eau ajoutée et d'amortissement des mouvements de cavale-ment et de pilonnement.

Comparaison de la précision des résultats									
T	N	$CM_{11} \times 10^{-1}$		$CA_{11} \times 10^{-2}$		$CM_{33} \times 10^{-1}$		$CA_{33} \times 10^{-2}$	
		Aquadyn	Multi-pôles	Aquadyn	Multi-pôles	Aquadyn	Multi-pôles	Aquadyn	Multi-pôles
12	16	3,116	3,117	1,203	1,202	9,779	9,779	2,094	2,098
12	64	2,706	2,707	1,036	1,033	8,488	8,489	1,676	1,678
12	88	2,679	2,680	1,009	1,006	8,381	8,381	1,658	1,661
18	64	2,805	2,805	0,9079	0,9050	8,545	8,545	0,4329	0,4323

Dans tous les cas, la différence entre les valeurs obtenues par les deux méthodes est négligeable (inférieure à 4/1000 dans le cas le plus défavorable).

Comparaison des temps de calcul en adoptant comme référence le temps "Aquadyn", pour T=12s. et N=16				
T	N	Temps Aquadyn	Temps Multipôles	Rapport temps Aquadyn/multipôles à N et T égaux
12	16	1	0,53	1,9
12	64	13,8	1,81	7,6
12	88	25,1	2,73	9,2
18	64	12,8	1,73	7,4

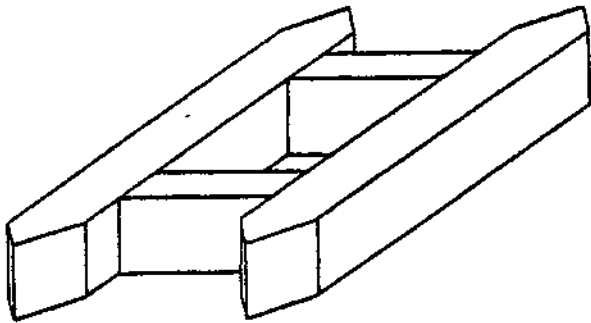
On constate tout d'abord, comme cela était d'ailleurs prévisible, que la supériorité du programme "multipôles" vis à vis du programme "Aquadyn" est d'autant plus manifeste que la carène est plus finement discrétisée ; Toutes conditions restant égales par ailleurs, les temps de calcul sont sensiblement proportionnels au nombre de facettes N, pour le premier, et au carré de celui-ci pour le second.

On remarque également que les valeurs des coefficients hydrodynamiques, sans/être très sensibles à la finesse de la discrétisation, ne semblent tendre vers une limite que si N est supérieur à 64.

Il est très vraisemblable que dans le cas d'une structure beaucoup plus complexe qu'un simple caisson parallélépipédique, les coefficients

hydrodynamiques ne seront correctement calculés que dans la mesure où on adopte des valeurs de N beaucoup plus grandes. A ce moment la, l'utilisation du programme "multipôles" devrait certainement s'imposer.

Pour nous assurer qu'il en est bien ainsi nous avons entrepris une deuxième série d'essais numériques concernant cette fois-ci une structure de forme relativement complexe, dont les caractéristiques Géométriques sont précisées sur le schéma de la figure (5).



Longueur totale..... 40 m  
 Largeur totale ..... 20 m  
 Hauteur.... . . . . . 5m  
 Largeur d'un flotteur.... 5 m  
 Cote du centre de carène. -52,5 m  
 Cote du fond horizontal.. -70 m

Fig. (5)

Le tableau ci-après, dans lequel sont consignés quelques uns des résultats numériques que nous avons obtenus, confirme bien nos prévisions. Les coefficients d'amortissement, qui sont habituellement les plus sensibles à la finesse de discrétisation, prennent des valeurs pratiquement constantes dès que N est supérieur à 64. Par ailleurs, les rapports : temps Aquadyn/ temps multipôles sont approximativement égaux à 12, pour N =64, et à 18, pour N = 92.

N	T	Aquadyn ou multipôles		
		CA <sub>11</sub> x 10 <sup>-5</sup>	CA <sub>22</sub> x 10 <sup>-5</sup>	CA <sub>33</sub> x 10 <sup>-5</sup>
64	10	4,71	10,72	14,45
92	10	4,62	10,62	14,30
64	12	6,85	15,31	12,12
92	12	6,73	15,18	11,99
64	14	6,69	14,83	7,48
92	14	6,56	14,71	7,40
64	16	5,75	12,69	4,43
92	16	5,64	12,59	4,37
64	18	4,78	10,52	2,70
92	18	4,69	10,44	2,66
64	20	3,96	8,72	1,73
92	20	3,89	8,65	1,70.

## VI - CONCLUSIONS

Les deux exemples que nous avons présentés mettent manifestement en évidence l'intérêt de la méthode des multipôles pour résoudre un problème de diffraction-radiation ; d'abord sur le plan économique, mais aussi en ce qui concerne la qualité des résultats numériques.

Nous voulons dire par là que dans la mesure où les coûts du traitement sur ordinateur deviennent très supportables, on hésite moins à effectuer les calculs pour différents modes de discrétisation de la carène ; ce qui permet de s'assurer de la stabilité des résultats.

Pour l'instant, la méthode n'est applicable qu'aux structures entièrement immergées ; elle n'est malheureusement pas susceptible d'être généralisée aux engins de surface. Toutefois, nous envisageons actuellement, du moins pour traiter le cas des plateformes semi-submersibles, de réaliser le couplage des programmes "Aquadyn" et "Multipoles". Les éléments de la structure qui percent la surface libre seraient traités classiquement ; les éléments éloignés de cette surface seraient traités par la méthode des multipôles.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] JOHN F., *On the Motions of floating Bodies*, "Communications on Pure and Applied Mathematics", Vol. 3, 1950, p. 45-101, Interscience Publishers Inc., New-York.
- [2] FRANK W., "Oscillations of cylinders in or below the free surface of deep fluids", Naval Ship Research and Development Center, Report 2375, Washington D.C., octobre 1967
- [3] POTASH R.L.; "Forced oscillations of two rigidly connected cylinders on a free-surface", Master Thesis, University of California, 1967
- [4] LEBRETON J.C., MARGNAC A., "Calcul des mouvements d'un navire ou d'une plateforme amarrés dans la houle", La Houille Blanche, n° 5, 1968, P. 179-190.
- [5] GUEVEL P., DAUBISSE J.C., DELHOMHEAU G., "Oscillations des corps flottants soumis aux actions de la houle", *Bulletin de l'ATMA*, n° 78 1978, p. 145-163.
- [6] EUVRARD D., JAMI A., MORICE C., OUSSET Y., "Calcul numérique des oscillations d'un navire engendrées par la houle", *Journal de Mécanique*, Vol. 16, n° 2, 1977, p. 289-394
- [7] FALTINSEN O.M., MLCHELSEN F.C. "Motions of large structures in Waves at zero Froude Number", Proc. Intern. Dyn. Mar Vehicles Struct. Waves, London 1974, p. 91-106
- [8] BAI KIJ., YEUNG R., "Numerical Solutions to free-surface flow Problems", *J. Fluid. Mech.*, Vol. 81, part. 1, 1977, p. 85-105.
- [9] DAUBISSE J.C., "Some Results on Approximation by Exponential Series Applied to Hydrodynamic Problems", 3<sup>rd</sup> International Conférence on Numerical Ship Hydrodynamics, Paris, Juin 1981



- [10] GUEVEL P., "Oscillations d'un flotteur soumis a l'action de la houle", *Cours de l'E.N.S.M.*, E.N.S.M. Nantes, 1978
- [11] HESS J.L., SMITH A.M.O., "*Calculation of Potential flow about Arbitray Bodies*", Progress in Aeronautical Sciences, Pergamon Press, Vol. 8, 1967, p. 1-138.
- [12] GUEVEL P., DAUBISSE J.C., CORDONNIER J.C., DELHOMMEAU G., "Calcul de la résistance de vagues des navires par une méthode de singularités", *Bulletin de l'ATM* n° 79, 1979, p. 91-119.

© 1982. ATMA.

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés réservés pour tous pays, sans autorisation préalable de l'ATMA et de l'auteur.